Corso di Studio	Architettura
Codice insegnamento	65NC5
Docente	Bruno Antonio Pansera
Insegnamento	Istituzioni di matematica
Ambito disciplinare	Attività formative di base
Settore Scientifico Disciplinare	Mat/05
Numero di CFU	8
Ore di insegnamento	80
Anno di Corso	Primo
Semestre	Primo

Descrizione sintetica dell'insegnamento e obiettivi formativi

Lo scopo del corso è di presentare l'analisi matematica, cioè il calcolo differenziale e integrale e le sue applicazioni, nel suo sviluppo logico a partire dalle proprietà del sistema dei numeri reali, passando per la teoria degli insiemi, la geometria analitica e l'algebra lineare. Il corso di Istituzioni di Matematica è dedicato allo studio delle funzioni reali di una variabile reale; fornisce inoltre una introduzione alle equazioni differenziali ordinarie.

L'obiettivo è fornire alcuni strumenti fondamentali dell'Analisi, sviluppare negli studenti l'attitudine al ragionamento rigoroso e metterli in grado di risolvere alcuni problemi utilizzando il materiale del corso.

Prerequisiti

I prerequisiti per affrontare il corso sono riassunti brevemente nei seguenti argomenti:

- Algebra: equazioni e disequazioni algebriche, logaritmiche, esponenziali, trigonometriche, trascendenti;
- Trigonometria: funzioni trigonometriche fondamentali;
- Geometria analitica piana: equazioni di retta, circonferenza, parabola, ellisse, iperbole.

Programma del corso

Cenni di teoria degli insiemi. Concetto di insieme, sottoinsieme, sottoinsiemi banali, appartenenza ed inclusione, rappresentazione degli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn. Connettivi logici e quantificatori (universale ed esistenziale). Introduzione ai concetti di definizione, assioma, postulato, e ai concetti di teorema, corollario, proposizione, lemma. Introduzione ai concetti di deduzione logica, di dimostrazione diretta e per assurdo, di esempio e controesempio. Operazioni tra insiemi, loro principali proprietà e leggi insiemistiche: unione, intersezione, differenza o complemento, prodotto cartesiano. Insiemi disgiunti, partizione di un insieme.

Insiemi numerici. Insieme dei numeri naturali (N), insieme degli interi relativi (Z), insieme dei numeri razionali (Q), insieme dei numeri reali (R), primi cenni sui numeri complessi (C). Cenni elementari sulle strutture algebriche di gruppo*, anello*, corpo* e campo. Brevi cenni sulle relazioni binarie: proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva; relazioni di equivalenza e d'ordine; insiemi totalmente ordinati e ben ordinati*. Motivazioni storico-matematiche dell'estensione degli insiemi numerici.

Insieme dei numeri naturali (N): formulazione mediante gli assiomi di Peano, principio di induzione con applicazione alla dimostrazione di formule ricorsive (formula della somma di n numeri naturali consecutivi, somma di n numeri pari o dispari consecutivi, somma dei quadrati o dei cubi di n numeri naturali consecutivi, somma di una progressione aritmetica o di una geometrica, disuguaglianza di Bernoulli); definizione di "n fattoriale" e sue proprietà elementari, notazioni compatte e simbolo di sommatoria. Insieme degli interi relativi (Z): introduzione come estensione dell'insieme dei numeri naturali, e proprietà. Introduzione del campo dei numeri razionali (Q): motivazione storico-algebrica dell'estensione di Z, proprietà relative alle operazioni di somma e prodotto (struttura di campo), proprietà relative all'ordinamento. Limiti del campo dei numeri razionali: dimostrazione "geometrica" dell'irrazionalità di radice di 2 (cenni su grandezze commensurabili e incommensurabili: lato e diagonale del quadrato di lato unitario), cenni storici sull'irrazionalità di pi-greco. Estensione assiomatica di Q al campo dei numeri reali (R): proprietà ereditate da Q, "assioma di completezza" e sue conseguenze: principali differenze tra il campo dei numeri razionali e quello dei numeri reali.

Massimo e di minimo di un insieme di numeri reali: definizione e unicità (s.d.). Definizioni di insieme limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato: caratterizzazione degli insiemi limitati; maggioranti e minoranti di un insieme numerico; definizioni di estremo superiore e inferiore di un insieme numerico.

Cenni elementari di algebra lineare e geometria analitica. Cenni sulle matrici: matrici quadrate e determinante di una matrice. Sistemi lineari quadrati e teorema di Cramer (s.d.). Introduzione alla geometria analitica: il piano cartesiano, coordinate cartesiane, distanza tra due punti, coordinate del punto medio di un segmento. Equazione della retta, coefficiente angolare di una retta. Intersezione, condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette, fascio improprio e proprio di rette, distanza di un punto da una retta. Cenni elementari sulle coniche con approfondimenti sull'equazione della parabola.

Numeri complessi. Motivazione storico-algebrica: risoluzione di equazioni algebriche (a coefficienti reali) e estensione del campo dei numeri reali. Unità immaginaria, forma algebrica di un numero complesso, coniugato di un numero complesso. Somma, prodotto e quoziente di due numeri complessi in forma algebrica e loro proprietà; potenze dell'unità immaginaria e, in generale, di un numero complesso in forma algebrica. Struttura di campo dell'insieme dei numeri complessi. Teorema fondamentale dell'algebra (s.d.): risoluzione nel campo complesso di equazioni algebriche sia a coefficienti reali sia a coefficienti complessi*. Proprietà delle soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti reali, scomposizione dei polinomi a coefficienti reali di grado n. Rappresentazione dei numeri complessi nel piano di Argand-Gauss, modulo e argomento principale di un numero complesso e loro proprietà elementari, forma trigonometrica di un numero complesso. Principali differenze con il campo dei numeri reali. Formule di De Moivre: prodotto, quoziente e potenza di numeri complessi in forma trigonometrica. Radici n-esime di un numero complesso: radici complesse dell'unità, legame tra le radici complesse n-esime e i poligoni regolari di n lati.

Funzioni fra insiemi astratti. Definizione di funzione, insieme di definizione o dominio, immagine e insieme dei valori di una funzione, variabile indipendente e variabile dipendente, rappresentazione di una funzione mediante diagrammi di Eulero-Venn, nozione di contro immagine, grafico di una funzione. Restrizione di

una funzione ad un sottoinsieme del dominio. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Funzioni invertibili: definizione, restrizioni invertibili di una funzione non biiettiva, esempi notevoli. Funzioni composte. Cenni sulle funzioni reali di una o più variabili reali. Introduzione alle successioni di numeri reali. Introduzione alle funzioni reali di una variabile reale. Domini delle funzioni reali, studio del segno, grafico di una funzione reale, funzioni pari (o simmetriche), dispari (o antisimmetriche), periodiche, limitate; nozioni di massimo e di minimo assoluto (e di punti di massimo o di minimo assoluto), di estremo superiore e inferiore per funzioni reali definite su un dato insieme. Funzioni monotone: funzioni strettamente crescenti o strettamente decrescenti, crescenti o decrescenti. Funzioni reali composte. Funzioni elementari e i loro grafici: funzioni costanti, lineari (rette), quadratiche (parabole), polinomiali o algebriche intere. Funzione valore assoluto: definizione, principali proprietà, prima e seconda disuguaglianza triangolare. Funzioni potenza ad esponente intero relativo positivo (pari o dispari), intero negativo: definizione, dominio, segno, simmetrie, intervalli di monotonia e immagine.
Funzione inversa di una funzione reale di variabile reale: teorema dell'invertibilità di una funzione elementare strettamente monotona e della stretta monotonia dell'inversa, esempi di funzioni invertibili non strettamente monotone. Esempi notevoli relativi allo studio dell'invertibilità e al calcolo delle funzioni inverse: rapporto tra funzione potenza n-esima e funzione radice n-esima (sia con indice pari sia con indice dispari). Funzioni potenza ad esponente razionale e ad esponente reale, funzioni esponenziali: definizioni, domini, segno, simmetrie, monotonia, immagini, grafici, principali proprietà e invertibilità. Funzioni logaritmiche: definizione, dominio, segno, monotonia, immagine, principali proprietà e legame con la funzione esponenziale. Funzioni trigonometriche dirette (seno, coseno, tangente e cotangente): definizioni, periodicità, grafici, principali proprietà e studio dell'invertibilità di tali funzioni con l'introduzione rigorosa delle funzioni trigonometriche inverse (arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente). Cenni sulle funzioni iperboliche.
Limiti di funzioni e continuità. Cenni sulla topologia della retta reale: intervalli reali, intorni di un punto; punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione e punti isolati per un insieme di numeri reali. Nozione di limite per x tendente a c: convergenza, divergenza positiva o negativa. Concetto di limite sinistro o destro. Asintoti verticali. Per funzioni definite in insiemi illimitati superiormente (inferiormente) introduzione del concetto di limite per x tendente a + (-) infinito: convergenza, divergenza positiva o negativa; asintoti orizzontali e asintoti obliqui. Limiti e asintoti per le funzioni elementari con rappresentazione qualitativo-intuitiva dei loro grafici. Teorema sui limiti delle funzioni composte (s.d.). Limiti notevoli, confronti, stime asintotiche e gerarchia degli infiniti.
Definizione di funzione continua. Classificazione dei punti di discontinuità con esempi notevoli: discontinuità di prima specie o non eliminabile o con salto, discontinuità di seconda specie, discontinuità eliminabile. Teorema sulla continuità della composizione di funzioni continue (s.d). Teorema della permanenza del segno. Proprietà globali delle funzioni continue definite su un intervallo: teorema di esistenza degli zeri (s.d.) e corollario sull'unicità dello zero, con esempi e controesempi; teorema di Weierstrass (s.d.) con esempi e controesempi. Definizione di estremo inferiore e superiore di una funzione definita su un dato insieme. Teorema di esistenza dei valori intermedi (s.d.). Caratterizzazione dell'invertibilità delle funzioni continue e strettamente monotona.

Derivate e calcolo differenziale. Introduzione del concetto di derivata mediante la sua motivazione geometrica: definizione della retta tangente al grafico di una funzione “regolare” (o “liscia”) in un suo punto, e conseguentemente del suo coefficiente angolare. Definizione analitica di rapporto incrementale (e sua interpretazione geometrica) e di derivata. Motivazione fisica della nozione di rapporto incrementale e di derivata, con particolare riferimento ai concetti di velocità media e di velocità istantanea. Notazioni sulle derivate. Derivate di ordine successivo con motivazioni fisiche e geometriche*. Derivate delle funzioni elementari (con dimostrazioni), operazioni con le derivate. Teorema della continuità di una funzione in un punto in cui essa è derivabile (con dimostrazione e controesempi). Definizione di derivata sinistra e di derivata destra. Classificazioni dei punti in cui una funzione è continua ma non è derivabile: punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale. Teorema di derivazione delle funzioni composte (s.d., con applicazioni). Teorema di derivazione della funzione inversa (con dim. e applicazioni alle funzioni elementari inverse). Notazione per gli spazi delle funzioni continue e per quelli delle funzioni derivabili con derivata continua in un insieme.
Ottimizzazione: massimi e minimi relativi o locali, con motivazione storico-matematica dell’introduzione del calcolo differenziale. Teoremi di Fermat, di Rolle e di Lagrange: interpretazione geometrica, esempi, controesempi e dimostrazioni. Algoritmo “rapido” per la ricerca dei massimi e minimi assoluti sugli intervalli chiusi e limitati. Corollari del teorema di Lagrange: criteri di monotonia, caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo (con controesempio sulla non validità di tale caratterizzazione su insiemi qualsiasi). Funzioni convesse, concave e flessi: definizione geometrica, e criterio di convessità e di concavità per funzioni dotate di derivata seconda. Teorema di De l’Hopital*. Algoritmo da seguire per lo studio delle funzioni reali di una variabile reale.
Calcolo Integrale. Motivazione storico-matematica dell’introduzione degli integrali mediante l’interpretazione geometrica e il metodo di esaustione. Partizioni uniformi di un intervallo reale e somme di Cauchy-Riemann. Definizione di funzione integrabile, teorema sull’integrabilità di una funzione continua (s.d.). Proprietà geometriche dell’integrale definito: integrale di una funzione integranda positiva o di una negativa, calcolo di aree di domini piani, proprietà di additività degli integrali, scambio degli estremi di integrazione, proprietà del confronto; proprietà di linearità dell’integrale; proprietà degli integrali definiti su intervalli simmetrici rispetto all’origine di funzioni pari o dispari; teorema della media.
Primitive di una funzione reale di variabile reale: definizione, primi esempi, caratterizzazione delle primitive di una funzione, definizione di integrale indefinito.
Teorema Fondamentale del calcolo integrale. Metodi per il calcolo degli integrali indefiniti: integrali immediati, integrazione per scomposizione, integrazione per sostituzione (con applicazioni alla composizione di funzioni), integrazione di funzioni razionali (con ampia trattazione teorica e applicativa), formula di integrazione per parti.
Equazioni differenziali ordinarie (EDO). Introduzione alle EDO: la ricerca delle primitive di una funzione continua, come un primo esempio di risoluzione di una EDO, e una serie di motivazioni applicative relative ad alcuni modelli notevoli fisici e biologici. EDO di ordine n: definizione di soluzione o integrale di una EDO, def. di equazione in forma normale, e def. di problema di Cauchy con annesse motivazioni fisiche. Def. di integrali generale (insieme delle infinite soluzioni di una EDO), integrale o soluzione particolare, integrale o soluzione singolare*.

EDO lineari (di ordine n): esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy associato. Teorema sull’integrale generale dell'equazione completa lineare di ordine n (con dimostrazione). EDO lineari del primo ordine: teoremi sull’integrale generale dell’omogenea associata e della completa (con dimostrazione e esempi notevoli).
EDO lineari del secondo ordine omogenee: determinante Wronskiano, soluzioni linearmente indipendenti, integrale generale dell’equazione omogenea associata. Teorema sull’integrale generale delle EDO lineari omogenee a coefficienti costanti (con dimostrazione e esempi notevoli).
EDO lineari complete e ricerca di un’integrale particolare: metodo della variazione delle costanti (nel caso n=2), caso di termini noti speciali in presenza di EDO a coefficienti costanti di ordine n1. Cenni elementari sulle EDO nonlineari del primo ordine*: equazioni a variabili separabili*, equazione di Bernoulli*.
N.B.: Per i teoremi contrassegnati con (s.d.) non è richiesta la dimostrazione. Gli argomenti contrassegnati con * sono facoltativi.

Risultati attesi (acquisizione di conoscenze da parte dello studente)

I risultati attesi sono i seguenti:

- Raggiungere una conoscenza approfondita degli argomenti di base dell’Analisi Matematica, come il calcolo differenziale e integrale per le funzioni di una variabile reale, e acquisire la capacità di utilizzare un linguaggio matematico corretto sia nello svolgimento di esercizi che nell’esposizione di dimostrazioni.
- Acquisire capacità di ragionamento induttivo e deduttivo e la capacità di schematizzare in termini rigosi semplici problemi derivanti dalla fisica e geometria.
- Essere in grado di riconoscere la correttezza di semplici dimostrazioni e di produrre semplici dimostrazioni; essere in grado di individuare i metodi più appropriati per analizzare ed affrontare problemi risolvibili con le tecniche acquisiti.
- Essere in grado di esporre argomenti legati all’Analisi matematica con un linguaggio corretto.
- Essere in grado di acquisire autonomamente e gestire nuove informazioni inerenti a tecniche e problemi legati all’Analisi Matematica.

L'obiettivo formativo è raggiunto nella misura in cui lo studente si dimostra capace a risolvere esercizi di livello comparabile con quelli proposti nelle ore di esercitazione dell'insegnamento e ha conoscenza dei contenuti fondamentali dell'insegnamento.

Tipologia delle attività formative

Lezioni *(ore/anno in aula): 60*
Esercitazioni *(ore/anno in aula):20*
Attività pratiche *(ore/anno in aula):*

Lavoro autonomo dello studente

Si indirizzeranno gli studenti ad studio autonomo degli argomenti trattati attraverso una serie di esercitazioni che permettano l'acquisizione delle competenze richieste.

Modalità di verifica dell'apprendimento

L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale riguardante gli argomenti trattati nel corso.

Materiale didattico consigliato

- Marco Bramanti, Carlo Domenico Pagani, Sandro Salsa, ANALISI MATEMATICA 1 con elementi di geometria e algebra lineare, Zanichelli, Ed. 2014 https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-1-bramanti-pagani-salsa?hl=bramanti
- Sandro Salsa, Annamaria Squellati, ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA, Vol. 1 & 2, Zanichelli, Ed. 2011 https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/esercizi-di-analisi-matematica?hl=salsa
- Marcellini, C. Sbordone, Elementi di Calcolo, Liguori Editore, Ed. 2004
- P. Marcellini, C. Sbordone, Esercitazioni di Matematica, 1° Volume, Parte Prima, Liguori Editore, Ed. 2013 (nuova edizione)
- P. Marcellini, C. Sbordone, Esercitazioni di Matematica, 1° Volume, Parte Seconda, Liguori Editore, Ed. 2017

Per la parte relativa alle EDO si può consultare, ad esempio, il seguente testo:

- Marco Bramanti, Carlo Domenico Pagani, Sandro Salsa, ANALISI MATEMATICA 2, Zanichelli, Ed. 2009 https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/analisi-matematica-2?hl=Bramanti