

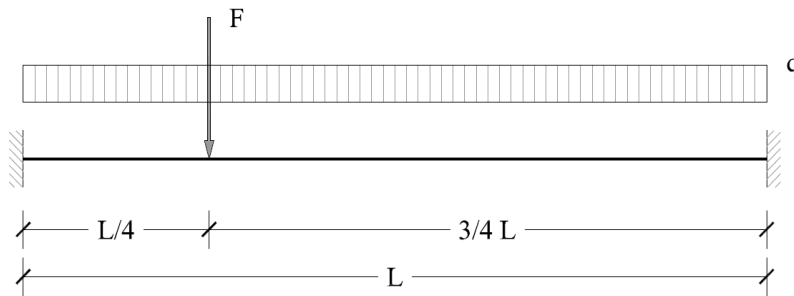
UNIVERSITÀ MEDITERRANEA DI REGGIO CALABRIA

Corso di Tecnica delle Costruzioni I

Prof. ing. Francesco Ricciardelli

ESEMPI

Esempio 2.1: effettuare il calcolo a rottura del sistema mostrato dalla seguente figura.



dove:

$$L = 8,00\text{ m}$$

$$q = 20,0\text{ kN / m}$$

$$F = 50,0\text{ kN}$$

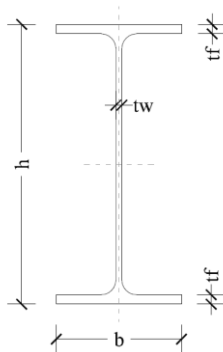
Sistema oggetto dello studio

La trave sarà realizzata in acciaio S355, per il quale si è ipotizzato un legame costitutivo elastico-perfettamente plastico. Nota la tensione di snervamento $f_y = 355\text{ MPa}$, e il modulo di Young $E = 210000\text{ MPa}$, è possibile definire le seguenti deformazioni:

$$\varepsilon_y = f_y / E = 1,69 \cdot 10^{-3} \cong 0,17\%$$

$$\varepsilon_r = 0,10 = 10\%$$

Il profilato a doppia T che realizzerà la trave è *IPE 400*, le cui caratteristiche sono di seguito riportate.

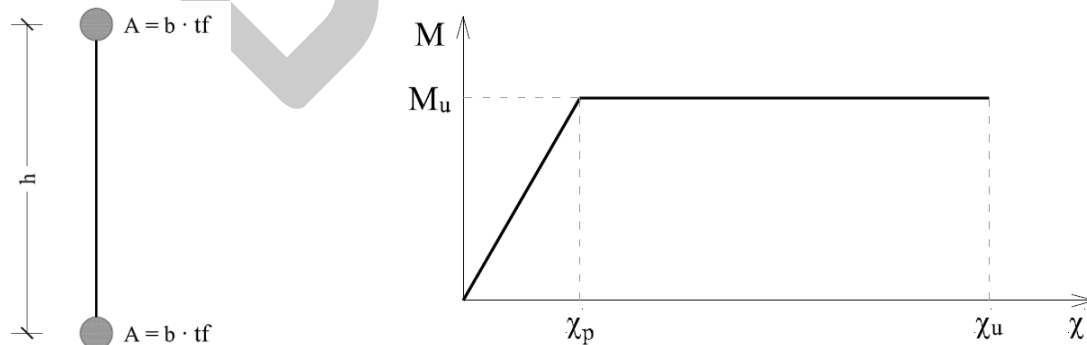


h (mm)	b (mm)	t _w (mm)	t _f (mm)	S (cm ²)	I _x (cm ⁴)	i _x (cm)
400	180	8,6	13,5	84,5	23130	16,5

Con: S = area della sezione; I_x = momento d'inerzia rispetto a x ;
 i_x = raggio d'inerzia.

Caratteristiche della sezione trasversale

La sezione *IPE* doppia T si presta bene alla realizzazione di elementi sollecitati principalmente a flessione: questo perché la gran parte dell'area resistente della sezione è concentrata nelle ali. Sfruttando tale caratteristica è possibile schematizzare la sezione come mostrato in figura.



Schematizzazione della sezione trasversale e legame momenti-curvature

A fronte della schematizzazione introdotta per sezione trasversale della trave, possiamo calcolare:

$$\text{Momento ultimo: } M_u = A \cdot f_y \cdot h = 0,345 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

$$\text{Curvatura ultima: } \chi_u = 2 \cdot (\varepsilon_r / h) = 0,50 \text{ m}^{-1}$$

$$\text{Curvatura di plasticizzazione: } \chi_p = 2 \cdot (\varepsilon_y / h) = 8,50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Calcoliamo quindi il moltiplicatore di collasso λ tale che λq e λF trasformino la struttura in un cinematismo. In prima analisi, ipotizziamo che le cerniere plastiche si formino a $z = 0$, $z = L/3$ e $z = L$. Il momento è parabolico, ed è definito dalle seguenti equazioni:

$$M_1(z) = a_1 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + c_1 \quad \text{per } z \in [0, L/4]$$

$$M_2(z) = a_2 \cdot z^2 + b_2 \cdot z + c_2 \quad \text{per } z \in [L/4, L]$$

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione è possibile definire il primo coefficiente:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -\lambda q \quad \begin{cases} \nearrow 2 \cdot a_1 = -\lambda q \rightarrow a_1 = -\frac{\lambda q}{2} \\ \searrow 2 \cdot a_2 = -\lambda q \rightarrow a_2 = -\frac{\lambda q}{2} \end{cases}$$

Per il calcolo degli altri coefficienti è necessario imporre delle condizioni al contorno. Per il secondo tratto (da $L/4$ a L) possiamo scrivere:

$$M_2(L/3) = M_u \rightarrow -\frac{\lambda q}{2} \frac{L^2}{9} + b_2 \cdot \frac{L}{3} + c_2 = M_u$$

$$M_2(L) = -M_u \rightarrow -\frac{\lambda q}{2} L^2 + b_2 \cdot L + c_2 = -M_u$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni, possiamo ricavare il secondo coefficiente:

$$\frac{4}{9} \lambda q L^2 - b_2 \cdot \frac{2}{3} L = 2M_u \rightarrow b_2 = \frac{3}{2L} \left(\frac{4}{9} \lambda q L^2 - 2M_u \right) = \frac{2}{3} \lambda q L - 3 \frac{M_u}{L}$$

Infine il terzo coefficiente lo ricaviamo per sostituzione:

$$M_2(L) = -\frac{\lambda q}{2} L^2 + \frac{2}{3} \lambda q L^2 - 3M_u + c_2 = -M_u \rightarrow c_2 = -\frac{1}{6} \lambda q L^2 + 2M_u$$

In definitiva, l'equazione del momento nel secondo tratto vale:

$$M_2(z) = -\frac{\lambda q}{2} z^2 + \left(\frac{2}{3} \lambda q L - 3 \frac{M_u}{L} \right) z - \frac{1}{6} \lambda q L^2 + 2M_u$$

Prima di procedere, verifichiamo tale risultato:

$$M_2(L/3) = -\frac{\lambda q}{2} \frac{L^2}{9} + \frac{2}{3} \lambda q \frac{L^2}{3} - M_u - \frac{1}{6} \lambda q L^2 + 2M_u = \left(-\frac{1}{18} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6} \right) \lambda q L^2 + M_u = M_u$$

$$M_2(L) = -\frac{\lambda q}{2} L^2 + \frac{2}{3} \lambda q L^2 - 3M_u - \frac{1}{6} \lambda q L^2 + 2M_u = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \lambda q L^2 - M_u = -M_u$$

In entrambi i casi, le verifiche risultano soddisfatte. Passiamo quindi al primo tratto (da 0 a $L/4$):

$$M_1(0) = -M_u \quad \rightarrow \quad c_1 = -M_u$$

$$T_1(L/4) = T_2(L/4) + \lambda F \quad \text{Discontinuità nel taglio per la presenza di } \lambda F$$

Il taglio del secondo tratto può essere facilmente calcolato derivando dall'equazione del momento:

$$T_2(z) = \frac{dM_2(z)}{dz} = -\lambda qz + \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L}$$

$$T_2(L/4) = -\lambda q \frac{L}{4} + \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} = \frac{5}{12}\lambda qL - \frac{3M_u}{L}$$

L'andamento del taglio è lineare, per cui possiamo scrivere:

$$T_1(z) = 2a_1 \cdot z + b_1 = -\lambda qz + b_1$$

$$T_1(L/4) = -\lambda q \frac{L}{4} + b_1$$

Imponendo la condizione al contorno sul taglio otteniamo:

$$-\lambda q \frac{L}{4} + b_1 = \frac{5}{12}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F \quad \rightarrow \quad b_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right)\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F = \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F$$

L'equazione del momento risulta essere:

$$M_1(z) = -\frac{\lambda q}{2}z^2 + \left(\frac{2}{3}\lambda qL - 3\frac{M_u}{L} + \lambda F\right)z - M_u$$

Come fatto in precedenza, procediamo alla verifica di tale equazione:

$$M_1(0) = -M_u$$

$$T_1(L/4) = -\lambda q \frac{L}{4} + \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F = \frac{5}{12}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F$$

$$T_2(L/4) = -\lambda q \frac{L}{4} + \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} = \frac{5}{12}\lambda qL - \frac{3M_u}{L}$$

$$T_1(L/4) - T_2(L/4) = \lambda F$$

Anche in questo caso le verifiche sono soddisfatte. Ottenute le equazioni del momento nei due tratti, andiamo a ricavare il moltiplicatore λ :

$$M_1(L/4) = M_2(L/4)$$

$$-\frac{\lambda q}{2} \frac{L^2}{16} + \frac{2}{3}\lambda q \frac{L^2}{4} - \frac{3}{4}M_u - \lambda F \frac{L}{6} - M_u = -\frac{\lambda q}{2} \frac{L^2}{16} + \frac{2}{3}\lambda q \frac{L^2}{4} - \frac{3}{4}M_u - \frac{1}{6}\lambda qL^2 + 2M_u$$

$$\frac{1}{6}\lambda qL^2 + \frac{1}{4}\lambda FL - M_u = 2M_u$$

$$\lambda \left(\frac{1}{6}qL^2 + \frac{1}{4}FL \right) = 3M_u$$

Ricavo quindi:

$$\lambda = \frac{3M_u}{\frac{1}{6}qL^2 + \frac{1}{4}FL} = \frac{3 \cdot 345}{\frac{20,0 \cdot 8,00^2}{6} + \frac{50,0 \cdot 8,00}{4}} = 3,30 = \varphi_1$$

Valutiamo quindi l'ascissa alla quale si registra il momento massimo. Per il primo tratto abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1(z)}{dz} &= -\lambda qz + \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F = 0 \\ z_{M_{max}} &= \frac{1}{\lambda q} \left(\frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} + \lambda F \right) = \\ &= \frac{1}{3,30 \cdot 20,0} \left(\frac{2 \cdot 3,30 \cdot 20,0 \cdot 8,00}{3} - \frac{3 \cdot 345}{8,00} + 3,30 \cdot 50,0 \right) = 5,873m = 0,734 \cdot L \end{aligned}$$

Questo risultato non è accettabile perché indica che il momento massimo occorre a un'ascissa che non appartiene al primo tratto. Studiamo quindi il secondo tratto:

$$\begin{aligned} \frac{dM_2(z)}{dz} &= -\lambda qz + \frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} = 0 \\ z_{M_{max}} &= \frac{1}{\lambda q} \left(\frac{2}{3}\lambda qL - \frac{3M_u}{L} \right) = \\ &= \frac{1}{3,30 \cdot 20,0} \left(\frac{2 \cdot 3,30 \cdot 20,0 \cdot 8,00}{3} - \frac{3 \cdot 345}{8,00} \right) = 3,373m = 0,442 \cdot L \end{aligned}$$

Tale risultato è compatibile con la dimensione del tratto, per cui calcoliamo il valore del momento massimo:

$$\begin{aligned} M_2(z_{max}) &= -\frac{3,30 \cdot 20,0}{2} 3,373^2 + \left(\frac{2 \cdot 3,30 \cdot 20,0 \cdot 8,00}{3} - \frac{3 \cdot 345}{8,00} \right) 3,373 + \\ &= -\frac{3,30 \cdot 20,0 \cdot 8,00^2}{6} + 2 \cdot 345 = 0,361 MN \cdot m \end{aligned}$$

Il rapporto tra il momento massimo e il momento plastico è:

$$\frac{M_2(z_{max})}{M_u} = \frac{0,361}{0,345} = 1,047$$

Il coefficiente vale:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{1,047} = 3,15$$

$$3,15 \leq \lambda \leq 3,30$$

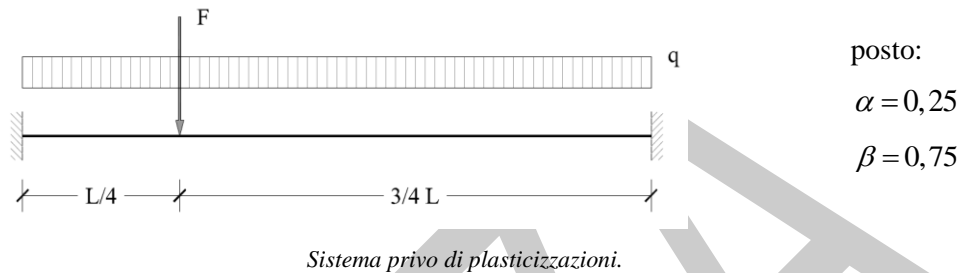
I coefficienti sono sufficientemente vicini, per cui si assume $\lambda = 3,15$. Qualora si volesse condurre un calcolo più accurato, si potrebbe procedere con una seconda iterazione, ponendo la seconda cerniera ad un'ascissa leggermente maggiore di $L/3$, ad esempio proprio $0,442 L$. Occorre sincerarsi che nessuna cerniera arrivi a χ_u prima del collasso della struttura, altrimenti la cerniera "si rompe".

Si assume che la lunghezza della cerniera sia pari all'altezza della sezione, cioè $\Delta L_p = h = 0,40 m$.

$$\text{Rotazione ultima: } \varphi_u = \chi_u \cdot \Delta L_p = 0,500 \cdot 0,40 = 0,20 \text{ rad} = 11,5^\circ$$

$$\text{Rotazione di plasticizzazione: } \varphi_p = \chi_p \cdot \Delta L_p = 8,50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,40 = 0,0034 \text{ rad} = 0,19^\circ$$

Per calcolare le rotazioni plastiche nelle cerniere è necessario saper in che ordine queste si formano: intuitivamente la cerniera intermedia (quella a momento positivo) si formerà per ultima. Per capire quale delle due cerniere di estremità si forma prima, si calcolano i valori dei momenti elastici.



Con riferimento alla figura possiamo scrivere:

$$M_q(0) = M_q(L) = -\frac{\lambda q L^2}{12} \quad M_F(0) = -\lambda F \alpha \beta^2 L \quad M_F(L) = -\lambda F \alpha^2 \beta L$$

Il momento all'estremo sinistro della trave vale:

$$M(0) = -\lambda \left[\frac{qL^2}{12} + F \alpha \beta^2 L \right] = -\lambda \left[\frac{20,0 \cdot 8,00^2}{12} + 50,0 \cdot 0,25 \cdot 0,75^2 \cdot 8,00 \right] = -163 \cdot \lambda \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Uguagliando questo valore al momento ultimo, ricaviamo:

$$M(0) = -M_u \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{345}{163} = 2,12 = \lambda_1$$

Allo stesso modo, per l'estremo destro della trave scriviamo:

$$M(L) = -\lambda \left[\frac{qL^2}{12} + F \alpha^2 \beta L \right] = -\lambda \left[\frac{20,0 \cdot 8,00^2}{12} + 50,0 \cdot 0,25^2 \cdot 0,75 \cdot 8,00 \right] = -125 \cdot \lambda \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Cui corrisponde un coefficiente pari a:

$$M(L) = -M_u \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{345}{125} = 2,75 = \lambda_2$$

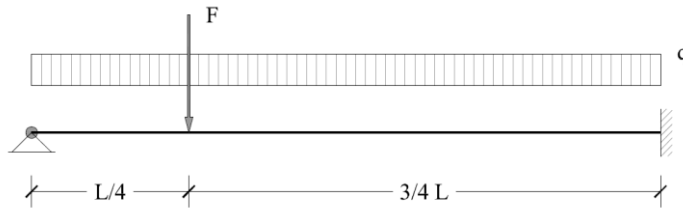
Essendo il moltiplicatore λ_2 più piccolo, si forma per prima la cerniera all'estremo sinistro. Quando il valore di λ è pari a 2,12, il momento all'estremo destro vale:

$$M(L) = -2,12 \left[\frac{qL^2}{12} + F \alpha^2 \beta L \right] = -265 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Dalla differenza tra questo valore e il momento ultimo, possiamo calcolare il momento disponibile, all'estremo destro, prima della plasticizzazione:

$$\Delta M(L) = M_u - M(L) = 345 - 265 = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

È necessario quindi valutare il nuovo incremento di carico che provoca un momento all'estremo destro pari a $\Delta M(L)$. Lo schema statico ora è di trave appoggiata e incastrata.



posto:
 $\alpha = 0,25$
 $\beta = 0,75$

Sistema dopo la prima plasticizzazione

$$M_q(L) = -\frac{\lambda q L^2}{8}$$

$$M_F(L) = -\frac{\lambda F L}{2} (1 - \alpha^2)$$

Il momento all'estremo destro vale:

$$M(L) = -\lambda \left[\frac{q L^2}{8} + \frac{F L}{2} (1 - \alpha^2) \right] = -\lambda \left[\frac{20,0 \cdot 8,00^2}{8} + \frac{50,0 \cdot 8,00}{2} (1 - 0,25^2) \right] = -347,5 \cdot \lambda \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Uguagliando questo valore a ΔM calcoliamo:

$$M(L) = \Delta M(L) \rightarrow \lambda = \left| \frac{80}{347,5} \right| = 0,23 = \lambda_3$$

Calcoliamo quindi le rotazioni all'ascissa $z = 0$:

$$\varphi_q(0) = \frac{\lambda q L^3}{48 EI}$$

$$\varphi_F(0) = \frac{\lambda F L^2 \alpha \beta^2}{4 EI}$$

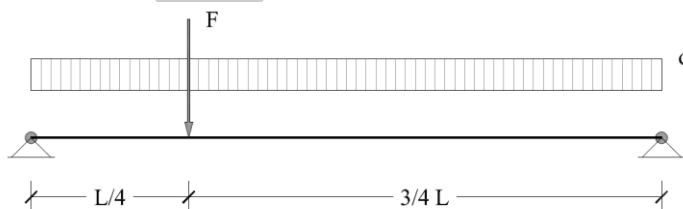
Dove $EI = (2,1 \cdot 10^8) \cdot (2,31 \cdot 10^{-4}) = 4,85 \cdot 10^4$. La rotazione vale:

$$\varphi(0) = \lambda \left[\frac{q L^3}{48 EI} + \frac{F L^2 \alpha \beta^2}{4 EI} \right] = 0,23 \left[\frac{20,0 \cdot 8,00^3}{48 \cdot 4,85 \cdot 10^4} + \frac{50,0 \cdot 8,00^2 \cdot 0,25 \cdot 0,75^2}{4 \cdot 4,85 \cdot 10^4} \right] = 0,0015 \text{ rad}$$

Il carico residuo da applicare è:

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_1 - \lambda_3 = 3,15 - 2,12 - 0,23 = 0,80$$

Lo schema statico, dopo la seconda plasticizzazione, è di trave appoggiata.



posto:
 $\alpha = 0,25$
 $\beta = 0,75$

Sistema dopo la seconda plasticizzazione

La rotazione all'estremo sinistro vale:

$$\varphi(0) = \lambda \left[\frac{qL^3}{24EI} + \frac{FL^2}{6EI} (\beta - \beta^2) \right] = 0,80 \left[\frac{20,0 \cdot 8,00^3}{24 \cdot 4,85 \cdot 10^4} + \frac{50,0 \cdot 8,00^2}{6 \cdot 4,85 \cdot 10^4} (0,75 - 0,75^2) \right] = 0,0087 \text{ rad}$$

La rotazione totale è quindi:

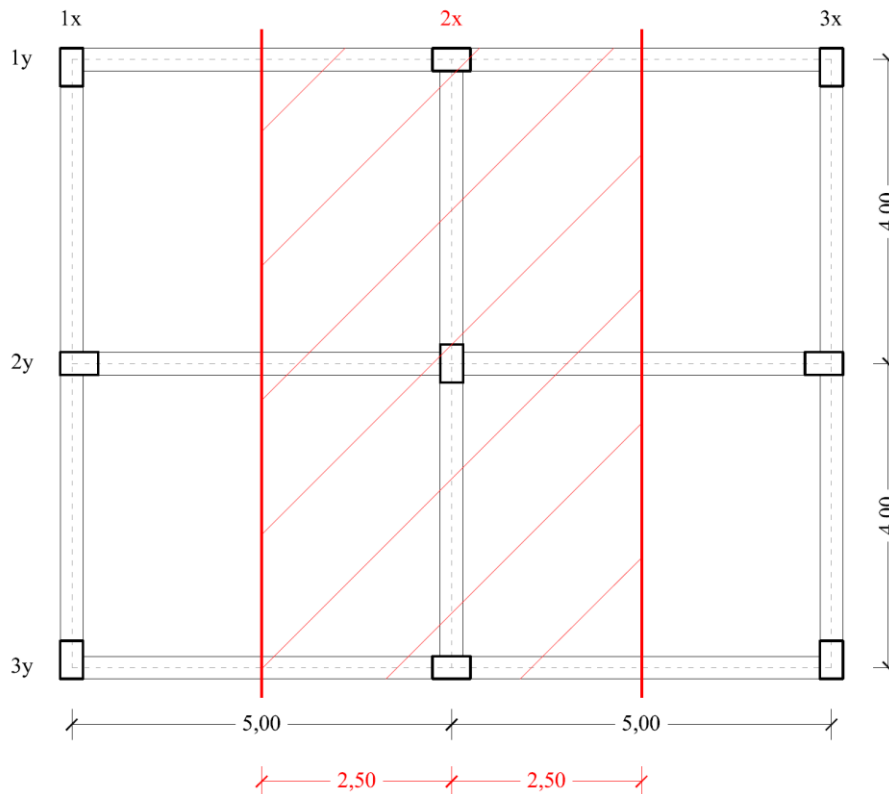
$$\varphi_{tot} = 0,0015 + 0,0087 = 0,0102 \text{ rad} \ll \varphi_u = 0,20 \text{ rad}$$

Il valore finale della rotazione è molto lontano dalla rotazione ultima, la verifica risulta soddisfatta.

BOLZA

Esercizio 2.2. Con riferimento all'edificio mostrato in figura, determinare l'azione sismica ai sensi delle seguenti normative:

- D.M. del 14 gennaio 2008, "Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni" (NTC 2008);
- Circolare del 2 febbraio 2009, "Istruzioni per l'applicazione delle Nuove norme tecniche per le costruzioni" (Circ. 2009).



Edificio in oggetto

L'edificio oggetto dello studio sarà realizzato a Reggio Calabria e sarà utilizzato per abitazione. Il sito di costruzione si trova ad una latitudine e longitudine pari a $38^{\circ},1222$ e $15^{\circ},6630$ rispettivamente. La struttura a telaio, realizzata in cemento armato, è caratterizzata da un coefficiente di smorzamento $\zeta = 5\%$.

Nota la geometria dell'edificio e i materiali con cui sarà realizzato, è possibile stimare la massa sismica relativa ad ogni impalcato. Definiamo per prima cosa i pesi unitari w_i , attraverso l'analisi dei carichi:

- Peso proprio pilastri, sez. $50 \times 30 \text{ cm}^2$: $w_{pil} = \gamma_{ca} \cdot b_p \cdot h_p = 25,00 \cdot 0,30 \cdot 0,50 = 3,75 \text{ kN/m}$;
- Peso proprio travi, sez. $60 \times 30 \text{ cm}^2$: $w_{tr} = \gamma_{ca} \cdot b_t \cdot h_t = 25,00 \cdot 0,30 \cdot 0,60 = 4,50 \text{ kN/m}$;
- Peso proprio solaio latero – cementizio gettato in opera: $w_{sol} = 3,50 \text{ kN/m}^2$;
- Peso delle tamponature, spessore 30 cm : $w_{tam} = 2,36 \text{ kN/m}^2$;
- Carico accidentale per uso abitazione: $Q_{kl} = 2,00 \text{ kN/m}^2$.

Al fine di calcolare il peso sismico delle tamponature che compete a ogni impalcato, conviene calcolare la loro incidenza. Per definire tale valore è sufficiente moltiplicare il peso proprio w_{tam} , per l'altezza di influenza di ogni impalcato, al netto delle travi:

$$\text{Primo imp.: } I_{tam,1} = w_{tam} \cdot \left(\frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} - h_t \right) = 2,36 \cdot \left(\frac{4,00}{2} + \frac{3,50}{2} - 0,60 \right) = 7,43 \text{ kN/m}$$

$$\text{Secondo imp.: } I_{tam,2} = w_{tam} \cdot \left(\frac{H_2}{2} + \frac{H_3}{2} - h_t \right) = 2,36 \cdot \left(\frac{3,50}{2} + \frac{3,50}{2} - 0,60 \right) = 6,84 \text{ kN/m}$$

$$\text{Terzo imp.: } I_{tam,3} = w_{tam} \cdot \left(\frac{H_3}{2} - h_t \right) = 2,36 \cdot \left(\frac{3,50}{2} - 0,60 \right) = 2,71 \text{ kN/m}$$

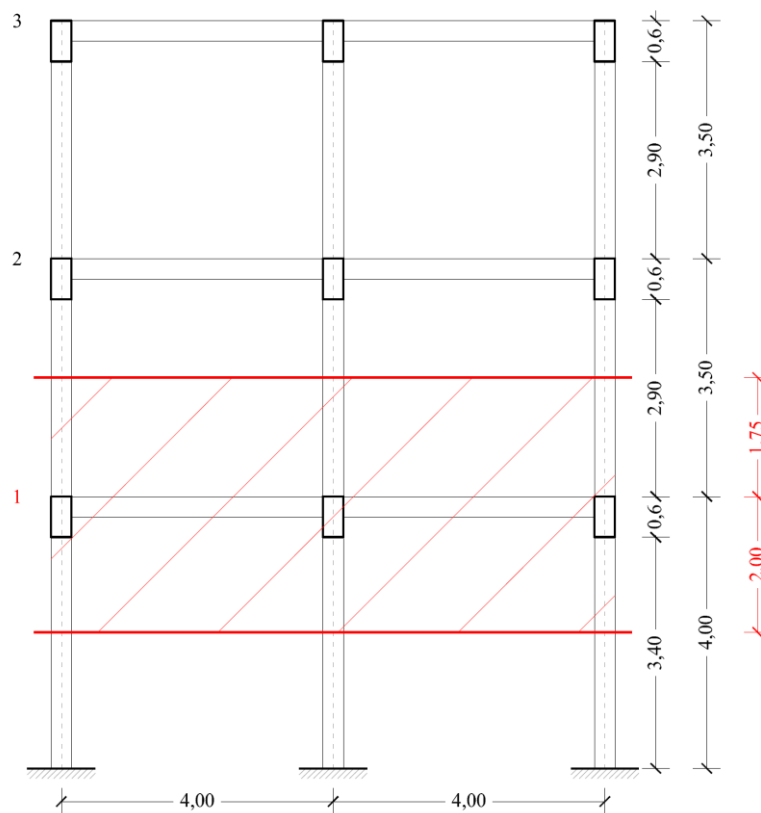
Allo stesso modo, è possibile calcolare l'incidenza dei solai considerando la massa associata ai seguenti carichi gravitazionali:

$$G_1 + G_2 + \sum_j \Psi_{2j} \cdot Q_{kj}$$

Dove Ψ_{2j} vale 0,3 per i carichi accidentali, 0,0 negli altri casi. Applicando tale relazione otteniamo:

$$I_{sol} = w_{sol} + 0,3 \cdot Q_{k1} = 3,50 + 0,30 \cdot 2,00 = 4,10 \text{ kN/m}^2$$

Con riferimento al solo telaio **2x**, calcoliamo il peso che compete a ogni impalcato.



Telaio 2x

Per il primo impalcato abbiamo:

- Peso pilastri: si calcola moltiplicando per il peso proprio per l'altezza d'influenza e per il numero dei pilastri di ogni impalcato.

$$W_{pil} = n_{pil} \cdot \left[w_{pil} \cdot \left(\frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2} \right) \right] = 3 \cdot \left[3,75 \cdot \left(\frac{4,00}{2} + \frac{3,50}{2} \right) \right] = 42,19 \text{ kN}$$

- Peso travi: moltiplichiamo il peso proprio per la luce netta delle travi lungo x e lungo y , per il solo telaio **2x**.

$$W_{tr} = w_{tr} \cdot (n_{tr,x} \cdot i_x + n_{tr,y} \cdot i_y) = 3,75 \cdot (3 \cdot 5,00 + 2 \cdot 4,00) = 86,25 \text{ kN}$$

- Peso solaio: lo otteniamo moltiplicando l'incidenza del solaio per la superficie che compete al telaio considerato.

$$W_{sol} = I_{sol} \cdot A_{sol} = 4,10 \cdot (8,00 \cdot 5,00) = 164,00 \text{ kN}$$

- Peso tamponature: con riferimento al telaio considerato, si moltiplica l'incidenza per la lunghezza delle tamponature, al netto dei pilastri.

$$W_{tam} = I_{tam,1} \cdot [n_{tam,x} \cdot (L_{infl} - b_p)] = 7,43 \cdot [2 \cdot (5,00 - 0,30)] = 66,91 \text{ kN}$$

Dai calcoli appena mostrati, s'intuisce che è possibile calcolare il peso di ogni elemento strutturale e non, moltiplicando il relativo peso unitario (o incidenza) per le dimensioni corrispondenti. Di seguito si riportano sinteticamente i pesi per il secondo e terzo impalcato:

$$W_{pil} = 39,38 \text{ kN}$$

$$W_{tr} = 86,25 \text{ kN}$$

Secondo impalcato:

$$W_{sol} = 164,00 \text{ kN}$$

$$W_{tam} = 61,60 \text{ kN}$$

$$W_{pil} = 19,69 \text{ kN}$$

$$W_{tr} = 86,25 \text{ kN}$$

Terzo impalcato:

$$W_{sol} = 164,00 \text{ kN}$$

$$W_{tam} = 24,43 \text{ kN}$$

Stimate le masse riguardanti ogni impalcato, è possibile determinare l'azione sismica di progetto.

Il primo passo per la stima dell'azione sismica è determinare il periodo di riferimento V_R in funzione del tipo di costruzione e della classe d'uso.

TIPI DI COSTRUZIONE		Vita Nominale V_N (in anni)
1	Opere provvisorie – Opere provvisionali - Strutture in fase costruttiva ¹	≤ 10
2	Opere ordinarie, ponti, opere infrastrutturali e dighe di dimensioni contenute o di importanza normale	≥ 50
3	Grandi opere, ponti, opere infrastrutturali e dighe di grandi dimensioni o di importanza strategica	≥ 100

Vita nominale V_N per diversi tipi di opere.

Considerando che la costruzione verrà adibita a civile abitazione, dalla *tabella 1.1* si può ricavare la sua vita nominale:

$$V_N = 50 \text{ anni}$$

Le NTC 2008 definiscono le quattro classi d'uso in cui vengono raggruppate le costruzioni:

Classe I: Costruzioni con presenza solo occasionale di persone, edifici agricoli.

Classe II: Costruzioni il cui uso preveda normali affollamenti, senza contenuti pericolosi per l'ambiente e senza funzioni pubbliche e sociali essenziali. Industrie con attività non pericolose per l'ambiente [...].

Classe III: Costruzioni il cui uso preveda affollamenti significativi. Industrie con attività pericolose per l'ambiente [...].

Classe IV: Costruzioni con funzioni pubbliche o strategiche importanti, anche con riferimento alla gestione della protezione civile in caso di calamità. Industrie con attività particolarmente pericolose per l'ambiente [...].

In base alla classe d'uso, attraverso la *tabella 1.2*, si definisce il coefficiente d'uso C_U .

CLASSE D'USO	I	II	III	IV
COEFFICIENTE C_U	0,7	1,0	1,5	2,0

Valori del coefficiente d'uso C_U .

Per una costruzione in classe d'uso II, come nel nostro esempio, il periodo di riferimento per l'azione sismica vale:

$$V_R = V_N \cdot C_U = 50 \cdot 1,0 = 50 \text{ anni}$$

Se $V_R \leq 35 \text{ anni}$ si pone comunque $V_R = 35 \text{ anni}$. A questo punto, è opportuno classificare il terreno e il sottosuolo del sito di costruzione.

La seguente tabella riporta le varie categorie di sottosuolo classificate in funzione della velocità equivalente di propagazione delle onde di taglio $V_{s,30}$.

Categoria	Descrizione
A	<i>Ammassi rocciosi affioranti o terreni molto rigidi</i> caratterizzati da valori di $V_{s,30}$ superiori a 800 m/s, eventualmente comprendenti in superficie uno strato di alterazione, con spessore massimo pari a 3 m.
B	<i>Rocce tenere e depositi di terreni a grana grossa molto addensati o terreni a grana fina molto consistenti</i> con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di $V_{s,30}$ compresi tra 360 m/s e 800 m/s (ovvero $N_{SPT,30} > 50$ nei terreni a grana grossa e $c_{u,30} > 250$ kPa nei terreni a grana fina).
C	<i>Depositi di terreni a grana grossa mediamente addensati o terreni a grana fina mediamente consistenti</i> con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di $V_{s,30}$ compresi tra 180 m/s e 360 m/s (ovvero $15 < N_{SPT,30} < 50$ nei terreni a grana grossa e $70 < c_{u,30} < 250$ kPa nei terreni a grana fina).
D	<i>Depositi di terreni a grana grossa scarsamente addensati o di terreni a grana fina scarsamente consistenti</i> , con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di $V_{s,30}$ inferiori a 180 m/s (ovvero $N_{SPT,30} < 15$ nei terreni a grana grossa e $c_{u,30} < 70$ kPa nei terreni a grana fina).
E	<i>Terreni dei sottosuoli di tipo C o D per spessore non superiore a 20 m</i> , posti sul substrato di riferimento (con $V_s > 800$ m/s).

Categorie di sottosuolo.

Inoltre, attraverso la seguente tabella, è possibile tenere in conto l'orografia del sito di costruzione.

Categoria	Caratteristiche della superficie topografica
T1	Superficie pianeggiante, pendii e rilievi isolati con inclinazione media $i \leq 15^\circ$
T2	Pendii con inclinazione media $i > 15^\circ$
T3	Rilievi con larghezza in cresta molto minore che alla base e inclinazione media $15^\circ \leq i \leq 30^\circ$
T4	Rilievi con larghezza in cresta molto minore che alla base e inclinazione media $i > 30^\circ$

Categorie topografiche.

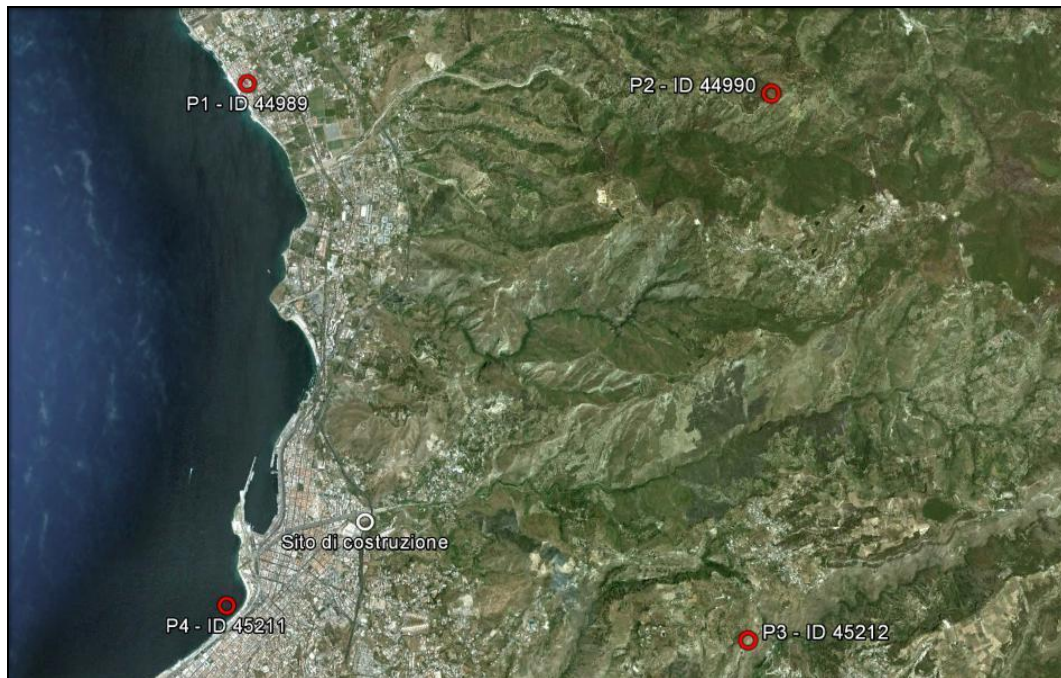
Per il nostro esempio, possiamo ipotizzare un terreno di categoria T1 e sottosuolo di categoria A.

Altri dati fondamentali per lo studio dell'azione sismica sono i parametri a_g , F_0 e T_C^* : questi vengono determinati in funzione delle coordinate del sito di costruzione, e con riferimento allo stato limite considerato. In allegato alle NTC 2008 è presente una tabella, dove sono riportati i valori di a_g , F_0 e T_C^* nei punti che definiscono il *reticolo di riferimento* in cui è suddiviso il territorio italiano, al variare del periodo di ritorno (quindi dello stato limite). Per un qualunque punto che non coincide con i nodi del reticolo di riferimento, i valori dei parametri a_g , F_0 e T_C^* possono essere calcolati come media pesata dei valori assunti da tali parametri nei quattro vertici della maglia contenente il punto in esame, utilizzando come pesi gli inversi delle distanze tra il punto in questione e i quattro vertici.

Considerate i valori di latitudine e longitudine, riportati in precedenza, e con riferimento allo stato limite di salvaguardia della vita (SLV), calcoliamo i parametri a_g , F_0 e T_C^* . La prima cosa da definire è il periodo di ritorno T_R corrispondente allo stato limite considerato:

$$T_R = 9,50 \cdot V_R = 9,50 \cdot 50 = 475 \text{ anni}$$

Con il periodo di ritorno e le coordinate del sito di costruzione, è possibile entrare nelle tabelle allegate alla normativa e individuare i quattro punti del reticolo che contengono il sito di costruzione, con i relativi parametri.



Individuazione del sito nel reticolo.

ID punto	Latitudine	Longitudine	Δ [km]	a_g [g]	F_0	T_C^* [s]
44989	38,164	15,648	4,83	2,665	2,41	0,36
44990	38,162	15,711	6,10	2,690	2,42	0,36
45212	38,112	15,709	4,18	2,707	2,42	0,36
45211	38,114	15,646	1,74	2,697	2,41	0,36

Parametri del reticolo di riferimento.

Dove Δ è la distanza tra il punto del reticolo ed il sito di costruzione. Calcoliamo per primo il valore di a_g applicando la procedura riportata in normativa. Per primo calcoliamo l'inverso delle distanze Δ_i :

$$\frac{1}{\Delta_1} = 0,207$$

$$\frac{1}{\Delta_2} = 0,164$$

$$\frac{1}{\Delta_3} = 0,239$$

$$\frac{1}{\Delta_4} = 0,573$$

Calcoliamo quindi il rapporto $a_{g,i}/\Delta_i$ per ogni punto:

$$\frac{a_{g,1}}{\Delta_1} = 0,522$$

$$\frac{a_{g,2}}{\Delta_2} = 0,441$$

$$\frac{a_{g,3}}{\Delta_3} = 0,647$$

$$\frac{a_{g,4}}{\Delta_4} = 1,546$$

Il valore di a_g , definito nel sito di costruzione, vale:

$$a_g = \sum_{i=1}^4 \frac{a_{g,i}}{\Delta_i} / \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\Delta_i} = \frac{3.185}{1.183} = 2,692 g$$

Allo stesso modo è possibile calcolare i valori degli altri parametri:

$$F_0 = \sum_{i=1}^4 \frac{F_{0,i}}{\Delta_i} / \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\Delta_i} = 2,414 \qquad T_C^* = \sum_{i=1}^4 \frac{T_{C,i}^*}{\Delta_i} / \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\Delta_i} = 0,362 s$$

Noti i parametri dello spettro, mediante le tabelle riportate di seguito, è possibile definire i seguenti parametri:

$$S_S = 1,00$$

$$C_C = 1,00$$

$$S_T = 1,00$$

Categoria sottosuolo	S_S	C_C
A	1,00	1,00
B	$1,00 \leq 1,40 - 0,40 \cdot F_0 \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,20$	$1,10 \cdot (T_C^*)^{-0,20}$
C	$1,00 \leq 1,70 - 0,60 \cdot F_0 \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,50$	$1,05 \cdot (T_C^*)^{-0,33}$
D	$0,90 \leq 2,40 - 1,50 \cdot F_0 \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,80$	$1,25 \cdot (T_C^*)^{-0,50}$
E	$1,00 \leq 2,00 - 1,10 \cdot F_0 \cdot \frac{a_g}{g} \leq 1,60$	$1,15 \cdot (T_C^*)^{-0,40}$

Espressioni di S_S e C_C

Categoria topografica	Ubicazione dell'opera o dell'intervento	S_T
T1	-	1,0
T2	In corrispondenza della sommità del pendio	1,2
T3	In corrispondenza della cresta del rilievo	1,2
T4	In corrispondenza della cresta del rilievo	1,4

Valori del coefficiente di amplificazione topografica S_T

Il prodotto tra il coefficiente di amplificazione stratigrafica S_S e il coefficiente di amplificazione topografica S_T vale:

$$S = S_S \cdot S_T = 1,00 \cdot 1,00 = 1,00$$

Lo spettro di risposta elastico della componente orizzontale è definito dalle seguenti espressioni:

$$0 \leq T < T_B \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \left[\frac{T}{T_B} + \frac{1}{\eta \cdot F_0} \left(1 - \frac{T}{T_B} \right) \right]$$

$$T_B \leq T < T_C \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0$$

$$T_C \leq T < T_D \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \left(\frac{T_C}{T} \right)$$

$$T_D \leq T \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \left(\frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right)$$

Dove:

$$T_C = C_C \cdot T_C^*$$

$$T_B = T_C / 3$$

$$T_D = 4,0 \cdot a_g / g + 1,6$$

Il parametro η è funzione dello smorzamento strutturale:

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi}}$$

Con ξ espresso in percentuale. Per passare allo spettro di progetto, si pone η pari all'inverso del fattore di struttura. Il fattore di struttura dipende dalla tipologia strutturale, dal suo grado d'iperstaticità e dai criteri di progettazione adottati e tiene in conto le non linearità di materiale. Esso può essere calcolato tramite la seguente espressione:

$$q = q_0 \cdot K_R$$

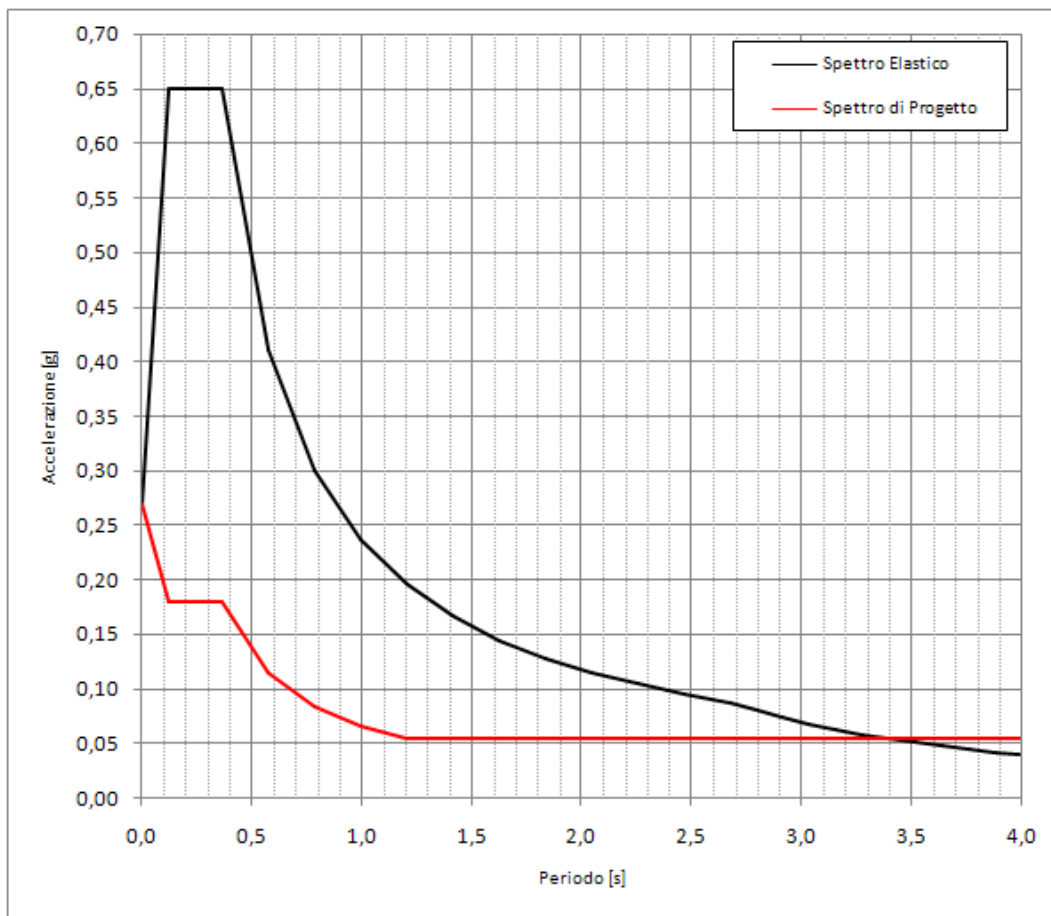
I valori di q_0 e K_R possono essere dedotti dalle indicazioni presenti in normativa. Per strutture in cemento armato progettate in bassa duttilità, il fattore q_0 è pari a $3,0 \alpha_u / \alpha_1$.

Tipologia	q_0	
	CD"B"	CD"A"
Strutture a telaio, a pareti accoppiate, miste	$3,0 \alpha_u / \alpha_1$	$4,5 \alpha_u / \alpha_1$
Strutture a pareti non accoppiate	3,0	$4,0 \alpha_u / \alpha_1$
Strutture deformabili torsionalmente	2,0	3,0
Strutture a pendolo inverso	1,5	2,0

Valori di q_0

Posto $\alpha_u / \alpha_1 = 1,20$ per strutture a telaio a più piani ed una sola campata. $K_R = 1,00$ perché la struttura è regolare in altezza. In definitiva, il fattore di struttura q risulta essere 3,60.

La seguente figura mostra gli spettri di risposta elastico e di progetto.



Spettri di risposta.

Noti i pesi sismici e definito lo spettro di progetto, è possibile calcolare le forze da applicare ad ogni impalcato, attraverso la seguente relazione:

$$F_i = F_h \cdot \frac{W_i \cdot z_i}{\sum_j W_j \cdot z_j}$$

Dove $F_h = S_d(T_1) \cdot W \cdot \lambda / g$; F_i è la forza da applicare all'impalcato; W_i è il peso dell' i -esimo impalcato, z_i è la quota, rispetto al piano di fondazione, dell'impalcato i -esimo; $S_d(T_1)$ è l'ordinata dello spettro di risposta di progetto, letta in corrispondenza del periodo T_1 ; W è il peso complessivo della costruzione; λ è un coefficiente pari a 0,85 se la costruzione ha almeno tre orizzontamenti, pari a 1,00 in tutti gli altri casi. Il periodo proprio della struttura T_1 può essere stimato attraverso la relazione:

$$T_1 = C_1 \cdot H^{3/4}$$

Dove H è l'altezza totale della struttura e C_1 è un coefficiente pari a 0,075 per costruzioni con struttura a telaio in cemento armato.

$$T_1 = 0,075 \cdot (11,00)^{3/4} = 0,45 \text{ s}$$

La coordinata spettrale letta in corrispondenza di T_1 è circa pari $0,144 g$. La seguente tabella riporta il peso sismico relativo a ogni impalcato.

	$W_i [kN]$	$z_i [m]$	$W_i \times z_i [kN m]$
<i>Primo impalcato</i>	359,35	4,00	1437,4
<i>Secondo impalcato</i>	351,23	7,50	2634,2
<i>Terzo impalcato</i>	294,37	11,00	3238,0
TOTALE	1004,95		7309,6

Pesi sismici

Nota la massa totale e posto λ pari a 0,85, possiamo calcolare:

$$F_h = S_d(T_1) \cdot W \cdot \lambda / g = 0,144 g \cdot 1007,18 \cdot 0,85 / g = 123,40 kN$$

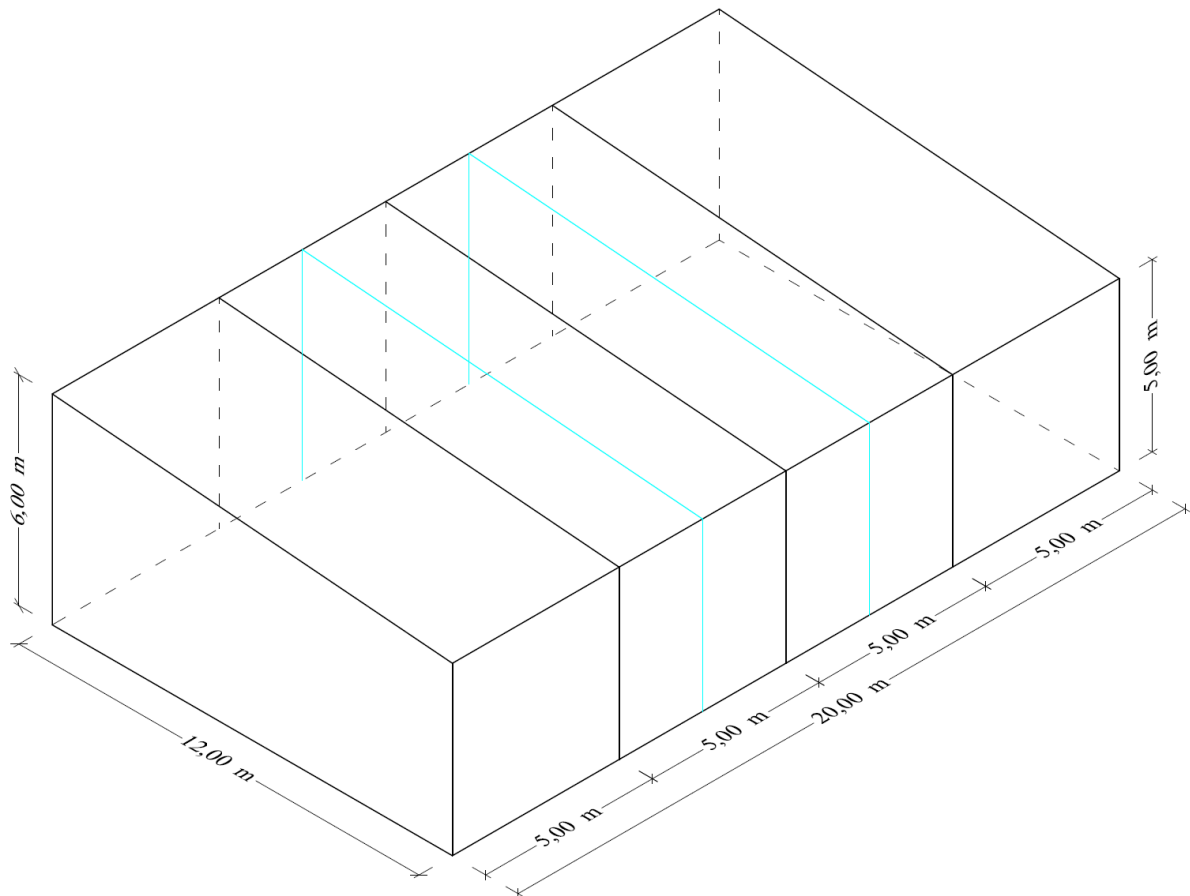
Infine, la seguente tabella riporta le forze da applicare a ogni impalcato.

	$W_i [kN]$	$z_i [m]$	$F_i [kN]$
<i>Primo impalcato</i>	372,09	4,00	24,26
<i>Secondo impalcato</i>	345,97	7,50	44,47
<i>Terzo impalcato</i>	289,11	11,00	54,66

Forze orizzontali a ogni impalcato

Esempio 2.3a: calcolare l'azione del vento sull'edificio mostrato dalla seguente figura, ai sensi delle seguenti normative:

- D.M. del 14 gennaio 2008, “Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni” (NTC 2008);
- Circolare del 2 febbraio 2009, “Istruzioni per l'applicazione delle Nuove norme tecniche per le costruzioni” (Circ. 2009);
- CNR-DT 207/2008, Istruzioni per la valutazione delle azioni e degli effetti del vento sulle costruzioni (CNR 2008).



Edificio in oggetto

L'azione del vento produce delle pressioni che possono essere calcolate secondo l'espressione:

$$p = q_b \cdot c_e \cdot c_p \cdot c_d$$

Dove:

- q_b è la pressione cinetica di riferimento;
- c_e è il coefficiente di esposizione;
- c_p è il coefficiente di forma o aerodinamico;
- c_d è il coefficiente dinamico.

Ipotizziamo che il capannone industriale mostrato in figura, sia realizzato a Reggio Calabria, a una quota di 30 m s.l.m. e a circa 10 Km dalla costa.



Mappa delle zone in cui è suddiviso il territorio italiano

Zona	Descrizione	$v_{b,0}$ [m/s]	a_0 [m]	k_a [1/s]
1	Valle d'Aosta, Piemonte, Lombardia, Trentino Alto Adige, Veneto, Friuli Venezia Giulia (con l'eccezione della provincia di Trieste)	25	1000	0,010
2	Emilia Romagna	25	750	0,015
3	Toscana, Marche, Umbria, Lazio, Abruzzo, Molise, Puglia, Campania, Basilicata, Calabria (esclusa la provincia di Reggio Calabria)	27	500	0,020
4	Sicilia e provincia di Reggio Calabria	28	500	0,020
5	Sardegna (zona a oriente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28	750	0,015
6	Sardegna (zona a occidente della retta congiungente Capo Teulada con l'Isola di Maddalena)	28	500	0,020
7	Liguria	28	1000	0,015
8	Provincia di Trieste	30	1500	0,010
9	Isole (con l'eccezione di Sicilia e Sardegna) e mare aperto	31	500	0,020

Valori dei parametri $v_{b,0}$, a_0 e k_a

La località di costruzione dell'edificio è compresa nella zona 4: dalla tabella è possibile ricavare i parametri che caratterizzano tale zona.

$$v_{b,0} = 28 \text{ m/s}$$

$$a_0 = 500 \text{ m}$$

$$k_a = 0,0201 / s$$

Dato che l'edificio sorgerà a quota minore di a_0 , la velocità di riferimento per il calcolo delle azioni da vento sarà pari a:

$$v_b = v_{b,0} = 28 \text{ m/s}$$

Tale valore consente di calcolare la pressione cinetica di riferimento:

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 28^2 = 490 Pa$$

Dove $\rho = 1,25 \text{ Kg} / \text{m}^3$ è la densità dell'aria.

Il coefficiente dinamico c_d può essere assunto cautelativamente pari a 1 per le costruzioni di tipologia ricorrente, quali gli edifici di forma regolare non più alti di 30 m ed i capannoni industriali.

Supponendo che il capannone debba essere realizzato in zona urbana, dalla seguente tabella si ricava che la classe di rugosità del terreno è la A.

Classe di rugosità del terreno	Descrizione
A	Aree urbane in cui almeno il 15% della superficie sia coperto da edifici la cui altezza media superi i 15m
B	Aree urbane (non di classe A), suburbane, industriali e boschive
C	Aree con ostacoli diffusi (alberi, case, muri, recinzioni,...); aree con rugosità non riconducibile alle classi A, B, D
D	Aree prive di ostacoli (aperta campagna, aeroporti, aree agricole, pascoli, zone paludose o sabbiose, superfici innevate o ghiacciate, mare, laghi,...)

L'assegnazione della classe di rugosità non dipende dalla conformazione orografica e topografica del terreno. Affinché una costruzione possa dirsi ubicata in classe A o B è necessario che la situazione che contraddistingue la classe permanga intorno alla costruzione per non meno di 1 km e comunque non meno di 20 volte l'altezza della costruzione. Laddove sussistano dubbi sulla scelta della classe di rugosità, a meno di analisi dettagliate, verrà assegnata la classe più sfavorevole.

Classi di rugosità del terreno

Essendo l'area posta entro 40 Km dalla costa, la categoria di esposizione del sito è la IV, in funzione della quale, si ricava:

$$k_r = 0,22$$

$$z_0 = 0,30m$$

$$z_{min} = 8m$$

	ZONE 1,2,3,4,5					
A	--	IV	IV	V	V	V
B	--	III	III	IV	IV	IV
C	--	*	III	III	IV	IV
D	I	II	II	II	III	**
* Categoria II in zona 1,2,3,4 Categoria III in zona 5						
** Categoria III in zona 2,3,4,5 Categoria IV in zona 1						

Categorie di esposizione

Categoria di esposizione del sito	k_r	z_0 [m]	z_{min} [m]
I	0,17	0,01	2
II	0,19	0,05	4
III	0,20	0,10	5
IV	0,22	0,30	8
V	0,23	0,70	12

Parametri per la definizione del coefficiente di esposizione

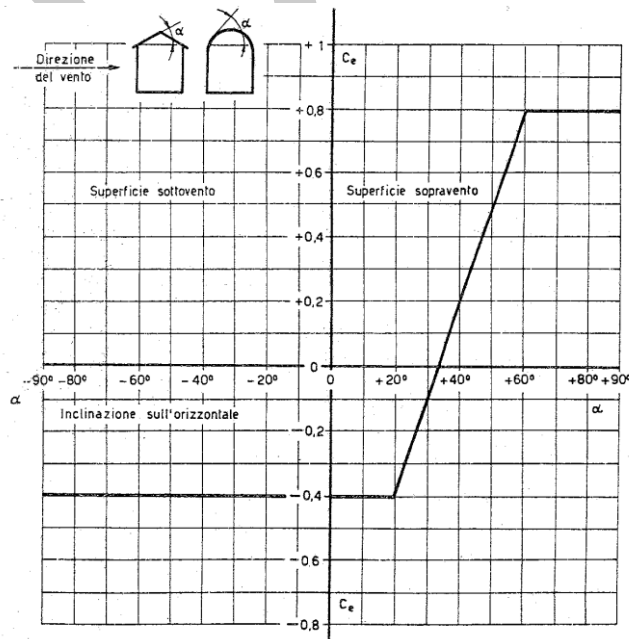
Dato che l'altezza di colmo della copertura del capannone è $z = 6,00$ m, il coefficiente di esposizione viene calcolato con riferimento alla quota z_{min} :

$$c_e(z) = c_e(z_{min}) = k_r^2 \cdot c_t \cdot \ln\left(\frac{z_{min}}{z_0}\right) \cdot \left[7 + c_t \cdot \ln\left(\frac{z_{min}}{z_0}\right)\right] = 1,63$$

Dove c_t è il coefficiente topografico, posto generalmente pari a 1 mentre z è la quota rispetto al suolo. Secondo le NTC 2008, il coefficiente di pressione esterna c_{pe} è determinato in funzione dell'inclinazione sull'orizzontale delle superfici esposte, e distinguendo in aree sopravento, cioè direttamente investite dal vento, e aree sottovento, intendendo come tali quelle non direttamente investite dal vento o quelle investite dal vento radente.

Nel caso in questione, i coefficienti di pressione esterna valgono:

- Per $\alpha = +90^\circ$, $c_{pe} = +0,80$ Superfici sopravento (pedice w);
- Per $\alpha = -90^\circ$, $c_{pe} = -0,40$ Superfici sottovento (pedice l);
- Per $\alpha = +4^\circ,76$, $c_{pe} = -0,40$ Copertura (pedice r).

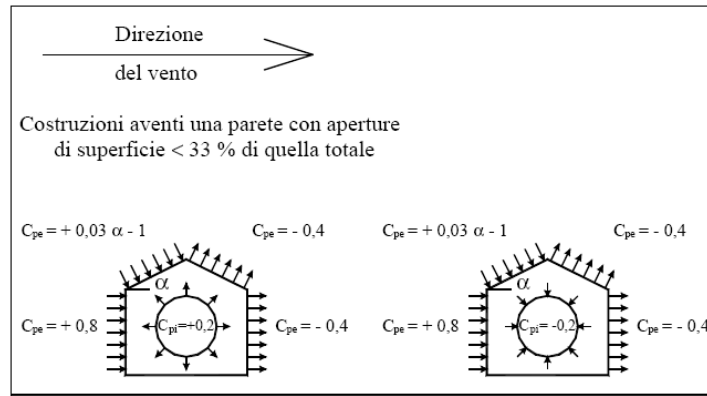


Valori assunti da c_{pe} al variare di α

Il coefficiente di pressione interna dipende dalle aperture presenti sulle superfici esposte. Nel caso di aperture distribuite con superficie minore di 1/3 del totale, i coefficienti di pressione interna valgono:

$$c_{pi} = + 0,20 \quad \text{Pressione interna positiva;}$$

$$c_{pi} = - 0,20 \quad \text{Pressione interna negativa.}$$



Valori assunti da c_{pi}

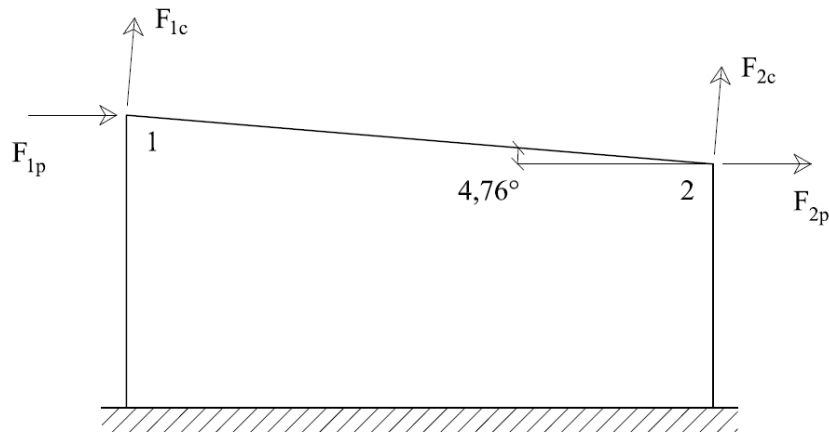
Definiti i coefficienti di pressione esterna e interna, è possibile calcolare il coefficiente di pressione netta, c_p , per differenza tra i coefficienti c_{pe} e c_{pi} . Dato che il coefficiente di pressione interna può assumere valori sia positivi sia negativi, è necessario considerare due diverse condizioni di carico: la prima, in presenza di sovrappressione interna; e l'altra considerando la pressione interna negativa.

Superfici sopravvento: $c_{p,w} = c_{pe,w} - c_{pi}$	$\nearrow 0,80 - 0,20 = 0,60$	<i>Sovrappressione interna</i>
	$\searrow 0,80 - (-0,20) = 1,00$	<i>Depressione interna</i>
Superfici sottovento: $c_{p,l} = c_{pe,l} - c_{pi}$	$\nearrow -0,40 - 0,20 = -0,60$	<i>Sovrappressione interna</i>
	$\searrow -0,40 - (-0,20) = -0,20$	<i>Depressione interna</i>
Copertura: $c_{p,r} = c_{pe,r} - c_{pi}$	$\nearrow -0,40 - 0,20 = -0,60$	<i>Sovrappressione interna</i>
	$\searrow -0,40 - (-0,20) = -0,20$	<i>Depressione interna</i>

Noti tutti i coefficienti, è possibile calcolare la pressione esercitata dal vento.

Superfici sopravvento: $p_w = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,w}$	$\nearrow 480 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	$\searrow 801 Pa$	<i>Depressione interna</i>
Superfici sottovento: $p_l = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,l}$	$\nearrow -480 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	$\searrow -160 Pa$	<i>Depressione interna</i>
Copertura: $p_r = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,r}$	$\nearrow -480 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	$\searrow -160 Pa$	<i>Depressione interna</i>

La pressione esercitata dal vento è riportata alla struttura come forze nodali; per cui, con riferimento al telaio C mostrato dalla seguente figura, calcoliamo tali forze.



Forze nodali locali generate da vento

Le forze nodali dovute all'azione del vento sono calcolate moltiplicando il valore della pressione per l'area d'influenza del nodo considerato: il risultato di tale operazione restituisce le azioni nodali in un sistema di riferimento locale. Calcoliamo per prima cosa le aree d'influenza dei nodi:

$$A_{1p} = \left(\frac{6,00}{2} \cdot 5,00 \right) = 15,00 m^2 \quad \text{Nodo 1 - Area d'influenza parete}$$

$$A_{1c} = \left(\frac{12,00}{2} \cdot \frac{1}{\cos 4,76} \cdot 5,00 \right) = 30,10 m^2 \quad \text{Nodo 1 - Area d'influenza copertura}$$

$$A_{2p} = \left(\frac{5,00}{2} \cdot 5,00 \right) = 12,50 m^2 \quad \text{Nodo 2 - Area d'influenza parete}$$

$$A_{2c} = \left(\frac{12,00}{2} \cdot \frac{1}{\cos 4,76} \cdot 5,00 \right) = 30,10 m^2 \quad \text{Nodo 2 - Area d'influenza copertura}$$

Le forze nodali risultano essere:

$$\text{Forza nodo 1 - Parete: } F_{1p} = A_{1p} \cdot p_w \begin{cases} \nearrow 7207 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow 12011 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

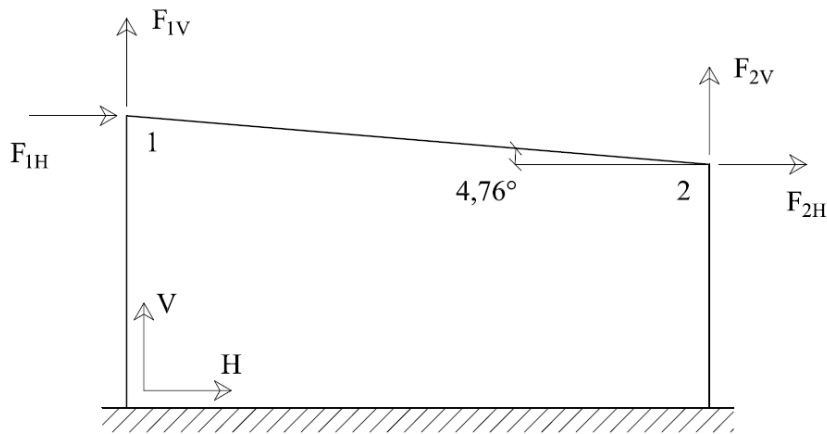
$$\text{Forza nodo 1 - Copertura: } F_{1c} = A_{1c} \cdot p_r \begin{cases} \nearrow -14464 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow -4821 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

$$\text{Forza nodo 2 - Parete: } F_{2p} = A_{2p} \cdot p_l \begin{cases} \nearrow -6006 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow -2002 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

$$\text{Forza nodo 2 - Copertura: } F_{2c} = A_{2c} \cdot p_r \begin{cases} \nearrow -14464 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow -4821 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

Le forze nodali così calcolate devono essere proiettate in un sistema di riferimento globale V, H .

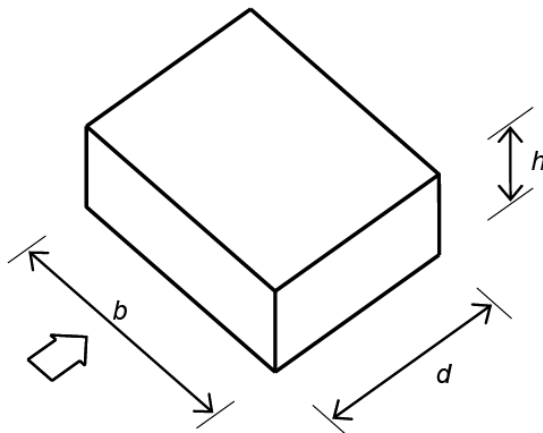
$$\begin{aligned}
 F_{1H} &= F_{1p} - F_{1c} \cdot \sin 4,76 && \begin{cases} 8407 N & \text{Sovrappressione interna} \\ 12412 N & \text{Depressione interna} \end{cases} \\
 F_{1V} &= -F_{1c} \cdot \cos 4,76 && \begin{cases} 14414 N & \text{Sovrappressione interna} \\ 4805 N & \text{Depressione interna} \end{cases} \\
 F_{2H} &= F_{2p} - F_{2c} \cdot \sin 4,76 && \begin{cases} 7206 N & \text{Sovrappressione interna} \\ 2402 N & \text{Depressione interna} \end{cases} \\
 F_{2V} &= -F_{2c} \cdot \cos 4,76 && \begin{cases} 14414 N & \text{Sovrappressione interna} \\ 4805 N & \text{Depressione interna} \end{cases}
 \end{aligned}$$



Forze nodali globali generate dal vento

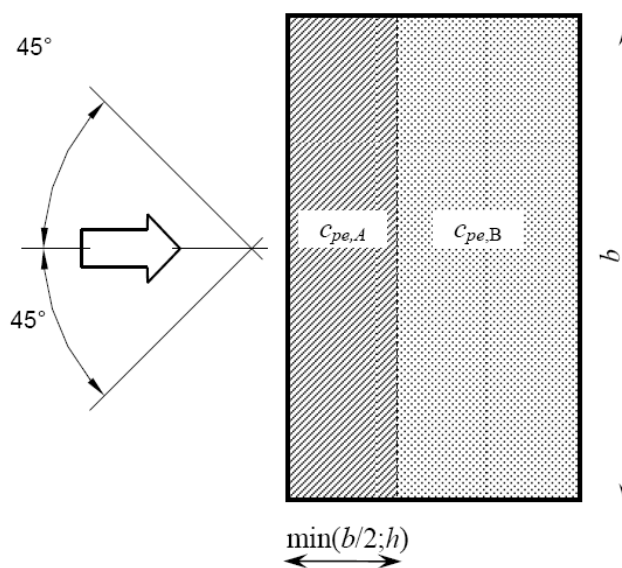
La procedura appena descritta consente di calcolare le forze dovute all'azione del vento, in accordo alle Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni (NTC).

Secondo la CNR-DT 207/2008, i coefficienti di pressione esterna si calcolano tenendo conto della geometria dell'intero edificio, attraverso i rapporti tra le sue dimensioni:



Parametri caratteristici di edifici a pianta rettangolare

Inoltre, per inclinazione delle falde compresa tra -5° e 5° , la copertura si considera piana:



Schema di riferimento per coperture piane

Con riferimento agli schemi appena presentati, i coefficienti di pressione esterna:

- $c_{pe,w} = +0,75$ Superfici sopravvento;
- $c_{pe,l} = -0,40$ Superfici sottovento;
- $c_{pe,r} = -0,80$ Copertura – Zona A;
- $c_{pe,r} = -0,20$ Copertura – Zona B.

Faccia sopravvento	Facce laterali	Faccia sottovento
$h/d \leq 1: c_{pe} = 0,7 + 0,1 \cdot h/d$ $h/d > 1: c_{pe} = 0,8$	$h/d \leq 0,5: c_{pe} = -0,5 - 0,8 \cdot h/d$ $h/d > 0,5: c_{pe} = -0,9$	$h/d \leq 1: c_{pe} = -0,3 - 0,2 \cdot h/d$ $1 < h/d \leq 5: c_{pe} = -0,5 - 0,05 \cdot (h/d - 1)$

Coefficienti di pressione per le pareti verticali di edifici a pianta rettangolare

Fascia sopravvento di profondità pari al minimo tra $b/2$ ed h :	$c_{pe,A} = -0,80$
Restanti zone	$c_{pe,B} = \pm 0,20$

Coefficienti di pressione per coperture piane

Infine, i coefficienti di pressione interna, salvo analisi approfondite, valgono:

- $c_{pi} = +0,20$ Pressione interna positiva;
- $c_{pi} = -0,30$ Pressione interna negativa.

Come fatto in precedenza, calcoliamo il coefficiente di pressione netta c_p , per le due diverse condizioni di carico.

Superfici sopravento: $c_{p,w} = c_{pe,w} - c_{pi}$	\nearrow $0,75 - 0,20 = 0,55$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $0,75 - (-0,30) = 1,05$	<i>Depressione interna</i>
Superfici sottovento: $c_{p,l} = c_{pe,l} - c_{pi}$	\nearrow $-0,40 - 0,20 = -0,60$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-0,40 - (-0,30) = -0,10$	<i>Depressione interna</i>
Copertura – Zona A: $c_{p,r} = c_{pe,r} - c_{pi}$	\nearrow $-0,80 - 0,20 = -1,00$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-0,80 - (-0,30) = -0,50$	<i>Depressione interna</i>
Copertura – Zona B: $c_{p,r} = c_{pe,r} - c_{pi}$	\nearrow $-0,20 - 0,20 = -0,40$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-0,20 - (-0,30) = 0,10$	<i>Depressione interna</i>

Mantenendo costante la pressione cinetica di riferimento ed il coefficiente di esposizione, è possibile calcolare la pressione del vento mediante i coefficienti di pressione appena calcolati.

Superfici sopravento: $p_w = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,w}$	\nearrow $440 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $841 Pa$	<i>Depressione interna</i>
Superfici sottovento: $p_l = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,l}$	\nearrow $-480 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-320 Pa$	<i>Depressione interna</i>
Copertura – Zona A: $p_r = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,w}$	\nearrow $-801 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-400 Pa$	<i>Depressione interna</i>
Copertura – Zona B: $p_r = 490 \cdot 1,63 \cdot c_{p,w}$	\nearrow $440 Pa$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $80 Pa$	<i>Depressione interna</i>

Mediante i valori delle aree d'influenza in precedenza calcolati, è possibile calcolare l'entità delle forze nodali nel sistema locale. A tal fine, è importante rilevare che la zona A in copertura si estende interamente nell'area d'influenza del nodo 1.

Forza nodo 1 – Parete: $F_{1p} = A_{1p} \cdot p_w$	\nearrow $6606 N$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $12612 N$	<i>Depressione interna</i>
Forza nodo 1 – Copertura: $F_{1c} = A_{1c} \cdot p_r$	\nearrow $-24106 N$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-12053 N$	<i>Depressione interna</i>
Forza nodo 2 – Parete: $F_{2p} = A_{2p} \cdot p_l$	\nearrow $-6006 N$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $-1001 N$	<i>Depressione interna</i>
Forza nodo 2 – Copertura: $F_{2c} = A_{2c} \cdot p_r$	\nearrow $-9642 N$	<i>Sovrappressione interna</i>
	\searrow $2411 N$	<i>Depressione interna</i>

Le forze nodali nel globale V, N valgono:

$$F_{1H} = F_{1p} - F_{1c} \cdot \sin 4,76 \begin{cases} \nearrow 8607 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow 13612 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

$$F_{1V} = -F_{1c} \cdot \cos 4,76 \begin{cases} \nearrow 24023 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow 12011 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

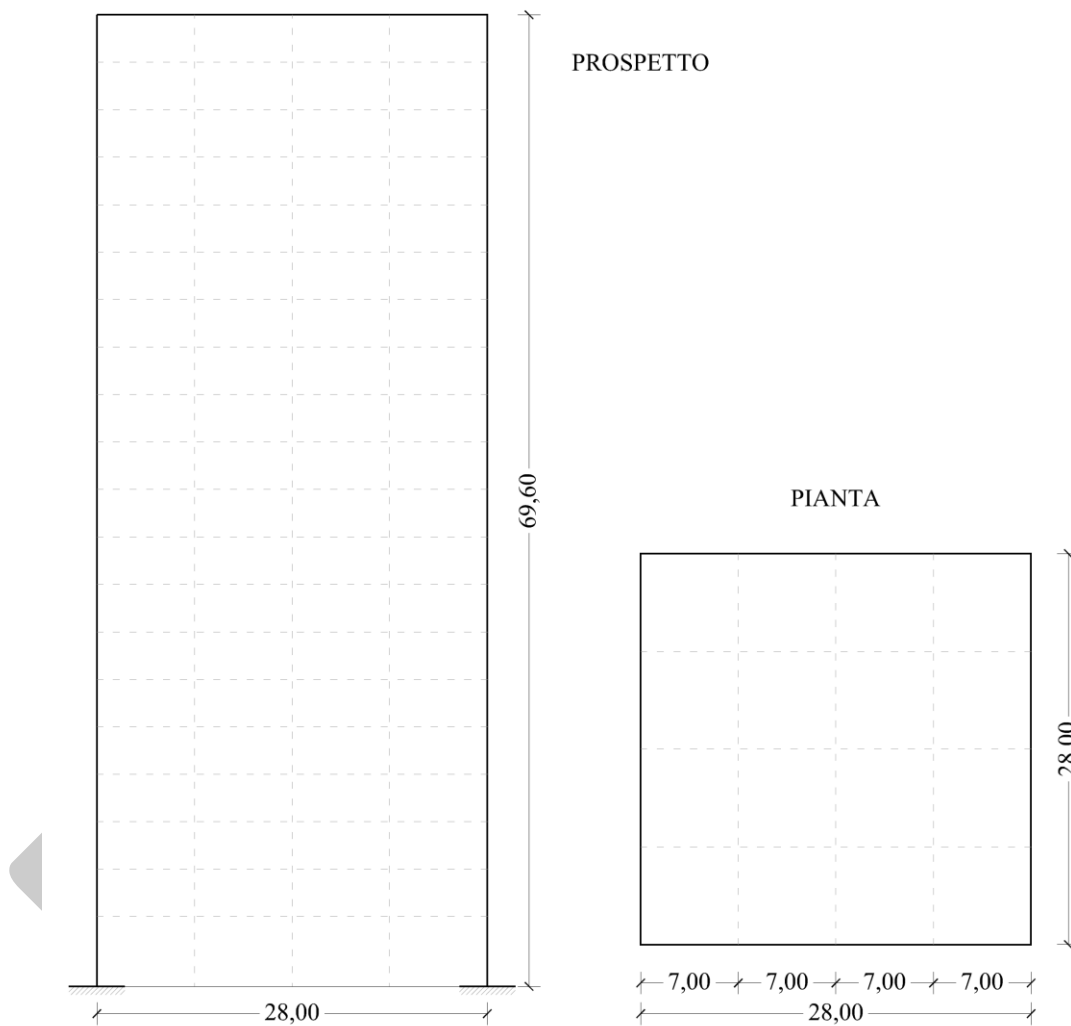
$$F_{2H} = F_{2p} - F_{2c} \cdot \sin 4,76 \begin{cases} \nearrow 6806 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow 801 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

$$F_{2V} = -F_{2c} \cdot \cos 4,76 \begin{cases} \nearrow 9609 N & \text{Sovrappressione interna} \\ \searrow -2402 N & \text{Depressione interna} \end{cases}$$

BOLZA

Esempio 2.3b: con riferimento alla struttura mostrata in figura, calcolare l'azione del vento ai sensi delle seguenti normative:

- D.M. del 14 gennaio 2008, “Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni” (NTC 2008);
- Circolare del 2 febbraio 2009, “Istruzioni per l'applicazione delle Nuove norme tecniche per le costruzioni” (Circ. 2009).



Edificio in oggetto

Il fabbricato a 20 piani f.t. mostrato in figura verrà realizzato in Abruzzo, ad una quota di circa 700 m s.l.m. e a circa 35 km dalla costa. La quota del primo impalcato è $z_1 = 5,00$ m, mentre l'interpiano per gli impalcati superiori è $\Delta z = 3,40$ m. La struttura è sorretta da pilastri posti a interasse costante $i = 7,00$ m.

In questo caso, la località di costruzione è compresa nella *zona 3*, i cui parametri caratteristici risultano essere:

$$v_{b,0} = 27 \text{ m/s}$$

$$a_0 = 500 \text{ m}$$

$$k_a = 0,0201/\text{s}$$

L'edificio sorgerà a quota $a_s = 700 \text{ m} > a_0$, per cui la velocità di riferimento è pari a:

$$v_b = v_{b,0} + k_a \cdot (a_s - a_0) = 31,4 \text{ m/s}$$

Come in precedenza, con tale valore, calcoliamo la pressione cinetica di riferimento:

$$q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 31,4^2 = 616 \text{ Pa}$$

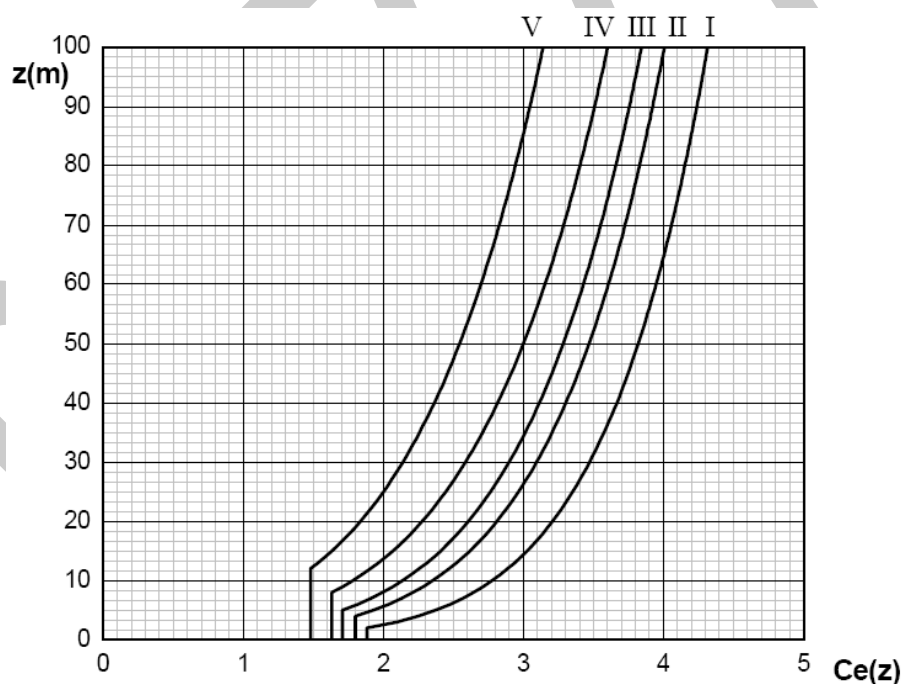
Dove $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'aria. Ai sensi delle NTC 2008, i coefficienti di pressione esterna c_{pe} valgono:

Per $\alpha = +90^\circ$, $c_{pe} = +0,80$ Superfici sopravento;

Per $\alpha = -90^\circ$, $c_{pe} = -0,40$ Superfici sottovento.

In questo caso è possibile trascurare il coefficiente di pressione in copertura e il coefficiente di pressione interna, limitando lo studio dell'azione del vento alle sole forze orizzontali.

Data l'elevata altezza dell'edificio, non è possibile definire un solo coefficiente di esposizione, ma è necessario calcolarlo in corrispondenza di ogni impalcato, poiché il coefficiente di esposizione varia sensibilmente con la quota.



Andamento del coefficiente di esposizione c_e con la quota

Come consuetudine, le pressioni del vento sono riportate come sollecitazione ai nodi, moltiplicando il valore della pressione per l'area d'influenza del nodo considerato.

Di seguito una tabella riporta i risultati dello studio dell'azione del vento:

- La prima colonna riporta i piani;
- La seconda colonna riporta le quote z_i dei vari impalcati;

- La terza colonna riporta i coefficienti di esposizione, calcolati per ogni z_i :

$$c_e(z_i) = k_r^2 \cdot c_t \cdot \ln\left(\frac{z_i}{z_0}\right) \cdot \left[7 + c_t \cdot \ln\left(\frac{z_i}{z_0}\right)\right]$$

- La quarta e quinta colonna riportano rispettivamente i valori della pressione sulle superfici sopravento e sottovento;

$$p(z_i) = q_b \cdot c_e(z_i) \cdot c_p$$

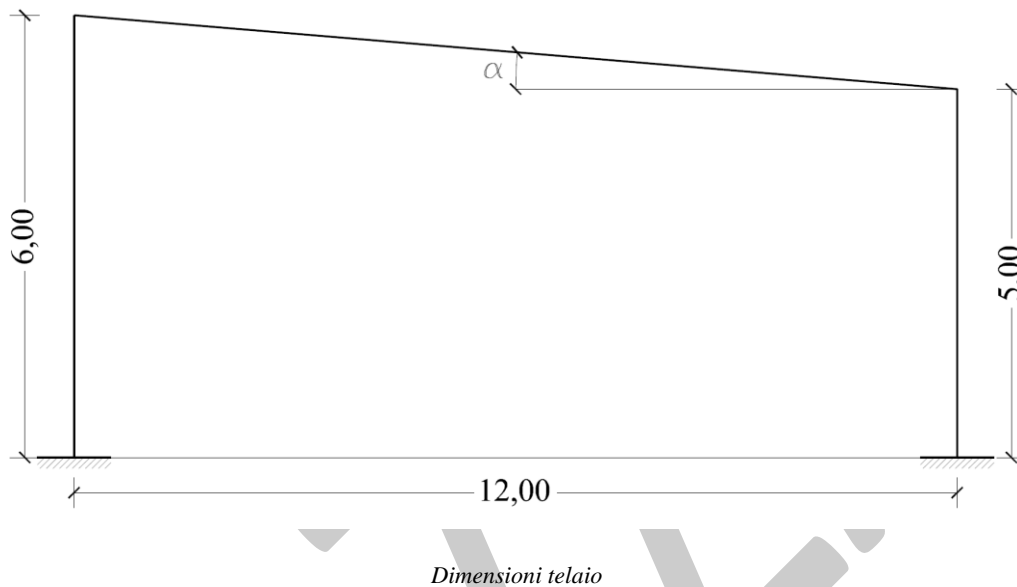
- La sesta e settima colonna riportano il valore delle forze nodali sopravento e sottovento.

$$F(z_i) = p(z_i) \cdot A = p(z_i) \cdot i \cdot \Delta z$$

Piani	z_i [m]	c_e [z_i]	p^+ [Pa]	p^- [Pa]	F^+ [N]	F^- [N]
1	5,00	1,71	841,77	-420,89	24748,18	-12374,09
2	8,40	2,03	998,74	-499,37	23769,90	-11884,95
3	11,80	2,25	1107,32	-553,66	26354,13	-13177,06
4	15,20	2,42	1191,17	-595,58	28349,81	-14174,91
5	18,60	2,56	1259,83	-629,92	29984,03	-14992,01
6	22,00	2,67	1318,16	-659,08	31372,25	-15686,12
7	25,40	2,78	1368,97	-684,49	32581,58	-16290,79
8	28,80	2,87	1414,06	-707,03	33654,65	-16827,32
9	32,20	2,95	1454,63	-727,32	34620,25	-17310,12
10	35,60	3,03	1491,55	-745,77	35498,82	-17749,41
11	39,00	3,09	1525,44	-762,72	36305,39	-18152,70
12	42,40	3,16	1556,78	-778,39	37051,36	-18525,68
13	45,80	3,22	1585,95	-792,97	37745,57	-18872,79
14	49,20	3,27	1613,24	-806,62	38395,05	-19197,53
15	52,60	3,32	1638,88	-819,44	39005,45	-19502,73
16	56,00	3,37	1663,08	-831,54	39581,41	-19790,71
17	59,40	3,42	1686,00	-843,00	40126,78	-20063,39
18	62,80	3,46	1707,76	-853,88	40644,78	-20322,39
19	66,20	3,51	1728,49	-864,25	41138,13	-20569,07
20	69,60	3,55	1748,29	-874,14	20804,60	-10402,30

Esempio 2.4: con riferimento all'edificio descritto nell'*esempio 2.3a*, calcolare il carico da neve ai sensi delle seguenti normative:

- D.M. del 14 gennaio 2008, "Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni" (NTC 2008);
- Circolare del 2 febbraio 2009, "Istruzioni per l'applicazione delle Nuove norme tecniche per le costruzioni" (Circ. 2009).



Il carico da neve che grava sulle coperture, può essere valutato mediante la seguente espressione:

$$q_s = \mu_i \cdot q_{sk} \cdot c_E \cdot c_t$$

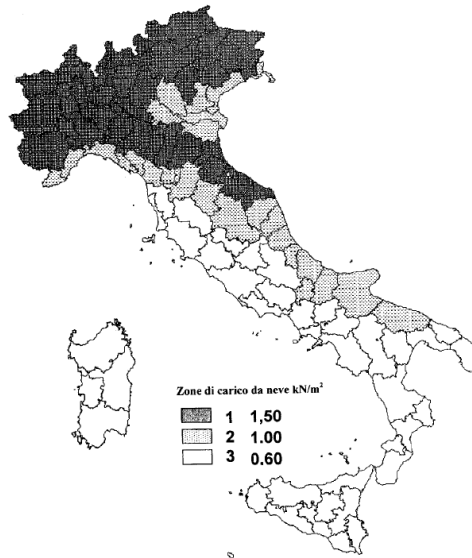
Dove:

- q_s è il carico da neve sulla copertura;
- μ_i è il coefficiente di forma della copertura;
- q_{sk} è il valore caratteristico della neve al suolo;
- c_E è il coefficiente d'esposizione;
- c_t è il coefficiente termico.

Il valore di q_{sk} dipende dalla zona e dalla quota del sito in cui sorgerà la struttura. Ipotizziamo di voler calcolare il carico da neve per una struttura che sarà realizzata a Reggio Calabria, a una quota $a_s = 180 \text{ m}$ s.l.m. circa. La località di costruzione dell'edificio ricade nella *zona 3*: il valore caratteristico della neve al suolo è:

$$q_{sk} = 0,60 \text{ kN} / \text{m}^2 \quad \text{per } a_s \leq 200,00 \text{ m}$$

$$q_{sk} = 0,51 \cdot \left[1 + \left(a_s / 481 \right)^2 \right] \quad \text{per } a_s > 200,00 \text{ m}$$



Mappa delle zone in cui è suddiviso il territorio italiano

Il coefficiente di esposizione può essere valutato attraverso le indicazioni della seguente tabella:

Topografia	Descrizione	C_E
Battuta dai venti	Aree pianeggianti non ostruite esposte su tutti i lati, senza costruzioni o alberi più alti.	0,9
Normale	Aree in cui non è presente una significativa rimozione di neve sulla costruzione prodotta dal vento, a causa del terreno, altre costruzioni o alberi.	1,0
Riparata	Aree in cui la costruzione considerata è sensibilmente più bassa del circostante terreno o circondata da costruzioni o alberi più alti	1,1

Coefficiente d'esposizione

In mancanza di studi specifici, c_E viene generalmente posto pari ad 1. Al pari del coefficiente d'esposizione, anche il coefficiente termico vale 1.

I coefficienti μ_i dipendono dalla forma della copertura. Per una copertura a una falda, il coefficiente di forma μ_1 della copertura è riportato nella seguente tabella, in funzione dell'inclinazione della falda:

Angolo di inclinazione della falda α	$0^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$	$30^\circ < \alpha < 60^\circ$	$\alpha \geq 60^\circ$
μ_1	0,8	$0,8(60 - \alpha)/30$	0,0
μ_2	$0,8 + 0,8 \alpha/30$	1,6	--

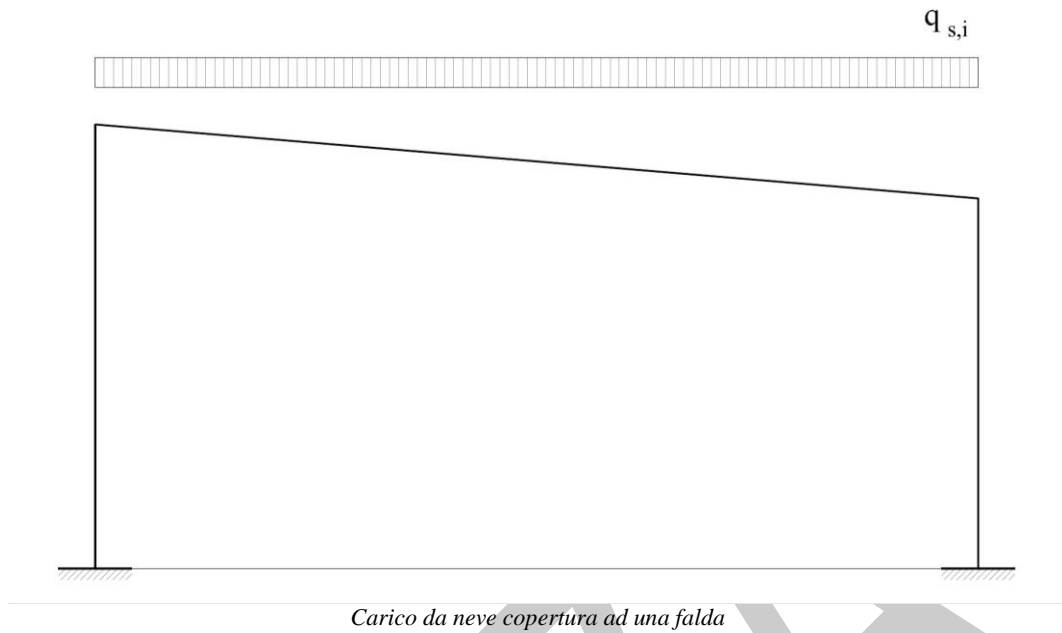
Coefficiente di forma

Il carico da neve, espresso in forza su unità di superficie, è:

$$q_s = 0,80 \cdot 0,60 \cdot 1 \cdot 1 = 0,48 \text{ kN} / \text{m}^2$$

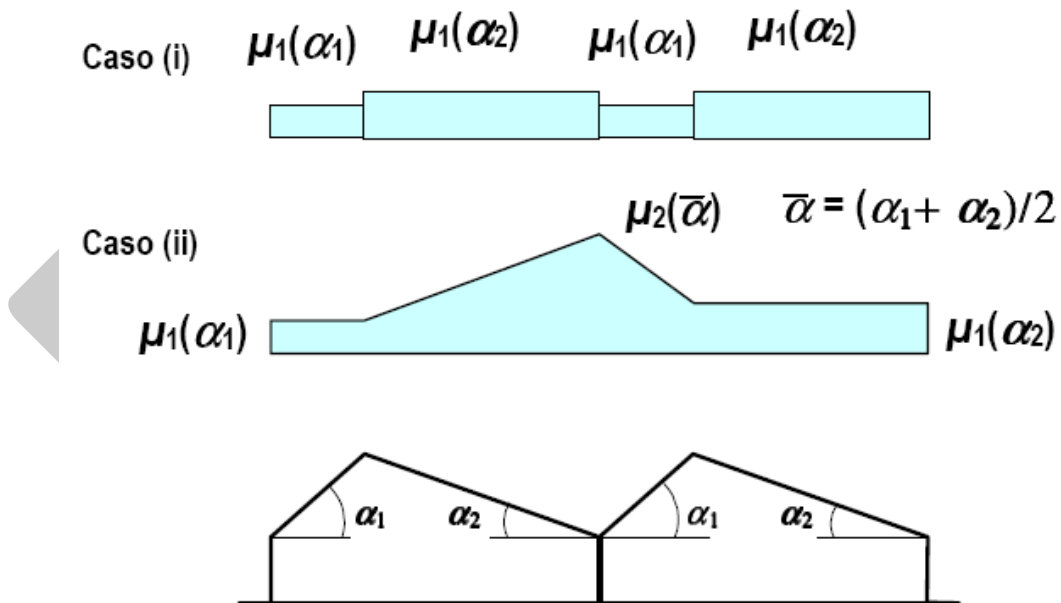
Se ipotizziamo un interasse costante pari a 5,00 m, il carico da neve per ogni telaio vale:

$$q_{s,i} = q_s \cdot i = 0,48 \cdot 5,00 = 2,40 \text{ kN} / \text{m}$$



Nel caso di coperture a più falde, è necessario considerare due diverse disposizioni di carico:

- Caso (i): neve in assenza di vento;
- Caso (ii): neve in presenza di vento.



I coefficienti di forma μ_1 e μ_2 sono riportati in tabella in tabella.

Esempio 3.1. Risolvere la seguente travatura reticolare applicando il metodo dell'equilibrio ai nodi.

Dati:

$$L = 2,00 \text{ m}$$

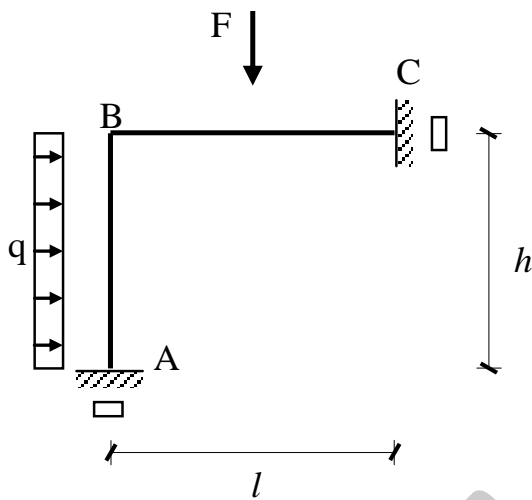
$$F_1 = 10 \text{ KN}$$

$$F_2 = 20 \text{ KN}$$

Sistema oggetto dello studio

BOZZA

Esempio 3.2: risolvere la seguente struttura applicando il metodo delle forze.



Dati:

- $l = 6,00 \text{ m}$
- $h = 5,00 \text{ m}$
- $E = 32600 \text{ MPa}$
- $q = 30 \text{ KN/m}$
- $F = 100 \text{ KN}$
- $B = 0,30 \text{ m}$
- $H_c = 0,60 \text{ m}$
- $H_t = 0,70 \text{ m}$

Sistema oggetto dello studio

Note le dimensioni in sezione di trave e pilastro, si possono calcolare:

- Per la colonna

$$I_p = \frac{B \cdot H_p^3}{12} = \frac{0,30 \cdot 0,60^3}{12} = 5,40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad EI_p = 176,0 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$$

- Per la trave

$$I_t = \frac{B \cdot H_t^3}{12} = \frac{0,30 \cdot 0,70^3}{12} = 8,57 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad EI_t = 279,5 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$$

A causa delle cerniere introdotte nella struttura, nasceranno delle rotazioni agli estremi della colonna e della trave.



Schemi statici di colonna e trave

Le rotazioni sono causate dai carichi applicati e dei momenti agli estremi, introdotti a causa delle cerniere.

Le rotazioni agli estremi del pilastro valgono:

$$\varphi_{A,q} = \frac{qh^3}{24(EI)_p} = 0,888 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \varphi_{B,q} = -\varphi_{A,q} = -0,888 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{A,M_A} = \frac{M_A h}{3(EI)_p} = (9,47 \cdot 10^{-3} M_A) \text{ rad} \quad \varphi_{B,M_A} = -\frac{M_A h}{6(EI)_p} = (-4,73 \cdot 10^{-3} M_B) \text{ rad}$$

$$\varphi_{A,M_B} = -\frac{M_B h}{6(EI)_p} = (-4,73 \cdot 10^{-3} M_B) \text{ rad} \quad \varphi_{B,M_B} = \frac{M_B h}{3(EI)_p} = (9,47 \cdot 10^{-3} M_B) \text{ rad}$$

Mentre, le rotazioni agli estremi della trave sono:

$$\varphi_{B,F} = \frac{Fl^2}{16(EI)_t} = 0,805 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \varphi_{C,F} = -\varphi_{B,F} = -0,805 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{B,M_B} = \frac{M_B l}{3(EI)_t} = (-7,15 \cdot 10^{-3} M_B) \text{ rad} \quad \varphi_{C,M_B} = \frac{M_B l}{6(EI)_t} = (3,58 \cdot 10^{-3} M_B) \text{ rad}$$

$$\varphi_{B,M_C} = -\frac{M_C l}{6(EI)_t} = (-3,58 \cdot 10^{-3} M_C) \text{ rad} \quad \varphi_{C,M_C} = \frac{M_C l}{3(EI)_t} = (7,15 \cdot 10^{-3} M_C) \text{ rad}$$

Per ripristinare la congruenza, è necessario scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \Delta\varphi_B = 0 \\ \varphi_C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_{A,q} + \varphi_{A,M_A} + \varphi_{A,M_B} = 0 \\ \varphi_{B,q} + \varphi_{B,M_A} + \varphi_{B,M_B} = \varphi_{B,F} + \varphi_{B,M_B} + \varphi_{B,M_C} \\ \varphi_{C,F} + \varphi_{C,M_B} + \varphi_{C,M_C} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo alle rotazioni i valori calcolati in precedenza otteniamo:

$$\begin{cases} 0,888 + 9,47M_A - 4,73M_B = 0 \\ -0,888 - 4,73M_A + 9,47M_B = 0,805 - 7,15M_A - 3,58M_C \\ 0,805 + 3,58M_B + 7,15M_C = 0 \end{cases}$$

Questo sistema di tre equazioni (di congruenza) in tre incognite (i momenti M_A , M_B e M_C), ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} M_B = 0,0676 MN \cdot m \\ M_A = -0,0602 MN \cdot m \\ M_C = 0,0787 MN \cdot m \end{cases}$$

La configurazione così ottenuta è equilibrata, ma non necessariamente congruente. Noti i momenti, possiamo calcolare le rotazioni:

$$\varphi_A = (0,888 - 9,47 \cdot 0,0602 - 4,73 \cdot 0,0676) \cdot 10^{-3} = -2,37 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\varphi_B^p = (-0,888 + 4,73 \cdot 0,0602 + 9,47 \cdot 0,0676) \cdot 10^{-3} = 3,74 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\varphi_B^t = (0,805 - 7,15 \cdot 0,0676 - 3,58 \cdot 0,0787) \cdot 10^{-3} = 3,97 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\Delta\varphi_B = -2,31 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\varphi_C = (-0,805 + 3,58 \cdot 0,0676 + 7,15 \cdot 0,0787) \cdot 10^{-3} = 0 \text{ rad}$$

La verifica di congruenza è soddisfatta.

Infine, è utile calcolare i momenti in mezzeria di trave e pilastro:

$$M_{AB} = -\frac{|M_A| + |M_B|}{2} + \frac{ql^2}{8} = 0,0299MN \cdot m$$

$$M_{BC} = -\frac{|M_B| + |M_C|}{2} + \frac{Fl}{4} = 0,0769MN \cdot m$$

Noti questi valori, è possibile tracciare il diagramma del momento flettente:

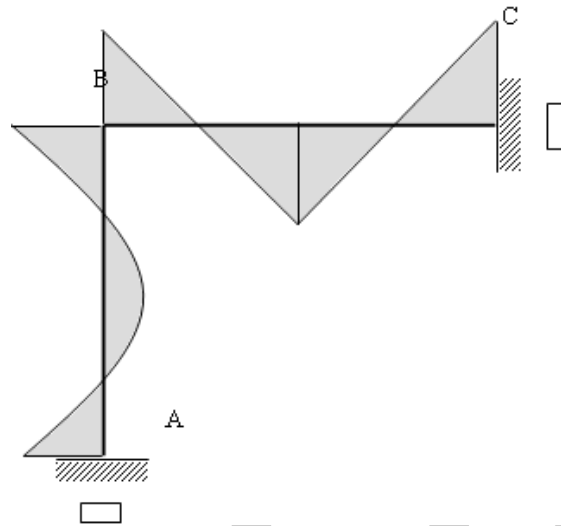
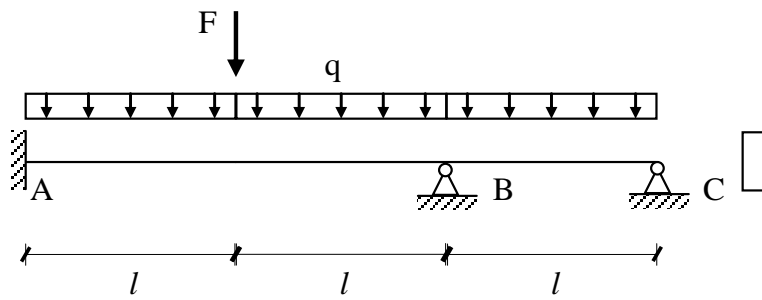


Diagramma del momento flettente

Esempio 3.3. Risolvere la seguente struttura applicando il metodo degli spostamenti.



Dati:

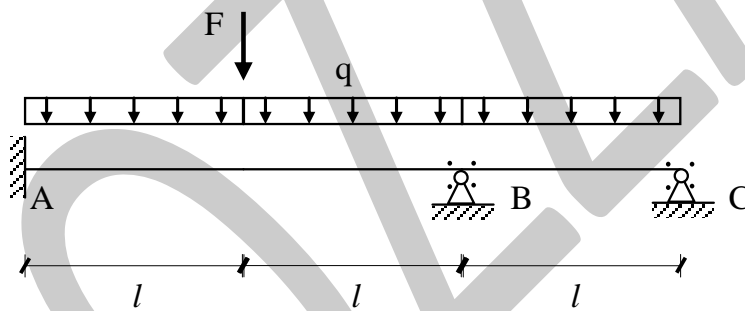
$$\begin{aligned}
 l &= 4,00 \text{ m} \\
 E &= 32600 \text{ MPa} \\
 q &= 40 \text{ KN/m} \\
 F &= 130 \text{ KN} \\
 B &= 0,30 \text{ m} \\
 H &= 0,70 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Sistema oggetto dello studio

Dai dati è possibile calcolare immediatamente I ed EI :

$$I = \frac{B \cdot H^3}{12} = \frac{0,30 \cdot 0,70^3}{12} = 8,57 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \qquad EI = 2795 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$$

Il sistema oggetto dello studio è un telaio a nodi fissi, per cui introduciamo solo dei morsetti per bloccare le rotazioni.



Schema statico con i morsetti

L'introduzione dei morsetti fa nascere dei momenti d'incastro perfetto nei punti B e C , tali momenti valgono:

$$\begin{aligned}
 M_B^{sx} &= -\frac{q(2l)^2}{12} - \frac{F(2l)}{8} - \varphi_B \frac{4EI}{(2l)} & M_B^{dx} &= -\frac{q(l)^2}{12} + \varphi_B \frac{4EI}{(l)} + \varphi_C \frac{2EI}{(l)} \\
 M_C &= -\frac{q(l)^2}{12} - \varphi_B \frac{2EI}{(l)} + \varphi_C \frac{4EI}{(l)}
 \end{aligned}$$

Per ripristinare l'equilibrio del sistema, scriviamo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \Delta M_B = 0 \\ M_C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{q(2l)^2}{12} - \frac{F(2l)}{8} - \varphi_B \frac{4EI}{(2l)} = -\frac{q(l)^2}{12} + \varphi_B \frac{4EI}{(l)} + \varphi_C \frac{2EI}{(l)} \\ -\frac{q(l)^2}{12} - \varphi_B \frac{2EI}{(l)} + \varphi_C \frac{4EI}{(l)} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema, possiamo scrivere la rotazione in C in funzione di quella in B:

$$\varphi_C = \frac{l}{4EI} \left[-\frac{ql^2}{12} - \varphi_B \frac{2EI}{l} \right] = -\frac{ql^3}{48EI} - \frac{1}{2} \varphi_B$$

Sostituendo questo risultato, ottengo un'equazione in un'unica incognita:

$$-\frac{q(2l)^2}{12} - \frac{F(2l)}{8} - \varphi_B \frac{4EI}{(2l)} = -\frac{q(l)^2}{12} + \varphi_B \frac{4EI}{(l)} + \left[-\frac{ql^3}{48EI} - \frac{1}{2} \varphi_B \right] \frac{2EI}{(l)}$$

Dalla quale ricavo la rotazione in B, e quindi in C:

$$\varphi_B = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI} - \frac{1}{20} \frac{Fl^2}{EI} = -0,754 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_C = -\frac{ql^3}{48EI} - \frac{1}{2} \varphi_B = 0,186 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

La soluzione è congruente, ma non equilibrata. Dalle rotazioni, calcoliamo i momenti:

$$M_B^{sx} = -\frac{q(2l)^2}{12} - \frac{F(2l)}{8} - \varphi_B \frac{4EI}{(2l)} = 0,238 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_B^{dx} = -\frac{q(l)^2}{12} + \varphi_B \frac{4EI}{(l)} + \varphi_C \frac{2EI}{(l)} = -0,238 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Infine, calcoliamo il momento in A e in corrispondenza della mezzzeria dei due tratti:

$$M_A = M_{A,q} + M_{A,F} + M_{A,\varphi_B} = -\frac{0,04 \cdot 4 \cdot 4^2}{12} - \frac{0,13 \cdot 2 \cdot 4}{8} - 0,754 \cdot 10^{-3} = -0,396 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AB} = -\frac{|M_A| + |M_B|}{2} + \frac{q(2l)^2}{8} + \frac{F(2l)}{4} = 0,263 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -\frac{M_B}{2} + \frac{q(l)^2}{8} = -0,039 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

Noti questi valori, è possibile tracciare il diagramma del momento flettente:

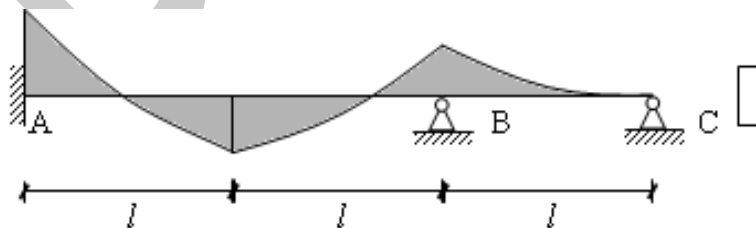
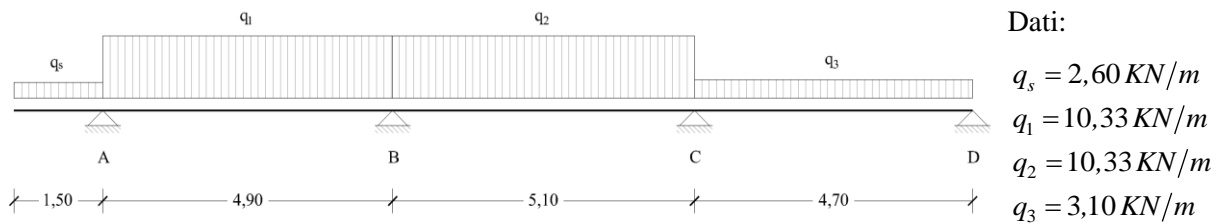


Diagramma del momento flettente

Esempio 3.4. Risolvere la seguente trave continua applicando il metodo di Hardy-Cross.



Dati:

$$\begin{aligned} q_s &= 2,60 \text{ KN/m} \\ q_1 &= 10,33 \text{ KN/m} \\ q_2 &= 10,33 \text{ KN/m} \\ q_3 &= 3,10 \text{ KN/m} \end{aligned}$$

Sistema oggetto dello studio

Le prime quantità da calcolare sono i coefficienti di ripartizione, i quali sono funzione della rigidezza dei vari tratti. Il tratto *AB* si considera come una trave appoggiata-incastata, per cui la rigidezza al nodo *B* vale:

$$w_{BA} = \frac{3EI}{l_{BA}} = \frac{3}{4,90} EI = 0,612 EI$$

Dove *EI* è il prodotto tra il modulo di Young e il momento d'inerzia della sezione, mentre *l_{BA}* è la luce della trave. Il tratto *BC* si considera come un'asta incastata-incastata, la sua rigidezza sarà:

$$w_{BC} = \frac{4EI}{l_{BC}} = \frac{4}{5,10} EI = 0,784 EI$$

Se la trave è a sezione costante ed è costituita dallo stesso materiale, i coefficienti di ripartizione saranno indipendenti da *EI*, infatti, il coefficiente di ripartizione da *B* ad *A* vale:

$$k_{BA} = \frac{w_{BA}}{w_{BA} + w_{BC}} = \left(\frac{0,612}{0,612 + 0,784} \right) \left(\frac{EI}{EI} \right) = 0,438$$

Mentre il coefficiente da *B* a *C* vale:

$$k_{BC} = \frac{w_{BC}}{w_{BA} + w_{BC}} = \left(\frac{0,784}{0,612 + 0,784} \right) \left(\frac{EI}{EI} \right) = 0,562$$

Si può facilmente verificare che la somma dei coefficienti di ripartizione deve dare 1. Per calcolare i coefficienti di ripartizione *k_{CB}* e *k_{CD}* è necessario calcolare la rigidezza del tratto finale *CD*:

$$w_{CD} = \frac{3EI}{l_{CD}} = \frac{3}{4,70} EI = 0,638 EI$$

La rigidezza *w_{CB}* è ovviamente pari a 0,784 *EI*. I coefficienti di ripartizione valgono quindi:

$$k_{CB} = \frac{w_{CB}}{w_{CB} + w_{CD}} = 0,551 \qquad k_{BC} = \frac{w_{CD}}{w_{CB} + w_{CD}} = 0,449$$

Un altro parametro da considerare è il coefficiente di trasporto dei momenti, questo tiene conto l'effetto che un momento applicato a un estremo della trave, ha sull'altro: tale coefficiente in questo caso vale 0,5.

Per applicare il metodo di Cross è necessario calcolare i momenti d'incastro perfetto che si generano a causa dell'introduzione dei morsetti in corrispondenza degli appoggi.

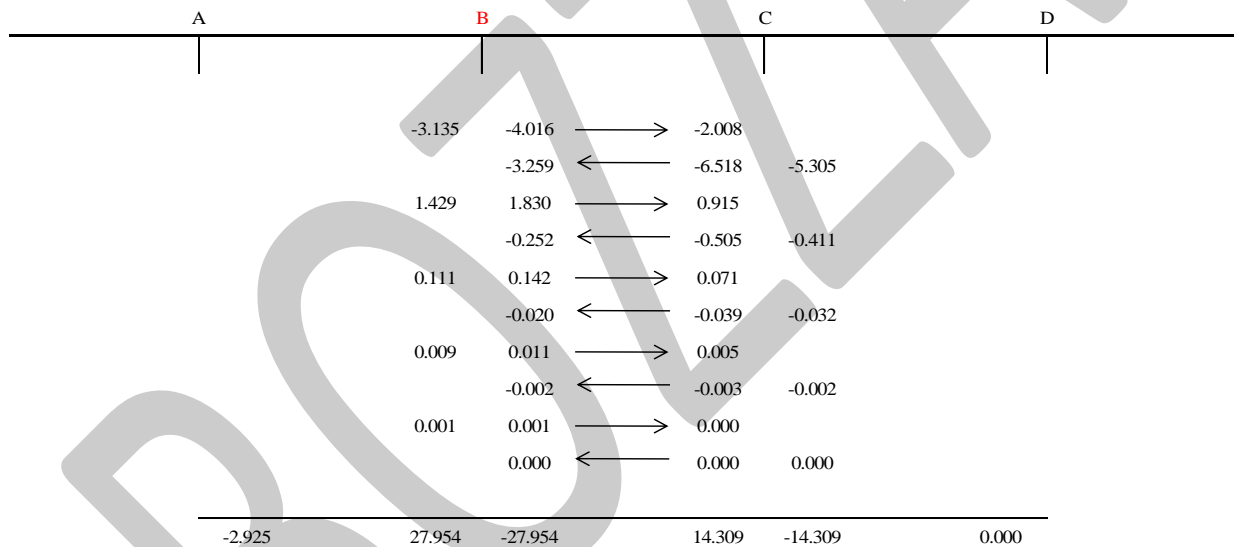
$$\mu_{BA} = -0,5 \frac{q_s l_s^2}{2} + \frac{q_{BA} l_{BA}^2}{8} = +29,540 \text{ KN m}$$

$$\mu_{BC} = -\frac{q_{BC} l_{BC}^2}{12} = -22,390 \text{ KN m}$$

$$\mu_{CB} = +\frac{q_{BC} l_{BC}^2}{12} = +22,390 \text{ KN m}$$

$$\mu_{CD} = -\frac{q_{CD} l_{DC}^2}{8} = -8,560 \text{ KN m}$$

Rimossi i morsetti, gli appoggi non sono equilibrati. Tale squilibrio va ripartito, grazie ai coefficienti di ripartizione, tra tutte le aste che concorrono nel nodo. Facendo più iterazioni, è possibile arrivare a equilibrare l'intera struttura:



In questo esempio siamo partiti dall'equilibrio del nodo B (il pedice *l* sta per prima iterazione):

$$\Delta M_{B1} = \mu_{BA} + \mu_{BC}$$

Tale momento di squilibrio va cambiato di segno, e quindi ripartito tra le travi BA e BC attraverso i coefficienti:

$$\Delta M_{BA1} = -\Delta M_{B1} \cdot k_{BA} = -3,135 \text{ KN m}$$

$$\Delta M_{BC1} = -\Delta M_{B1} \cdot k_{BC} = -4,016 \text{ KN m}$$

Così facendo, abbiamo ripartito lo squilibrio ΔM_{B1} . Il momento ΔM_{BC1} influenza l'equilibrio del nodo C, per cui va tenuto in conto nell'equilibrio:

$$\Delta M_{C1} = \mu_{CB} + \mu_{CD} + 0,5 \cdot \Delta M_{B1}$$

Nuovamente questo momento andrà ripartito tra i tratti CB e CD :

$$\Delta M_{CB2} = -\Delta M_{C1} \cdot k_{CB} = -6,518 \text{ KN m}$$

$$\Delta M_{CD2} = -\Delta M_{C1} \cdot k_{CD} = -5,305 \text{ KN m}$$

Il procedimento si ripete finché il momento squilibrante diventa modesto. La configurazione così determinata risulta equilibrata ma non congruente, per cui per valutare la bontà dei risultati è necessario effettuare la verifica di congruenza delle rotazioni sugli appoggi:

$$\varphi_{B,sx} = \varphi_{B,dx}$$

$$\varphi_{C,sx} = \varphi_{C,dx}$$

Le rotazioni a destra e a sinistra degli appoggi possono essere calcolate, per sovrapposizione degli effetti, come somma delle rotazioni dovute ai carichi in campata e dei momenti agli estremi:

$$\varphi_{B,sx} = \frac{1}{EI} \left[-0,5 \frac{M_s l_{AB}}{3} - \frac{q_{AB} l_{AB}^3}{24} + \frac{M_B l_{AB}}{3} \right] = -\frac{2,591}{EI}$$

$$\varphi_{B,dx} = \frac{1}{EI} \left[-0,5 \frac{M_C l_{BC}}{3} + \frac{q_{BC} l_{BC}^3}{24} + \frac{M_B l_{BC}}{3} \right] = -\frac{2,591}{EI}$$

La verifica risulta soddisfatta. Noti i momenti alle estremità di ogni tratto, è possibile calcolare il momento in mezzeria, e quindi tracciare il diagramma del momento flettente.

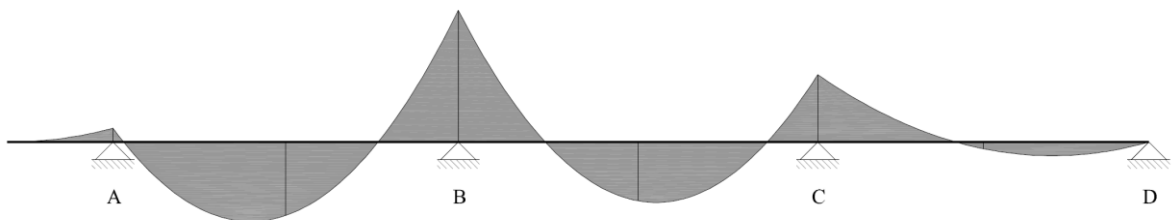
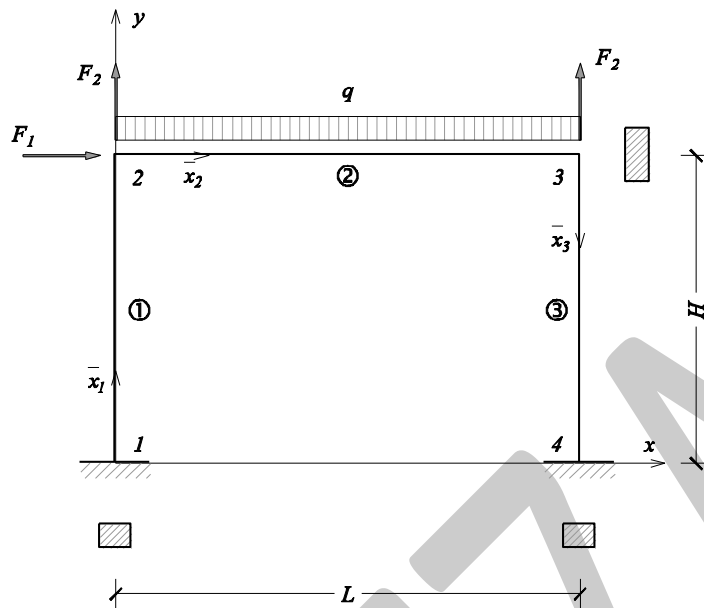


Diagramma del momento flettente

Esempio 3.5. Con riferimento allo schema statico riportato in figura, calcolare le caratteristiche della sollecitazione applicando il metodo matriciale.



Dati:

$$L = 6,00 \text{ m}$$

$$H = 4,00 \text{ m}$$

$$b_t = 0,30 \text{ m}$$

$$h_t = 0,70 \text{ m}$$

$$b_p = 0,30 \text{ m}$$

$$h_p = 0,40 \text{ m}$$

$$E = 31,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$q = 40,0 \text{ KN/m}$$

$$F_1 = 150 \text{ KN}$$

$$F_2 = 30 \text{ KN}$$

Sistema oggetto dello studio

Note le dimensioni delle sezioni e il modulo di Young, si possono calcolare le caratteristiche meccaniche di trave e pilastri:

- Per i pilastri

$$(EI)_p = E \cdot \frac{b_p \cdot h_p^3}{12} = \frac{0,30 \cdot 0,40^3}{12} = 52,2 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$$

$$\rho_p^2 = \frac{I_p}{A_p} = \frac{b_p \cdot h_p^3}{12} \cdot \frac{1}{b_p \cdot h_p} = \frac{h_p^2}{12} = \frac{0,40^2}{12} = 0,0133 \text{ m}^2$$

- Per la trave

$$(EI)_t = E \cdot \frac{b_t \cdot h_t^3}{12} = \frac{0,30 \cdot 0,70^3}{12} = 279,5 \text{ MN} \cdot \text{m}^2$$

$$\rho_t^2 = \frac{I_t}{A_t} = \frac{b_t \cdot h_t^3}{12} \cdot \frac{1}{b_t \cdot h_t} = \frac{h_t^2}{12} = \frac{0,70^2}{12} = 0,0408 \text{ m}^2$$

Noto il valore del raggio d'inerzia ρ , possiamo esprimere la rigidezza assiale di ogni asta in funzione della sua rigidezza flessionale:

$$\frac{EA}{l} = \frac{EI}{\rho^2 \cdot l}$$

Andiamo quindi ad assemblare la matrice di rigidezza dell'intera struttura. Per facilitare tale operazione conviene scrivere le matrici di rigidezza di ogni asta (che ha dimensioni 6×6) come una matrice 2×2 di

sottomatrici 3×3:

$$K_{12} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{34} = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

Come accennato in precedenza, questa notazione ci consente di assemblare la matrice di rigidezza della struttura più rapidamente. Osserviamo che:

- Il posto 1,1 della matrice di rigidezza K contiene le rigidezze che nascono nel nodo 1 a causa di spostamenti del nodo 1, e quindi è occupato da k_{11} della matrice di rigidezza K_{12} del pilastro 1;
- Il posto 2,2 contiene le rigidezze che nascono nel nodo 2 a causa di spostamenti del nodo 2, ed è occupato dalla somma tra la k_{22} del pilastro 1 e la matrice k_{22} della trave;
- Il posto 3,1 è vuoto (cioè occupato da una matrice nulla) poiché non c'è un elemento strutturale che collega il nodo 3 al nodo 1.

Procedendo in tale maniera, è possibile scrivere la matrice di rigidezza K :

$$K = \begin{bmatrix} \boxed{k_{11}} & \boxed{k_{12}} & & & \\ \boxed{k_{21}} & \boxed{k_{22}} + \boxed{k_{22}} & \boxed{k_{23}} & & \\ & & \boxed{k_{32}} & \boxed{k_{33}} + \boxed{k_{33}} & \boxed{k_{34}} \\ & & & \boxed{k_{43}} & \boxed{k_{44}} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che le incognite del problema sono gli spostamenti dei nodi. In particolare, il nodo 1 e 4 sono incastrati al suolo per cui le loro componenti di spostamento sono nulle:

$$u_1 = 0; \quad v_1 = 0; \quad \varphi_1 = 0$$

$$u_4 = 0; \quad v_4 = 0; \quad \varphi_4 = 0$$

Per tener in conto tali condizioni di vincolo, eliminiamo le righe e le colonne della matrice di rigidezza corrispondenti alle equazioni di equilibrio che hanno come incognite gli spostamenti del nodo 1 e 4. La matrice di rigidezza K si riduce a una matrice 2×2 di sottomatrici 3×3:

$$K = \begin{bmatrix} \boxed{k_{22}} + \boxed{k_{22}} & \boxed{k_{23}} \\ \boxed{k_{32}} & \boxed{k_{33}} + \boxed{k_{33}} \end{bmatrix}$$

Definiamo in dettaglio ogni elemento che compone la matrice di rigidezza. Dell'asta 1 è necessario solo l'elemento k_{22} : nel sistema locale dell'asta tale elemento è dato dalla seguente matrice:

$$\bar{k}_{22} = (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{H^3} & \frac{6}{H^2} \\ 0 & \frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix}$$

Prima di sommare l'elemento k_{22} agli altri, è necessario proiettarlo nel sistema di riferimento globale della struttura. L'asta 1 è ruotata di un angolo $\gamma = -90^\circ$, calcoliamo quindi la matrice di rotazione α per quest'angolo:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grazie alla matrice α , è possibile proiettare l'intera matrice di rigidezza del pilastro nel sistema globale:

$$K_{12} = \beta \cdot \bar{K}_{12} \cdot \beta^T$$

Ancora una volta, possiamo scrivere i termini di questa equazione matriciale come matrici 2×2 di sottomatrici 3×3 :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^T & 0 \\ 0 & \alpha^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \bar{k}_{11} & \alpha \cdot \bar{k}_{12} \\ \alpha \cdot \bar{k}_{21} & \alpha \cdot \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^T & 0 \\ 0 & \alpha^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \bar{k}_{11} \cdot \alpha^T & \alpha \cdot \bar{k}_{12} \cdot \alpha^T \\ \alpha \cdot \bar{k}_{21} \cdot \alpha^T & \alpha \cdot \bar{k}_{22} \cdot \alpha^T \end{bmatrix}$$

Prendiamo solo la parte interessata:

$$k_{22} = \alpha \cdot \bar{k}_{22} \cdot \alpha^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{H^3} & \frac{6}{H^2} \\ 0 & \frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{H^3} & -\frac{6}{H^2} \\ \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} -\frac{12}{H^3} & 0 & -\frac{6}{H^2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 \\ -\frac{6}{H^2} & 0 & \frac{4}{H} \end{bmatrix}$$

La medesima procedura va ripetuta per le altre aste che compongono il telaio. In particolare, il riferimento locale della trave coincide al sistema di riferimento globale ($\gamma = 0^\circ$), di conseguenza la matrice di rigidezza della trave scritta nel sistema di riferimento locale coincide con la matrice scritta nel riferimento globale:

$$K_{23} = \bar{K}_{23}$$

Quindi la matrice dell'asta 2 risulta essere:

$$\bar{K}_{23} = (EI)_t \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{1}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

Dell'asta 3 è necessario solo l'elemento k_{33} , inoltre tale asta è ruotata di 90° rispetto al riferimento globale.

Come fatto per l'asta 1, è necessario proiettare la matrice scritta nel sistema locale nel sistema globale:

$$\bar{k}_{33} = (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{H^3} & -\frac{6}{H^2} \\ 0 & -\frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione vale:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grazie a questa, è possibile proiettare la matrice nel sistema globale:

$$k_{33} = \alpha \cdot \bar{k}_{33} \cdot \alpha^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{H^3} & -\frac{6}{H^2} \\ 0 & -\frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$k_{22} = (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{H^3} & -\frac{6}{H^2} \\ -\frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{H^3} & 0 & -\frac{6}{H^2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 \\ -\frac{6}{H^2} & 0 & \frac{4}{H} \end{bmatrix}$$

Una volta scritti tutti gli elementi nel sistema globale, è possibile sommarli e quindi scrivere la matrice di rigidezza dell'intera struttura:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12(EI)_p}{H^3} + \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & -\frac{6(EI)_p}{H^2} & \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(EI)_p}{\rho_p^2 \cdot H} + \frac{12(EI)_t}{L^3} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & -\frac{12(EI)_t}{L^3} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6(EI)_p}{H^2} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{4(EI)_p}{H} + \frac{4(EI)_t}{L} & 0 & \frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{2(EI)_t}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & -\frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & \frac{12(EI)_p}{H^3} + \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & -\frac{6(EI)_p}{H^2} \\ 0 & -\frac{12(EI)_t}{L^3} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & \frac{(EI)_p}{\rho_p^2 \cdot H} + \frac{12(EI)_t}{L^3} & \frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & \frac{6(EI)_p}{H^2} & 0 \\ 0 & \frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{2(EI)_t}{L} & 0 & \frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{2(EI)_t}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & -\frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & \frac{12(EI)_p}{H^3} + \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & -\frac{6(EI)_p}{H^2} \\ 0 & -\frac{12(EI)_t}{L^3} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & \frac{(EI)_p}{\rho_p^2 \cdot H} + \frac{12(EI)_t}{L^3} & \frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & \frac{6(EI)_p}{H^2} & 0 \\ 0 & \frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{2(EI)_t}{L} & 0 & \frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{2(EI)_t}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12(EI)_p}{H^3} + \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & -\frac{6(EI)_p}{H^2} & \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & 0 & \frac{12(EI)_p}{H^3} + \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} & 0 & -\frac{6(EI)_p}{H^2} \\ 0 & \frac{(EI)_p}{\rho_p^2 \cdot H} + \frac{12(EI)_t}{L^3} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & \frac{(EI)_p}{\rho_p^2 \cdot H} + \frac{12(EI)_t}{L^3} & \frac{6(EI)_t}{L^2} & 0 & \frac{6(EI)_p}{H^2} & 0 \\ -\frac{6(EI)_p}{H^2} & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{4(EI)_p}{H} + \frac{4(EI)_t}{L} & 0 & -\frac{6(EI)_t}{L^2} & \frac{2(EI)_t}{L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo quindi tutte le rigidezze che compaiono nella matrice:

$$\frac{12(EI)_p}{H^3} = \frac{12 \cdot 52,2}{4,00^3} = 9,79$$

$$\frac{12(EI)_t}{L^3} = \frac{12 \cdot 279,5}{6,00^3} = 15,53$$

$$\frac{6(EI)_p}{H^2} = \frac{6 \cdot 52,2}{4,00^2} = 19,57$$

$$\frac{6(EI)_t}{L^2} = \frac{6 \cdot 279,5}{6,00^2} = 46,58$$

$$\frac{4(EI)_p}{H} = \frac{4 \cdot 52,2}{4,00} = 52,20$$

$$\frac{4(EI)_t}{L} = \frac{4 \cdot 279,5}{6,00} = 186,30$$

$$\frac{2(EI)_p}{H} = \frac{2 \cdot 52,2}{4,00} = 26,10$$

$$\frac{2(EI)_t}{L} = \frac{2 \cdot 279,5}{6,00} = 93,10$$

$$\frac{(EA)_p}{H} = \frac{(EI)_p}{\rho_p^2 \cdot H} = \frac{52,2}{0,0133 \cdot 4,00} = 981,20$$

$$\frac{(EA)_t}{L} = \frac{(EI)_t}{\rho_t^2 \cdot L} = \frac{279,5}{0,0408 \cdot 6,00} = 1141,75$$

Sommando opportunamente le rigidezze, otteniamo:

$$K = \begin{bmatrix} 1151,5 & 0 & -19,57 & -1141,75 & 0 & 0 \\ 0 & 996,73 & -46,58 & 0 & -15,53 & -46,58 \\ -19,57 & -46,58 & 238,50 & 0 & 46,58 & 93,10 \\ -1141,75 & 0 & 0 & 1151,5 & 0 & -19,57 \\ 0 & -15,53 & 46,58 & 0 & 996,73 & 46,58 \\ 0 & -46,58 & 93,10 & -19,57 & 46,58 & 238,50 \end{bmatrix}$$

Adesso passiamo a definire il vettore dei carichi F . Questo sarà calcolato come somma tra le azioni direttamente applicate ai nodi F_0 , e i carichi trasmessi dalle aste ai nodi come reazioni vincolari F^* .

Carichi nodali:

$$f_{2x} = F_1$$

$$f_{2y} = F_2$$

$$m_2 = 0$$

$$f_{3x} = 0$$

$$f_{3y} = F_2$$

$$m_3 = 0$$

Reazioni vincolari:

$$f_{2x}^* = 0$$

$$f_{2y}^* = -\frac{q \cdot L}{2}$$

$$m_2^* = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

$$f_{3x}^* = 0$$

$$f_{3y}^* = -\frac{q \cdot L}{2}$$

$$m_3^* = -\frac{q \cdot L^2}{12}$$

Il vettore dei carichi nodali e quello delle reazioni vincolari sono rispettivamente:

$$F_0 = [0,15 \quad 0,03 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0,03 \quad 0]^T$$

$$F^* = [0 \quad -0,12 \quad 0,12 \quad | \quad 0 \quad -0,12 \quad -0,12]^T$$

Come accennato, la somma di F_0 e F^* fornisce il vettore dei carichi totali:

$$F = F_0 + F^* = [0,15 \quad -0,09 \quad 0,12 \quad | \quad 0 \quad -0,09 \quad -0,12]^T$$

Noti la matrice di rigidezza e il vettore dei carichi, è possibile risolvere il sistema e calcolare gli spostamenti globali della struttura:

$$F = K \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = K^{-1} \cdot F$$

Il risultato di tale operazione è:

$$x = [8,765 \quad -0,043 \quad 1,359 \quad | \quad 8,685 \quad -0,141 \quad -0,303]^T \cdot 10^{-3}$$

Per calcolare le caratteristiche della sollecitazione, calcoliamo il vettore degli spostamenti locali di ogni asta a partire da quello degli spostamenti globali:

- Asta 1:

$$x_{12} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 8,765 \quad -0,043 \quad 1,359]^T \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{x}_{12} = \beta^T \cdot x_{12} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -0,043 \quad -8,765 \quad 1,359]^T \cdot 10^{-3}$$

- Asta 2:

$$\bar{x}_{23} = x_{23} = [8,765 \quad -0,043 \quad 1,359 \quad | \quad 8,685 \quad -0,141 \quad -0,303]^T \cdot 10^{-3}$$

- Asta 3:

$$x_{34} = [8,685 \quad -0,141 \quad -0,303 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \cdot 10^{-3}$$

$$\bar{x}_{34} = \beta^T \cdot x_{34} = [0,141 \quad 8,685 \quad -0,303 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \cdot 10^{-3}$$

Noti gli spostamenti locali di ogni asta, è possibile calcolare le forze che nascono agli estremi, moltiplicando gli spostamenti per le rigidezze. Partiamo dall'asta 3:

$$\bar{F}_{34} = \bar{K}_{34} \cdot \bar{x}_{34} = (EI)_p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{H^3} & -\frac{6}{H^2} & | & 0 & -\frac{12}{H^3} & -\frac{6}{H^2} \\ 0 & -\frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} & | & 0 & \frac{6}{H^2} & \frac{2}{H} \\ \hline -\frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 & | & \frac{1}{\rho_p^2 \cdot H} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{H^3} & \frac{6}{H^2} & | & 0 & \frac{12}{H^3} & \frac{6}{H^2} \\ 0 & -\frac{6}{H^2} & \frac{2}{H} & | & 0 & \frac{6}{H^2} & \frac{4}{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,141 \\ 8,685 \\ -0,303 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Il risultato di tale prodotto è:

$$\bar{F}_{34} = [137,7 \quad 909 \quad -185,7 \quad | \quad -137,7 \quad -909 \quad -177,8]^T \cdot 10^{-3}$$

Da qui possiamo calcolare le caratteristiche della sollecitazione agli estremi dell'asta:

$$\begin{aligned} N_3 &= -\bar{f}_{3x} = -0,138 \text{ MN} & N_4 &= \bar{f}_{4x} = -0,138 \text{ MN} \\ T_3 &= \bar{f}_{3y} = 0,091 \text{ MN} & T_4 &= -\bar{f}_{4y} = 0,091 \text{ MN} \\ M_3 &= \bar{m}_3 = -0,186 \text{ MN} \cdot m & M_4 &= -\bar{m}_4 = 0,178 \text{ MN} \cdot m \end{aligned}$$

I segni servono a tenere in conto la differenza di convenzione tra le forze e le caratteristiche della sollecitazione. Passiamo all'asta 2:

$$\bar{F}_{23} = \bar{K}_{23} \cdot \bar{x}_{23} = (EI)_i \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_i^2 \cdot L} & 0 & 0 & | & -\frac{1}{\rho_i^2 \cdot L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & | & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & | & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \hline \frac{1}{\rho_i^2 \cdot L} & 0 & 0 & | & \frac{1}{\rho_i^2 \cdot L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & | & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & | & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8,765 \\ -0,043 \\ 1,359 \\ 8,685 \\ -0,141 \\ -0,303 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Il risultato è:

$$\bar{F}_{23} = [90,86 \quad -47,7 \quad 220,5 \quad | \quad -90,86 \quad 47,7 \quad 65,68]^T \cdot 10^{-3}$$

Dato che l'asta 2 è soggetta ad un carico distribuito, per definire le caratteristiche della sollecitazione è necessario tenere in conto il contributo azioni trasmesse dall'asta ai nodi:

$$\begin{aligned} N_2 &= -\bar{f}_{2x} = -0,091 \text{ MN} & N_3 &= \bar{f}_{3x} = -0,091 \text{ MN} \\ T_2 &= \bar{f}_{2y} + \frac{q \cdot L}{2} = 0,0723 \text{ MN} & T_3 &= -\bar{f}_{3y} - \frac{q \cdot L}{2} = 0,168 \text{ MN} \\ M_2 &= \bar{m}_2 - \frac{q \cdot L^2}{12} = -0,100 \text{ MN} \cdot m & M_3 &= -\bar{m}_3 - \frac{q \cdot L^2}{12} = -0,186 \text{ MN} \cdot m \end{aligned}$$

Infine l'asta 1:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{12} &= \bar{K}_{12} \cdot \bar{x}_{12} = \bar{K}_{12} \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad -0,043 \quad -8,765 \quad 1,359]^T \cdot 10^{-3} = \\ &= [42,3 \quad 59,1 \quad 136 \quad | \quad -42,3 \quad -59,1 \quad -100,5]^T \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Le caratteristiche della sollecitazione valgono:

$$N_1 = -\bar{f}_{1x} = -0,0432 \text{ MN}$$

$$N_2 = \bar{f}_{2x} = -0,0432 \text{ MN}$$

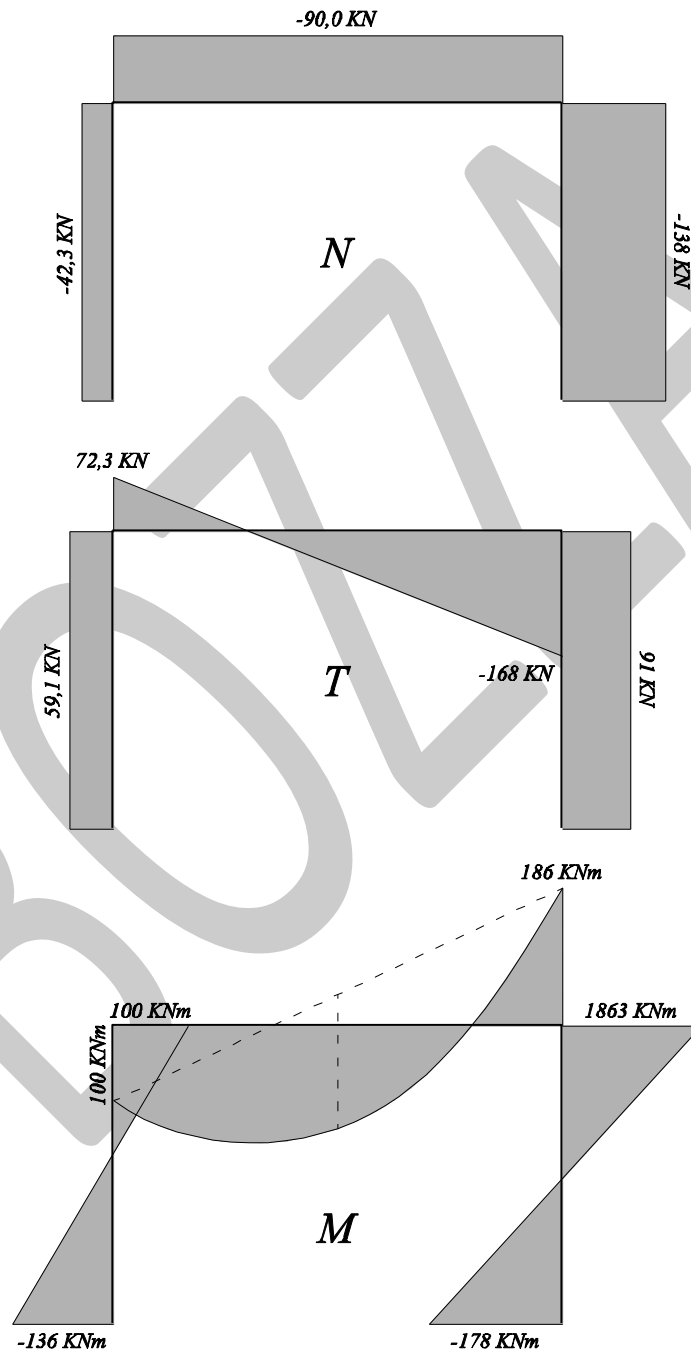
$$T_1 = \bar{f}_{1y} = 0,0591 \text{ MN}$$

$$T_2 = -\bar{f}_{2y} = 0,0591 \text{ MN}$$

$$M_1 = \bar{m}_2 = -0,136 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

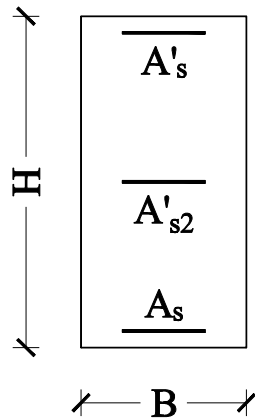
$$M_3 = -\bar{m}_3 = 0,100 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

La seguente figura mostra gli andamenti di sforzo normale N , taglio T e momento flettente M :



Caratteristiche della sollecitazione

Esempio 4.1: effettuare la verifica alle TE delle seguente sezione in c.a. uniformemente compressa.



Dati:

$$B = 0,40 \text{ m}$$

$$H = 0,60 \text{ m}$$

$$A_s = A'_s = 15,20 \text{ cm}^2 (4\phi 22)$$

$$A'_{s2} = 5,09 \text{ cm}^2 (2\phi 18)$$

$$f_{ck} = 33,2 \text{ MPa} (C32 / 40)$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$N_{Ed} = -5 \text{ MN}$$

Sezione oggetto dello studio

La verifica alla TE si conduce confrontando le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio con le tensioni limite imposte dalla normativa.

$$\sigma_c < 0,60 \cdot f_{ck} \quad \text{Per combinazione dei carichi rara}$$

$$\sigma_c < 0,45 \cdot f_{ck} \quad \text{Per combinazione dei carichi semipermanente}$$

$$\sigma_s < 0,8 \cdot f_{yk} \quad \text{Per qualsiasi combinazione}$$

La sezione è uniformemente compressa e quindi non parzializzata. In queste condizioni è possibile calcolare facilmente l'area di calcestruzzo della sezione ideale.

$$A_{ci} = A_c + n \cdot A_{s,tot} = B \cdot H + n \cdot (A_s + A'_s + A'_{s2}) = 0,40 \cdot 0,60 + 15 \cdot (15,20 + 15,20 + 5,09) \cdot 10^{-4} = 0,293 \text{ m}^2$$

Nota l'area, è possibile calcolare la tensione nel calcestruzzo e nell'acciaio.

$$\sigma_c = \frac{N_{Ed}}{A_{ci}} = -\frac{5}{0,293} = -17,06 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \cdot \sigma_c = -15 \cdot 17,06 = -255,90 \text{ MPa}$$

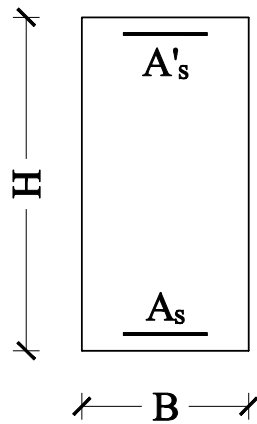
Confrontando le tensioni calcolate con quelle limite, vediamo che la verifica non risulta soddisfatta nel caso di combinazioni semipermanente dei carichi.

$$|\sigma_c| = 17,60 \text{ MPa} < 0,60 \cdot f_{ck} = 19,92 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_c| = 17,60 \text{ MPa} > 0,45 \cdot f_{ck} = 14,94 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_s| = 255,60 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

Esempio 4.3: effettuare la verifica alle TE delle seguente sezione in c.a. soggetta ad un momento flettente.



Dati:

$$B = 0,30 \text{ m}$$

$$H = 0,50 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,03 \text{ m}$$

$$A_s = 10,12 \text{ cm}^2 \text{ (4}\phi 18\text{)}$$

$$A'_s = 6,03 \text{ cm}^2 \text{ (3}\phi 16\text{)}$$

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa (C25 / 30)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$M_{Ed} = 140 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

La sezione soggetta a momento flettente risulta parzializzata. Per calcolare la posizione dell'asse neutro, nell'ipotesi di comportamento lineare dei materiali e in assenza di sforzo normale, imponiamo l'annullamento del momento statico della sezione ideale in calcestruzzo.

$$S_{ci} = \frac{B \cdot x_c^2}{2} + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta') - n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c) = 0$$

$$\frac{B \cdot x_c^2}{2} + n \cdot A'_s \cdot x_c - n \cdot A'_s \cdot \delta' - n \cdot A_s \cdot h + n \cdot A_s \cdot x_c = 0$$

$$\frac{B \cdot x_c^2}{2} + n \cdot (A'_s + A_s) \cdot x_c - n \cdot (A'_s \cdot \delta' + A_s \cdot h) = 0$$

$$\frac{0,30}{2} \cdot x_c^2 + 15 \cdot (6,02 + 10,12) \cdot 10^{-4} \cdot x_c - 15 \cdot (6,02 \cdot 0,03 + 10,12 \cdot 0,47) \cdot 10^{-4} = 0$$

$$0,15 \cdot x_c^2 + 0,0242 \cdot x_c - 0,0074 = 0$$

$$x_c = 0,156 \text{ m}$$

Conoscere la posizione dell'asse neutro è necessario per calcolare il momento d'inerzia baricentrico della sezione omogenea in calcestruzzo.

$$\begin{aligned} I_{ci} &= \frac{B \cdot x_c^3}{3} + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta')^2 + n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c)^2 = \\ &= \frac{0,30 \cdot 0,156^3}{3} + 15 \cdot 6,02 \cdot 10^{-4} \cdot (0,156 - 0,03)^2 + 15 \cdot 10,12 \cdot 10^{-4} \cdot (0,47 - 0,156)^2 = \\ &= (3,79 + 1,43 + 14,69) \cdot 10^{-4} = 20,91 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Nota il momento d'inerzia della sezione omogenea in calcestruzzo, è possibile calcolare le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio.

$$\sigma_c = -\frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot x_c = -\frac{0,14}{20,91 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,156 = -10,80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \cdot \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot (H - \delta - x_c) = 15 \cdot \frac{0,14}{20,19 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,47 - 0,156) = 325,60 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = -n \cdot \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot (x_c - \delta) = -15 \cdot \frac{0,14}{20,19 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,156 - 0,03) = -131,05 \text{ MPa}$$

Le tensioni così calcolate vanno confrontate con i limiti imposti dalla normativa.

$$|\sigma_c| = 10,80 \text{ MPa} < 0,60 \cdot f_{ck} = 15 \text{ MPa}$$

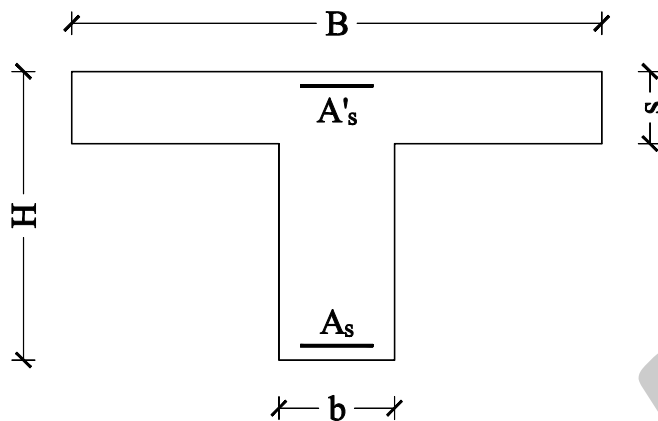
$$|\sigma_c| = 10,80 \text{ MPa} < 0,45 \cdot f_{ck} = 11,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 325,60 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

$$|\sigma'_s| = 131,05 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

Sia per la combinazione rara che per quella semipermanente, le verifiche risultano soddisfatte.

Esempio 4.4: effettuare la verifica alle TE delle seguente sezione in c.a. soggetta ad un momento flettente.



Dati:

$$B = 0,60 \text{ m}$$

$$b = 0,20 \text{ m}$$

$$H = 0,80 \text{ m}$$

$$s = 0,15 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,04 \text{ m}$$

$$A_s = 15,70 \text{ cm}^2 \text{ (} 5\phi 20 \text{)}$$

$$A'_s = 6,02 \text{ cm}^2 \text{ (} 3\phi 16 \text{)}$$

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa (C20 / 25)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$M_{Ed} = 350 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

Anche in questo caso possiamo calcolare la posizione dell'asse neutro imponendo l'annullamento del momento statico della sezione in calcestruzzo ideale. Data la geometria della sezione è necessario ipotizzare la posizione dell'asse neutro: in prima analisi, assumiamo che l'asse neutro sia in soletta.

$$S_{ci} = \frac{B \cdot x_c^2}{2} + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta') - n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c) = 0$$

$$\frac{B \cdot x_c^2}{2} + n \cdot A'_s \cdot x_c - n \cdot A'_s \cdot \delta' - n \cdot A_s \cdot h + n \cdot A_s \cdot x_c = 0$$

$$\frac{B \cdot x_c^2}{2} + n \cdot (A'_s + A_s) \cdot x_c - n \cdot (A'_s \cdot \delta' + A_s \cdot h) = 0$$

$$\frac{0,60}{2} \cdot x_c^2 + 15 \cdot (6,02 + 15,70) \cdot 10^{-4} \cdot x_c - 15 \cdot (6,02 \cdot 0,03 + 15,70 \cdot 0,76) \cdot 10^{-4} = 0$$

$$0,30 \cdot x_c^2 + 0,0323 \cdot x_c - 0,0182 = 0$$

$$x_c = 0,198 \text{ m} > s = 0,15 \text{ m}$$

Questa posizione dell'asse neutro è incompatibile con le ipotesi fatte, per cui è necessario ripetere il procedimento ipotizzando che l'asse neutro tagli l'anima della trave.

$$S_{ci} = B \cdot s \cdot \left(x_c - \frac{s}{2} \right) + \frac{b}{2} \cdot (x_c - s)^2 + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta') - n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c) = 0$$

$$B \cdot s \cdot x_c - \frac{B}{2} \cdot s^2 + \frac{b}{2} \cdot x_c^2 + \frac{b}{2} \cdot s^2 - b \cdot s \cdot x_c + n \cdot A'_s \cdot x_c - n \cdot A'_s \cdot \delta' - n \cdot A_s \cdot h + n \cdot A_s \cdot x_c = 0$$

$$\frac{b}{2} \cdot x_c^2 + (B \cdot s - b \cdot s + n \cdot A'_s + n \cdot A_s) \cdot x_c - (B - b) \cdot \frac{s^2}{2} - n \cdot (A'_s \cdot \delta' + A_s \cdot h) = 0$$

$$\frac{0,20}{2} \cdot x_c^2 + (0,60 \cdot 0,15 - 0,20 \cdot 0,15 + 15 \cdot 6,02 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 15,70 \cdot 10^{-4}) \cdot x_c +$$

$$-(0,60 - 0,20) \cdot \frac{0,15^2}{2} - 15 \cdot (6,02 \cdot 0,04 + 15,70 \cdot 0,76) \cdot 10^{-4} = 0$$

$$0,10 \cdot x_c^2 + 0,0926 \cdot x_c - 0,0228 = 0$$

$$x_c = 0,202 \text{ m}$$

Questo valore è accettabile, per cui procediamo al calcolo del momento d'inerzia della sezione in calcestruzzo ideale.

$$I_{ci} = \frac{B \cdot s^3}{12} + B \cdot s \cdot \left(x_c - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{b}{3} \cdot (x_c - s)^3 + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta')^2 + n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c)^2 =$$

$$= \frac{0,60 \cdot 0,15^3}{12} + 0,60 \cdot 0,15 \cdot \left(0,202 - \frac{0,15}{2}\right)^2 + \frac{0,20}{3} \cdot (0,202 - 0,15)^3 +$$

$$+ 15 \cdot 6,02 \cdot 10^{-4} \cdot (0,202 - 0,04)^2 + 15 \cdot 15,70 \cdot 10^{-4} \cdot (0,76 - 0,202)^2 =$$

$$= (1,70 + 14,50 + 0,094 + 2,40 + 73,30) \cdot 10^{-4} = 92 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Noto il momento d'inerzia, calcoliamo le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio.

$$\sigma_c = -\frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot x_c = -\frac{0,35}{92 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,202 = -7,68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \cdot \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot (H - \delta - x_c) = 15 \cdot \frac{0,35}{92 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,76 - 0,202) = 318,42 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = -n \cdot \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot (x_c - \delta) = -15 \cdot \frac{0,35}{92 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,202 - 0,04) = -92,44 \text{ MPa}$$

Le tensioni vanno confrontate con i limiti imposti dalla normativa.

$$|\sigma_c| = 7,68 \text{ MPa} < 0,60 \cdot f_{ck} = 12 \text{ MPa}$$

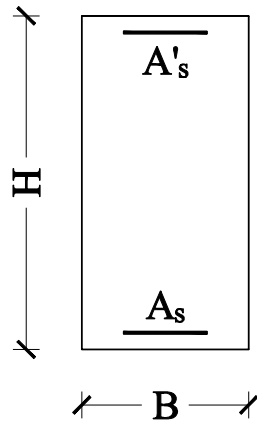
$$|\sigma_c| = 7,68 \text{ MPa} < 0,45 \cdot f_{ck} = 9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 318,42 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

$$|\sigma'_s| = 92,44 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

Sia per la combinazione rara che per quella semipermanente, le verifiche risultano soddisfatte.

Esempio 4.5: effettuare la verifica alle TE delle seguente sezione in c.a. soggetta a sforzo normale eccentrico.



Dati:

$$B = 0,40 \text{ m}$$

$$H = 0,60 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,04 \text{ m}$$

$$A_s = A'_s = 15,2 \text{ cm}^2 (4\phi 22)$$

$$f_{ck} = 37,3 \text{ MPa (C35 / 45)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$N_{Ed} = -900 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = 350 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

Noti i valori di momento e di sforzo normale, è possibile calcolare l'eccentricità del carico.

$$e = \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}} = \frac{350}{900} = 0,39 \text{ m}$$

Il punto di applicazione del carico è esterno al nocchio d'inerzia, per cui la sezione risulta parzializzata. Per calcolare la posizione dell'asse neutro, imponiamo l'equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione del carico.

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot B \cdot x_c \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \frac{x_c}{3} \right) + \sigma'_s \cdot A'_s \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \delta' \right) + \sigma_s \cdot A_s \cdot \left(e + \frac{H}{2} - \delta \right) = 0$$

L'equazione ha come incognite la posizione dell'asse neutro e le tensioni nel calcestruzzo e nelle armature. Per risolvere il problema sfruttò le equazioni di congruenza e il legame elastico lineare.

$$\sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s = E_s \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = n \cdot \sigma_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c}$$

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s = -E_s \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{h - x_c}{x_c} = -n \cdot \sigma_c \cdot \frac{h - x_c}{x_c}$$

Riscriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione operando le opportune semplificazioni.

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{\sigma_c} \cdot B \cdot x_c \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \frac{x_c}{3} \right) + A'_s \cdot n \cdot \cancel{\sigma_c} \cdot \left(\frac{x_c - \delta'}{x_c} \right) \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \delta' \right) +$$

$$- A_s \cdot n \cdot \cancel{\sigma_c} \cdot \left(\frac{h - x_c}{x_c} \right) \cdot \left(e + \frac{H}{2} - \delta \right) = 0$$

Per semplificare ulteriormente l'equazione, moltiplichiamo per x_c e sfruttiamo la simmetria della sezione.

$$\frac{1}{2} \cdot B \cdot x_c^2 \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \frac{x_c}{3} \right) + n \cdot A_s \cdot \left[x_c \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \delta' + e + \frac{H}{2} - \delta' \right) - \delta \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \delta \right) - H \cdot \left(e + \frac{H}{2} - \delta \right) \right] = 0$$

$$\frac{B}{6} \cdot x_c^3 + \frac{B}{2} \cdot \left(e - \frac{H}{2} \right) \cdot x_c^2 + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot e \cdot x_c - n \cdot A_s \cdot \left[\delta' \cdot \left(e - \frac{H}{2} + \delta \right) + H \cdot \left(e + \frac{H}{2} - \delta \right) - \delta \cdot \left(e + \frac{H}{2} - \delta \right) \right] = 0$$

$$\frac{B}{6} \cdot x_c^3 + \frac{B}{2} \cdot \left(e - \frac{H}{2} \right) \cdot x_c^2 + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot e \cdot x_c + n \cdot A_s \cdot \left[\delta \cdot (H - 2 \cdot \delta) - H \cdot \left(e + \frac{H}{2} - \delta \right) \right] = 0$$

$$\frac{B}{6} \cdot x_c^3 + \frac{B}{2} \cdot \left(e - \frac{H}{2} \right) \cdot x_c^2 + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot e \cdot x_c + n \cdot A_s \cdot \left(2 \cdot \delta \cdot H - 2 \cdot \delta^2 - H \cdot e - \frac{H^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{0,40}{6} \cdot x_c^3 + \frac{0,40}{2} \cdot \left(0,50 - \frac{0,60}{2} \right) \cdot x_c^2 + 2 \cdot 15 \cdot 15,20 \cdot 10^{-4} \cdot 0,50 \cdot x_c + 15 \cdot 15,20 \cdot 10^{-4} \cdot \left(2 \cdot 0,04 \cdot 0,60 - 2 \cdot 0,04^2 - 0,60 \cdot 0,50 - \frac{0,60^2}{2} \right) = 0$$

$$0,0667 \cdot x_c^3 + 0,04 x_c^2 + 0,0228 \cdot x_c - 0,0099 = 0$$

$$x_c = 0,262 \text{ m}$$

Nota la posizione dell'asse neutro, possiamo scrivere l'equazione dell'equilibrio alla traslazione allo scopo di calcolare le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio.

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot B \cdot x_c + \sigma'_s \cdot A'_s + \sigma_s \cdot A_s = N_{Sd}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot B \cdot x_c + A'_s \cdot n \cdot \sigma_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} - A_s \cdot n \cdot \sigma_c \cdot \frac{h - x_c}{x_c} = N_{Sd}$$

L'unica incognita dell'equazione è la tensione nel calcestruzzo.

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N_{Ed}}{\frac{1}{2} \cdot B \cdot x_c^2 + n \cdot A_s \cdot (2 \cdot x_c - \delta - h)} \cdot x_c = \\ &= - \frac{0,90}{\frac{1}{2} \cdot 0,40 \cdot 0,262^2 + 15 \cdot 15,20 \cdot 10^{-4} \cdot (2 \cdot 0,262 - 0,04 - 0,56)} \cdot 0,262 = \\ &= - \frac{0,90}{0,0137 - 0,00173} \cdot 0,262 = -19,7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare le tensioni nell'acciaio sia teso che compresso.

$$\sigma'_s = n \cdot \sigma_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -15 \cdot 19,7 \cdot \frac{0,262 - 0,04}{0,262} = -250,38 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = -n \cdot \sigma_c \cdot \frac{h - x_c}{x_c} = 15 \cdot 19,7 \cdot \frac{0,56 - 0,262}{0,262} = 336,1 \text{ MPa}$$

La verifica si completa confrontando le tensioni con i limiti imposti dalla normativa.

$$|\sigma_c| = 19,7 \text{ MPa} < 0,60 \cdot f_{ck} = 22,38 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_c| = 19,7 \text{ MPa} > 0,45 \cdot f_{ck} = 16,78 \text{ MPa}$$

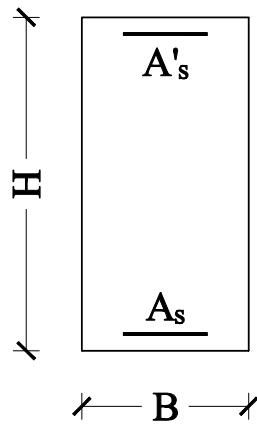
$$\sigma_s = 336,1 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

$$|\sigma'_s| = 250,38 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

La verifica non risulta soddisfatta nel caso di combinazioni semipermanente dei carichi.

BOLZA

Esempio 4.8a: calcolare il momento resistente allo SLU delle seguente sezione in c.a.



Dati:

$$B = 0,30 \text{ m}$$

$$H = 0,70 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,03 \text{ m}$$

$$A_s = 15,70 \text{ cm}^2 \text{ (} 5\phi 20 \text{)}$$

$$A'_s = 6,03 \text{ cm}^2 \text{ (} 3\phi 16 \text{)}$$

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa (C25 / 30)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$M_{Ed} = 350 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

Note le tensioni caratteristiche di calcestruzzo e acciaio, è possibile calcolare quelle di progetto.

$$f_{cd} = \alpha \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \cdot \frac{28}{1,5} = 15,9 \text{ MPa} \quad f_{sd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391 \text{ MPa}$$

Definiamo inoltre la deformazione ultima del calcestruzzo e quella di snervamento dell'acciaio.

$$\varepsilon_c = -0,0035 = -0,35\% \quad \varepsilon_y = \frac{f_{sd}}{E_s} = \frac{391}{210000} = 0,00186 = 0,186\%$$

Per calcolare la posizione dell'asse neutro scriviamo l'equazione di equilibrio alla traslazione: occorre fare delle ipotesi circa lo stato di deformazione delle armature.

$$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatura snervata a trazione}$$

$$\varepsilon'_s < -|\varepsilon_y| \quad \text{Armatura snervata a compressione}$$

Considerando un legame costitutivo elastico-perfettamente plastico per l'acciaio e di tipo stress-block per il calcestruzzo, è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c - A'_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot f_{sd} = 0$$

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c + f_{sd} \cdot (A_s - A'_s) = 0$$

$$x_c = \frac{f_{sd} \cdot (A_s - A'_s)}{f_{cd} \cdot B \cdot 0,8} = \frac{391 \cdot (15,70 - 6,03) \cdot 10^{-4}}{15,9 \cdot 0,3 \cdot 0,8} = 0,099 \text{ m}$$

Nota la posizione dell'asse neutro, verifichiamo le ipotesi fatte calcolando le deformazioni dell'acciaio teso e compresso e confrontandole con quella di snervamento.

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c \cdot \frac{(H - \delta) - x_c}{x_c} = 0,0035 \cdot \frac{(0,70 - 0,03) - 0,099}{0,099} = 0,0201 = 2\%$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -0,0035 \cdot \frac{0,099 - 0,03}{0,099} = -0,00244 = -0,24\%$$

Le deformazioni degli acciai rispettano le ipotesi fatte, per cui si può procedere al calcolo del momento ultimo della sezione.

$$M_{Rd} = -f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c \cdot [-(0,6 \cdot x_c)] - A'_s \cdot f_{sd} \cdot [-(x_c - \delta')] + A_s \cdot f_{sd} \cdot (H - \delta - x_c)$$

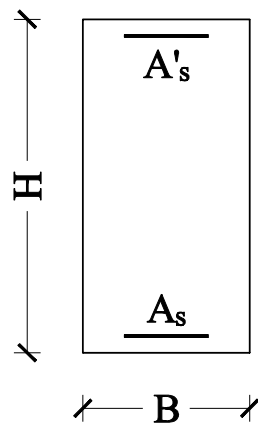
$$M_{Rd} = 15,9 \cdot 0,30 \cdot 0,8 \cdot 0,099 \cdot (0,6 \cdot 0,099) + 6,03 \cdot 10^{-4} \cdot 391 \cdot (0,099 - 0,03) + 15,70 \cdot 10^{-4} \cdot 391 \cdot (0,70 - 0,03 - 0,099)$$

$$M_{Rd} = 0,022 + 0,016 + 0,350 = 0,388 \text{ MN} \cdot \text{m} = 388 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Il valore del momento ultimo della sezione è maggiore del valore di progetto, per cui la verifica risulta soddisfatta.

BOLZA

Esempio 4.8b: calcolare il momento resistente allo SLU delle seguente sezione in c.a.



Dati:

$$B = 0,40 \text{ m}$$

$$H = 0,70 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,04 \text{ m}$$

$$A_s = A'_s = 19,00 \text{ cm}^2 \text{ (} 5\phi 22 \text{)}$$

$$f_{ck} = 28 \text{ MPa (C28/35)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$N_{Ed} = -2,0 \text{ MN}$$

$$M_{Ed} = 0,8 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

Note le tensioni caratteristiche di calcestruzzo e acciaio, è possibile calcolare quelle di progetto.

$$f_{cd} = \alpha \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \cdot \frac{28}{1,5} = 15,9 \text{ MPa} \quad f_{sd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391 \text{ MPa}$$

Definiamo inoltre la deformazione ultima del calcestruzzo e quella di snervamento dell'acciaio.

$$\varepsilon_c = -0,0035 = -0,35\% \quad \varepsilon_y = \frac{f_{sd}}{E_s} = \frac{391}{210000} = 0,00186 = 0,186\%$$

Per calcolare la posizione dell'asse neutro scriviamo l'equazione di equilibrio alla traslazione facendo delle ipotesi circa lo stato di deformazione delle armature.

$$\varepsilon_s < \varepsilon_y \quad \text{Armatura in fase elastica}$$

$$\varepsilon'_s < -|\varepsilon_y| \quad \text{Armatura snervata a compressione}$$

In accordo con le ipotesi fatte, è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c - A'_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot \sigma_s = N_{Ed}$$

Per semplificare l'equazione sfruttiamo il legame costitutivo e le equazioni di equilibrio.

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s = -E_s \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{h - x_c}{x_c} = 210000 \cdot 0,0035 \cdot \frac{h - x_c}{x_c} = 735 \cdot \frac{h - x_c}{x_c}$$

A questo punto, l'unica incognita è rappresentata dalla posizione dell'asse neutro.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c^2 - A'_s \cdot f_{sd} \cdot x_c + A_s \cdot 735 \cdot (h - x_c) = N_{Ed} \cdot x_c$$

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c^2 - A'_s \cdot f_{sd} \cdot x_c + A_s \cdot 735 \cdot h - A_s \cdot 735 \cdot x_c = N_{Ed} \cdot x_c$$

$$-15,9 \cdot 0,40 \cdot 0,8 \cdot x_c^2 - 19 \cdot 10^{-4} \cdot 391 \cdot x_c + 19 \cdot 10^{-4} \cdot 735 \cdot 0,66 - 19 \cdot 10^{-4} \cdot 735 \cdot x_c = -2 \cdot x_c$$

$$-5,09 \cdot x_c^2 - 0,1394 \cdot x_c + 0,9217 = 0$$

$$x_c = 0,412 \text{ m}$$

Nota la posizione dell'asse neutro, verifichiamo le ipotesi fatte calcolando le deformazioni dell'acciaio teso e compresso.

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c \cdot \frac{(H - \delta) - x_c}{x_c} = 0.0035 \cdot \frac{(0,70 - 0,04) - 0,412}{0,412} = 0,00211 = 0,21\%$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -0.0035 \cdot \frac{0,412 - 0,04}{0,412} = -0,00316 = -0,32\%$$

La deformazione dell'acciaio compresso indica che è snervato in compressione, il che viola le ipotesi formulate. Sulla base di questo dato, scriviamo nuove ipotesi.

$$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatatura snervata a trazione}$$

$$\varepsilon'_s < -|\varepsilon_y| \quad \text{Armatatura snervata a compressione}$$

Alla luce di queste nuove ipotesi e grazie alla simmetria della sezione, l'equazione di equilibrio si semplifica notevolmente.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c - A'_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot f_{sd} = N_{Ed}$$

$$-15,9 \cdot 0,40 \cdot 0,8 \cdot x_c = -2$$

$$x_c = \frac{2}{15,9 \cdot 0,40 \cdot 0,8} = 0,393 \text{ m}$$

Calcoliamo nuovamente le deformazioni delle armature.

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c \cdot \frac{(H - \delta) - x_c}{x_c} = 0.0035 \cdot \frac{(0,70 - 0,04) - 0,393}{0,393} = 0,00238 = 0,24\%$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -0.0035 \cdot \frac{0,393 - 0,04}{0,393} = -0,00314 = -0,31\%$$

Per questa posizione dell'asse neutro le deformazioni rispettano le ipotesi fatte, per cui si può procedere al calcolo del momento ultimo della sezione rispetto al baricentro geometrico.

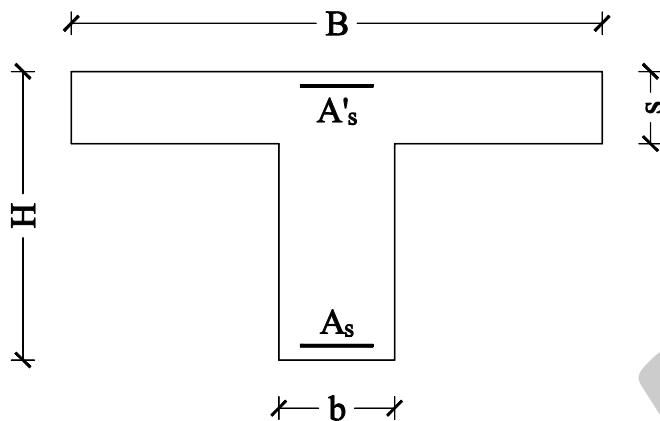
$$M_{Rd} = -f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c \cdot \left[-\left(\frac{H}{2} - 0,4 \cdot x_c \right) \right] - A'_s \cdot f_{sd} \cdot \left[-\left(\frac{H}{2} - \delta' \right) \right] + A_s \cdot f_{sd} \cdot \left(\frac{H}{2} - \delta \right)$$

$$M_{Rd} = 15,9 \cdot 0,40 \cdot 0,8 \cdot 0,393 \cdot (0,35 - 0,4 \cdot 0,393) + 2 \cdot 19 \cdot 10^{-4} \cdot 391 \cdot (0,35 - 0,04)$$

$$M_{Rd} = 0,386 + 0,460 = 0,846 \text{ MN} \cdot \text{m} = 845 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Il valore del momento ultimo della sezione è maggiore del valore di progetto, per cui la verifica risulta soddisfatta.

Esempio 4.9: calcolare il momento resistente allo SLU delle seguente sezione in c.a.



Dati:

$$B = 0,50 \text{ m}$$

$$b = 0,15 \text{ m}$$

$$H = 0,35 \text{ m}$$

$$s = 0,08 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,03 \text{ m}$$

$$A_s = 3,08 \text{ cm}^2 \text{ (} 2\phi 14 \text{)}$$

$$A'_s = 1,57 \text{ cm}^2 \text{ (} 2\phi 10 \text{)}$$

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa (C25 / 30)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$M_{Ed} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

Note le tensioni caratteristiche di calcestruzzo e acciaio, è possibile calcolare quelle di progetto.

$$f_{cd} = \alpha \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \cdot \frac{25}{1,5} = 14,2 \text{ MPa}$$

$$f_{sd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391 \text{ MPa}$$

Definiamo inoltre la deformazione ultima del calcestruzzo e quella di snervamento dell'acciaio.

$$\varepsilon_c = -0,0035 = -0,35\%$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_{sd}}{E_s} = \frac{391}{210000} = 0,00186 = 0,186\%$$

Data la geometria della sezione, per scrivere l'equazione di equilibrio alla traslazione è necessario fare delle ipotesi circa la posizione dell'asse neutro rispetto alla soletta, oltre che le classiche ipotesi sullo stato di deformazione delle armature.

$$x_c > 1,25 \cdot s \quad \text{L'asse neutro taglia l'anima}$$

$$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatura snervata a trazione}$$

$$\varepsilon'_s < -|\varepsilon_y| \quad \text{Armatura snervata a compressione}$$

Con riferimento alle ipotesi appena introdotte, di seguito l'equazione di equilibrio alla traslazione.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot s - f_{cd} \cdot b \cdot (0,8 \cdot x_c - s) - A'_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot f_{sd} = 0$$

$$-14,2 \cdot 0,50 \cdot 0,08 - 14,2 \cdot 0,15 \cdot (0,8 \cdot x_c - 0,08) - 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot 391 + 3,08 \cdot 10^{-4} \cdot 391 = 0$$

$$-0,568 - 1,704 \cdot x_c + 0,170 - 0,061 + 0,120 = 0$$

$$-1,704 \cdot x_c - 0,339 = 0$$

$$x_c = -\frac{0,339}{1,704} = -0,199 \text{ m}$$

Tale posizione dell'asse neutro è ovviamente errata in quanto il valore calcolato è negativo.

Le ipotesi di partenza non sono esatte, per cui vanno cambiate.

$$x_c \leq 1,25 \cdot s \quad \text{Asse neutro in soletta}$$

$$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatura snervata a trazione}$$

$$\varepsilon'_s < -|\varepsilon_y| \quad \text{Armatura snervata a compressione}$$

Alla luce di queste nuove ipotesi, riscriviamo l'equazione di equilibrio.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c - A'_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot f_{sd} = 0$$

$$-14,2 \cdot 0,50 \cdot 0,8 \cdot x_c - 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot 391 + 3,08 \cdot 10^{-4} \cdot 391 = 0$$

$$-5,68 \cdot x_c - 0,061 + 0,120 = 0$$

$$-5,68 \cdot x_c - 0,059 = 0$$

$$x_c = \frac{0,059}{5,68} = 0,0104 \text{ m} \leq 1,25 \cdot s$$

Questa posizione dell'asse neutro è compatibile con l'ipotesi fatta, calcoliamo quindi le deformazioni dell'acciaio

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c \cdot \frac{(H - \delta) - x_c}{x_c} = 0,0035 \cdot \frac{(0,35 - 0,03) - 0,01}{0,01} = 0,108 = 10,8\%$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -0,0035 \cdot \frac{0,01 - 0,03}{0,01} = 0,007 = 0,7\%$$

La deformazione dell'acciaio teso supera i limiti imposti dalla normativa, inoltre l'armatura al lembo superiore risulta snervata in trazione. È necessario riformulare le ipotesi sull'acciaio.

$$x_c \leq 1,25 \cdot s \quad \text{Asse neutro in soletta}$$

$$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatura snervata a trazione}$$

$$\varepsilon'_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatura snervata a trazione}$$

L'equazione di equilibrio diventa.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c + A'_s \cdot f_{sd} + A_s \cdot f_{sd} = 0$$

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c + f_{sd} \cdot (A_s + A'_s) = 0$$

$$-14,2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 \cdot x_c + 391 \cdot (3,08 + 1,57) \cdot 10^{-4} = 0$$

$$-5,68 \cdot x_c + 0,1818 = 0$$

$$x_c = \frac{0,1818}{5,68} = 0,032 \text{ m} \leq 1,25 \cdot s$$

Verifichiamo le ipotesi sulla deformazione dell'acciaio.

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c \cdot \frac{(H - \delta) - x_c}{x_c} = 0.0035 \cdot \frac{(0,35 - 0,03) - 0,032}{0,032} = 0,0315 = 3,15\%$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -0.0035 \cdot \frac{0,032 - 0,03}{0,032} = -0,00022 = -0,022\%$$

L'acciaio compresso è in fase elastica, quindi non soddisfa le ipotesi fatte. Formuliamo quindi nuove ipotesi.

$$x_c \leq 1,25 \cdot s \quad \text{Asse neutro in soletta}$$

$$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \text{Armatatura snervata a trazione}$$

$$\varepsilon'_s < \varepsilon_y \quad \text{Armatatura in fase elastica}$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione diventa.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c + A'_s \cdot \sigma'_s + A_s \cdot f_{sd} = 0$$

Per semplificare l'equazione sfruttiamo il legame costitutivo e le equazioni di equilibrio.

$$\sigma'_s = E_s \cdot \varepsilon'_s = E_s \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -210000 \cdot 0,0035 \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -735 \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c}$$

A questo punto, l'unica incognita è rappresentata dalla posizione dell'asse neutro.

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c - A'_s \cdot 735 \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} + A_s \cdot f_{sd} = 0$$

$$-f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c^2 - A'_s \cdot 735 \cdot x_c + A'_s \cdot 735 \cdot \delta' + A_s \cdot f_{sd} \cdot x_c = 0$$

$$-14,2 \cdot 0,5 \cdot 0,8 \cdot x_c^2 - 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot 735 \cdot x_c + 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot 735 \cdot 0,03 + 3,08 \cdot 10^{-4} \cdot 391 \cdot x_c = 0$$

$$-5,68 \cdot x_c^2 - 0,0053 \cdot x_c + 0,0035 = 0$$

$$x_c = 0,024 \text{ m} \leq 1,25 \cdot s$$

Verifichiamo le ipotesi con quest'ultima posizione dell'asse neutro.

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_c \cdot \frac{(H - \delta) - x_c}{x_c} = 0.0035 \cdot \frac{(0,35 - 0,03) - 0,024}{0,024} = 0,0432 = 4,31\%$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c \cdot \frac{x_c - \delta'}{x_c} = -0.0035 \cdot \frac{0,024 - 0,03}{0,024} = 0,00087 = 0,087\%$$

Per questa posizione dell'asse neutro, le ipotesi risultano soddisfatte. Si può procedere al calcolo del momento ultimo della sezione.

$$M_{Rd} = -f_{cd} \cdot B \cdot 0,8 \cdot x_c \cdot [-(0,6 \cdot x_c)] + A'_s \cdot E_s \cdot \varepsilon'_s \cdot [-(x_c - \delta')] + A_s \cdot f_{sd} \cdot (h - x_c)$$

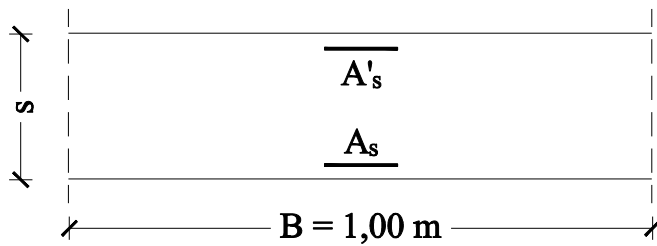
$$\begin{aligned} M_{Rd} &= 14,2 \cdot 0,50 \cdot 0,8 \cdot 0,024 \cdot (0,6 \cdot 0,024) + \\ &+ 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot 210000 \cdot 0,00087 \cdot (-0,024 + 0,03) + \\ &+ 3,08 \cdot 10^{-4} \cdot 391 \cdot (0,32 - 0,024) \end{aligned}$$

$$M_{Rd} = 0,00196 + 0,00017 + 0,0356 = 0,0374 \text{ MN} \cdot \text{m} = 37,4 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Il valore del momento ultimo della sezione è minore del valore di progetto, per cui la verifica non risulta soddisfatta.

BOZZA

Esempio 4.13a: verificare la seguente sezione nei confronti dello stato limite di decompressione.



Dati:

$$B = 1,00 \text{ m}$$

$$H = s = 0,30 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,03 \text{ m}$$

$$f_{ck} = 40 \text{ MPa (C40 / 50)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$A_s = A'_s = 25,4 \text{ cm}^2 (10\phi 18)$$

$$N_{Ed} = -5 \text{ MN}$$

$$M_{Ed} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

La sezione deve essere interamente compressa, per cui è possibile calcolare immediatamente l'area ed il momento d'inerzia della sezione ideale in calcestruzzo.

$$A_{ci} = A_c + n \cdot A_{s,tot} = B \cdot H + n \cdot (A_s + A'_s) =$$

$$1,00 \cdot 0,30 + 2 \cdot 15 \cdot 25,4 \cdot 10^{-4} = 0,376 \text{ m}^2$$

$$I_{ci} = \frac{B \cdot H^3}{12} + n \cdot (A'_s + A_s) \cdot \left(\frac{H}{2} - \delta \right)^2 =$$

$$= \frac{1,00 \cdot 0,30^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 25,4 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{0,30}{2} - 0,03 \right)^2 =$$

$$= (22,5 + 10,97) \cdot 10^{-4} = 33,47 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Note le caratteristiche meccaniche della sezione, calcoliamo le tensioni nel calcestruzzo al lembo inferiore e superiore della sezione, e le tensioni nelle armature.

$$\sigma_{ci} = \frac{N_{Ed}}{A_{ci}} + \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot \frac{H}{2} = -\frac{5}{0,376} + \frac{0,2}{33,47 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,15 = -4,33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cs} = \frac{N_{Ed}}{A_{ci}} - \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot \frac{H}{2} = -\frac{5}{0,376} - \frac{0,2}{33,47 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,15 = -22,26 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \cdot \left[\frac{N_{Ed}}{A_{ci}} + \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot \left(\frac{H}{2} - \delta \right) \right] =$$

$$= 15 \cdot \left[-\frac{5}{0,376} + \frac{0,2}{33,47 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,15 - 0,03) \right] = -91,91 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = n \cdot \left[\frac{N_{Ed}}{A_{ci}} - \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot \left(\frac{H}{2} - \delta \right) \right] =$$

$$= 15 \cdot \left[-\frac{5}{0,376} - \frac{0,2}{33,47 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,15 - 0,03) \right] = -307,03 \text{ MPa}$$

Le tensioni, in particolare sia al lembo inferiore che superiore nel calcestruzzo, sono di compressione.

La verifica si completa confrontando le tensioni calcolate con i limiti previsti dalla normativa per la combinazioni di carico rara.

$$|\sigma_{ci}| = 4,33 \text{ MPa} < 0,60 \cdot f_{ck} = 24 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{cs}| = 22,26 \text{ MPa} < 0,60 \cdot f_{ck} = 24 \text{ MPa}$$

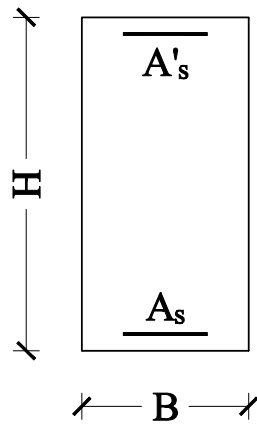
$$|\sigma_s| = 91,91 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

$$|\sigma'_s| = 307,03 \text{ MPa} < 0,80 \cdot f_{yk} = 360 \text{ MPa}$$

La verifica risulta soddisfatta.

BOLZA

Esempio 4.13b: verificare la seguente sezione nei confronti dello stato limite di prima fessurazione.



Dati:

$$B = 0,40 \text{ m}$$

$$H = 0,60 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,04 \text{ m}$$

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa (C35 / 45)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$A_s = 12,56 \text{ cm}^2 (4\phi 20)$$

$$A'_s = 6,16 \text{ cm}^2 (4\phi 14)$$

$$M_{Ed} = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

La sezione risulta parzializzata, quindi calcoliamo la posizione dell'asse neutro imponendo l'annullamento del momento statico della sezione in calcestruzzo ideale, considerando anche il calcestruzzo reagente a trazione.

$$S_{ci} = -\frac{B \cdot x_c^2}{2} + n' \cdot \frac{B \cdot (H - x_c)^2}{2} - n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta') + n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c) = 0$$

$$-B \cdot x_c^2 + n' \cdot B \cdot H^2 - 2 \cdot n' \cdot B \cdot H \cdot x_c + n' \cdot B \cdot x_c^2 - 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot x_c + 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot \delta' + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot H - 2 \cdot n \cdot A_s \cdot \delta - 2 \cdot n \cdot x_c = 0$$

$$B \cdot (n' - 1) \cdot x_c^2 - 2 \cdot (n' \cdot B \cdot H + n \cdot A'_s + n \cdot A_s) \cdot x_c + n' \cdot B \cdot H^2 + 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot \delta' + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot H - 2 \cdot n \cdot A_s \cdot \delta = 0$$

$$0,40 \cdot (0,5 - 1) \cdot x_c^2 - 2 \cdot (0,5 \cdot 0,40 \cdot 0,60 + 15 \cdot 6,16 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4}) \cdot x_c + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,60^2 + 2 \cdot 15 \cdot 6,16 \cdot 10^{-4} \cdot 0,04 + 2 \cdot 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot 0,60 + 2 \cdot 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot 0,04 = 0$$

$$-0,20 \cdot x_c^2 - 0,2961 \cdot x_c + 0,0939 = 0$$

$$x_c = 0,268 \text{ m}$$

Adesso, procediamo al calcolo del momento d'inerzia della sezione in calcestruzzo ideale.

$$\begin{aligned} I_{ci} &= \frac{B \cdot x_c^3}{3} + n' \cdot \frac{B \cdot (H - x_c)^3}{3} + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta')^2 + n \cdot A_s \cdot (H - \delta - x_c)^2 = \\ &= \frac{0,40 \cdot 0,268^3}{3} + 0,5 \cdot \frac{0,4 \cdot (0,6 - 0,268)^3}{3} = \\ &= 15 \cdot 6,16 \cdot 10^{-4} \cdot (0,268 - 0,04)^2 + 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot (0,60 - 0,04 - 0,268)^2 = \\ &= (25,66 + 24,40 + 4,80 + 16,06) \cdot 10^{-4} = 70,92 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Nota il momento d'inerzia, calcoliamo le tensioni nel calcestruzzo teso.

$$\sigma_{ct} = n' \cdot \frac{M_{Ed}}{I_{ci}} \cdot (H - x_c) = 0,5 \cdot \frac{0,1}{70,92 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,60 - 0,268) = 2,34 \text{ MPa}$$

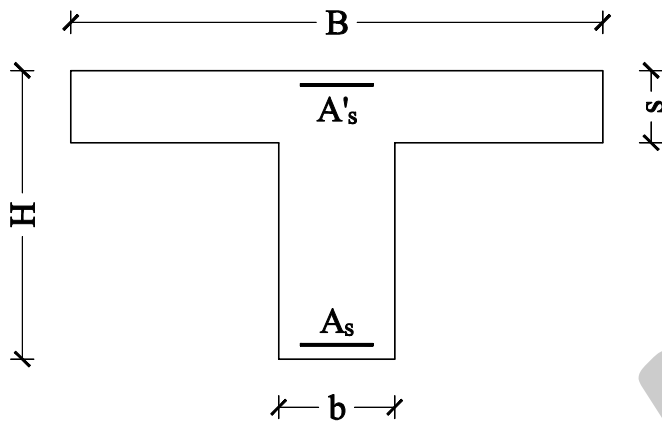
La verifica si completa confrontando questo valore con la resistenza a trazione del calcestruzzo.

$$\sigma_t = \frac{f_{ctm}}{1,2} = \frac{0,30 \cdot f_{ck}^{2/3}}{1,2} = \frac{0,30 \cdot 35^{2/3}}{1,2} = 2,67 \text{ MPa}$$

La verifica risulta soddisfatta.

BOLZA

Esempio 4.13c: verificare la seguente sezione nei confronti dell'apertura controllata delle fessure.



Dati:

$$B = 0,60 \text{ m}$$

$$b = 0,20 \text{ m}$$

$$H = 0,70 \text{ m}$$

$$s = 0,25 \text{ m}$$

$$\delta = \delta' = 0,04 \text{ m}$$

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa (C35 / 45)}$$

$$f_{yk} = 450 \text{ MPa}$$

$$A_s = 12,56 \text{ cm}^2 (4\phi 20)$$

$$A'_s = 9,24 \text{ cm}^2 (6\phi 14)$$

$$M_{Ed} = 200 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Sezione oggetto dello studio

Questa verifica richiede che il valore di calcolo delle fessure (w_d) non superi i valori nominali w_1, w_2, w_3 . Il valore di calcolo è dato da:

$$w_d = 1,7 \cdot w_m$$

dove w_m rappresenta l'ampiezza media delle fessure. Tale valore è calcolato come prodotto tra la deformazione media delle barre d'armatura ε_{sm} per la distanza media tra le fessure s_{rm} :

$$w_m = \varepsilon_{sm} \cdot s_{rm}$$

Per il calcolo di ε_{sm} e s_{rm} utilizzeremo la procedura descritta nel D.M. 09/01/1996. La deformazione dell'armatura può valutarsi secondo la seguente espressione:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right]$$

dove: σ_s è la tensione dell'acciaio calcolata nella sezione fessurata; σ_{sr} è la tensione nell'acciaio corrispondente al raggiungimento della resistenza a trazione f_{ctm} nella fibra di calcestruzzo più sollecitata in sezione interamente reagente; β_1 è un coefficiente che tiene conto dell'aderenza acciaio calcestruzzo, nel nostro caso pari a 1; β_2 tiene conto delle condizioni di sollecitazione, nel nostro caso è pari a 0,5; infine E_s è il modulo di Young dell'acciaio.

Per calcolare σ_s devo conoscere la posizione dell'asse neutro, impongo quindi l'equilibrio alla traslazione ipotizzando l'asse neutro in soletta:

$$-\frac{B \cdot x_c^2}{2} - n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta') + n \cdot A_s \cdot (H - x_c - \delta) = 0$$

$$B \cdot x_c^2 + 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot x_c - 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot \delta' - 2 \cdot n \cdot A_s \cdot H + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot x_c + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot \delta = 0$$

$$B \cdot x_c^2 + 2 \cdot n \cdot (A_s + A'_s) \cdot x_c - 2 \cdot n \cdot (A'_s \cdot \delta' + A_s \cdot H - A_s \cdot \delta) = 0$$

$$0,60 \cdot x_c^2 + 2 \cdot 15 \cdot (12,56 \cdot 10^{-4} + 9,24 \cdot 10^{-4}) \cdot x_c + \\ - 2 \cdot 15 \cdot (9,24 \cdot 10^{-4} \cdot 0,04 + 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot 0,70 - 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot 0,04) = 0$$

$$0,60 \cdot x_c^2 + 0,0654 \cdot x_c - 0,026 = 0$$

$$x_c = 0,160 \text{ m}$$

Calcolo quindi il momento d'inerzia della sezione di calcestruzzo ideale:

$$I_{ci} = \frac{B \cdot x_c^3}{3} + n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta')^2 + n \cdot A_s \cdot (H - x_c - \delta)^2 = \\ = \frac{0,60 \cdot 0,16^3}{3} + 15 \cdot 9,24 \cdot 10^{-4} \cdot (0,16 - 0,04)^2 + 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot (0,70 - 0,16 - 0,04)^2 = \\ = (8,192 + 1,996 + 47,1) \cdot 10^{-4} = 57,288 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Infine calcolo σ_s :

$$\sigma_s = n \cdot \frac{M}{I_{ci}} \cdot (H - x_c - \delta) = 15 \cdot \frac{0,2}{57,288 \cdot 10^{-4}} \cdot (0,70 - 0,16 - 0,04) = 262 \text{ MPa}$$

Per calcolare σ_{sr} , per prima cosa definisco σ_{ct} :

$$\sigma_{ct} = \frac{f_{cm}}{1,2} = \frac{0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{1,2} = \frac{0,3 \cdot 35^{2/3}}{1,2} = 2,67 \text{ MPa}$$

Quindi impongo l'equilibrio alla traslazione della sezione interamente reagente:

$$-\frac{B \cdot x_c^2}{2} + n' \cdot B \cdot \frac{(s - x_c)^2}{2} + n' \cdot b \cdot (H - s) \cdot \left(H - x_c - \frac{H - s}{2} \right) + \\ - n \cdot A'_s \cdot (x_c - \delta') + n \cdot A_s \cdot (H - x_c - \delta) = 0 \\ -B \cdot x_c^2 + n' \cdot B \cdot s^2 + n' \cdot B \cdot x_c^2 - 2 \cdot n' \cdot B \cdot s \cdot x_c + 2 \cdot n' \cdot b \cdot (H - s) \left(\frac{H}{2} + \frac{s}{2} \right) + \\ - 2 \cdot n' \cdot b \cdot (H - s) \cdot x_c - 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot x_c + 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot \delta' + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot (H - \delta) + \\ - 2 \cdot n \cdot A_s \cdot x_c = 0 \\ B \cdot (n' - 1) \cdot x_c^2 - [2 \cdot n' \cdot B \cdot s + 2 \cdot n' \cdot b \cdot (H - s) + 2 \cdot n \cdot A'_s + 2 \cdot n \cdot A_s] \cdot x_c + \\ + n' \cdot B \cdot s^2 + n' \cdot b \cdot (H - s) \cdot (H + s) + 2 \cdot n \cdot A'_s \cdot \delta' + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot (H - \delta) = 0$$

$$0,60 \cdot (0,5 - 1) \cdot x_c^2 + \\ - 2 \cdot [0,5 \cdot 0,60 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,20 \cdot (0,70 - 0,25) + 15 \cdot 9,24 \cdot 10^{-4} + \\ - 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4}] \cdot x_c + 0,5 \cdot 0,60 \cdot 0,25^2 + \\ + 0,5 \cdot 0,20 \cdot (0,70 - 0,25) \cdot (0,70 + 0,25) + 2 \cdot 15 \cdot 9,24 \cdot 10^{-4} \cdot 0,04 + \\ + 2 \cdot 15 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4} \cdot (0,70 - 0,04) = 0$$

$$-0,30 \cdot x_c^2 - 0,23 \cdot x_c + 0,064 = 0$$

$$x_c = 0,217 \text{ m}$$

Noto l'asse neutro, posso calcolare σ_{sr} :

$$\sigma_{sr} = n \cdot \sigma_{ct} \cdot \frac{H - x_c - \delta}{H - x_c} = 15 \cdot 2,67 \cdot \frac{0,70 - 0,217 - 0,04}{0,70 - 0,217} = 36,7 \text{ MPa}$$

La deformazione vale quindi:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{262}{210000} \left[1 - 1 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{36,7}{262} \right)^2 \right] = 1,23 \cdot 10^{-3}$$

La distanza media fra le fessure in corrispondenza dell'armatura all'interno dell'area efficace è data da:

$$s_{rm} = 2 \cdot \left(c + \frac{s}{10} \right) + k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{\phi}{\rho_r}$$

in cui: $c = \delta$ è il ricoprimento dell'armatura; s è la distanza fra le barre, nel nostro caso è pari a 0,04 m; ϕ è il diametro delle barre; ρ_r è la percentuale di armatura posta nell'area efficace; k_2 è un coefficiente che caratterizza l'aderenza del calcestruzzo alla barra, pari a 0,4 per barre ad aderenza migliorata; k_3 è un coefficiente che tiene conto della forma del diagramma delle tensioni prima della fessurazione:

$$k_3 = 0,25 \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \cdot \sigma_1} \right)$$

posto:

$$\sigma_1 = \sigma_{sr} = 36,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \frac{H - x_c - 7,5 \cdot \phi - \delta}{H - x_c - \delta} = 36,7 \cdot \frac{0,70 - 0,217 - 7,5 \cdot 0,02 - 0,04}{0,70 - 0,217 - 0,04} = 24,3 \text{ MPa}$$

Definisco quindi:

$$k_3 = 0,25 \cdot \left(\frac{36,7 + 24,3}{2 \cdot 36,7} \right) = 0,208$$

La distanza media fra le fessure vale quindi:

$$s_{rm} = 2 \cdot \left(0,04 + \frac{0,04}{10} \right) + 0,4 \cdot 0,208 \cdot \frac{0,02}{12,56 \cdot 10^{-4} / 0,038} = 0,138 \text{ m}$$

Noti la deformazione media delle barre d'armatura ε_{sm} e la distanza media tra le fessure s_{rm} , si può calcolare l'ampiezza media delle fessure:

$$w_m = 1,23 \cdot 10^{-3} \cdot 0,138 = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,169 \text{ mm}$$