- vincenzo.fiamma@unime.it

- Solo prova orale
- Libro: Citrini - Noseda

[redacted]

Ingegneria Fluviale ed Impianti Idroelettrici

Obiettivi formativi
Il corso di Ingegneria Fluviale e Impianti Idroelettrici approfondisce le conoscenze di base incontrate nel corso di Idraulica, ampliandone la visione teorico-interpretativa per arrivare a considerazioni essenziali per la figura dell'ingegnere. I temi principali del corso sono le acque superficiali (Correnti a superficie libera) e il moto vario nelle correnti in pressione (Colpo d'ariete). Data l'importanza della sperimentazione di laboratorio nei problemi idraulici, un altro argomento centrale è la teoria della modellazione; sono previste delle lezioni ed esercitazioni relative alla modellazione fisica e numerica di fenomeni idraulici (Similitudine e Modelli). Nel corso si affronterà il dimensionamento idraulico delle briglie aperte o selettive e verranno descritti e analizzati gli impianti Idroelettrici ad alta caduta e piccola portata. Il corso prevede, oltre alle ore di lezione, alcune ore di esercitazione per l'applicazione delle nozioni teoriche a problemi reali che possono interessare l'ingegnere civile.
La modalità di verifica finale prevede il sostenimento di una prova orale finalizzato ad accertare il livello di conoscenza e di comprensione raggiunto dallo studente dopo aver studiato la disciplina nonché di applicare le conoscenze acquisite e di individuare autonomamente soluzioni a problemi idraulici.

L'esame si esplica mediante una discussione di circa trenta minuti incentrata su almeno tre domande relative a diversi argomenti indicati nel programma della disciplina ed illustrati nel corso delle lezioni. Più specificatamente le domande saranno differenziate per grandi argomenti: idrostatica, idrodinamica, il moto vario nelle correnti in pressione, correnti a superficie libera.

Programma dettagliato

Proprietà e statica dei fluidi (1 credito)
Definizione di liquido. Grandezze dell'idraulica. Densità e peso specifico. Comprimibilità. Viscosità. Regimi di movimento. Sforzi interni nei liquidi in quiete. Equazione indefinita dell'idrostatica. Carico piezometrico. Strumenti di misura delle pressioni. Spinta su superfici piane. Equazione globale dell'equilibrio idrostatico. Spinta su superfici curve. Equilibrio dei corpi immersi. Stabilità dei corpi galleggianti.

Liquidi perfetti (1 credito)
Velocità e accelerazione. Elementi caratteristici del moto: traiettorie, linee di corrente. Tipi di movimento. Equazione di Eulero. Proiezione dell'equazione di Eulero lungo la tangente, la normale e la binormale di un punto di una traiettoria. Distribuzione della pressione nel piano normale. Correnti lineari. Il teorema di Bernoulli: interpretazione geometrica ed energetica del teorema di Bernoulli; applicazione del teorema di Bernoulli a processi di efflusso. Potenza di una corrente. Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente. Equazioni del moto vario per liquido perfetto: integrazione lungo una traiettoria e lungo una linea di corrente. Studio dell'avviamento del moto in una condotta. Studio delle oscillazioni di un pozzo piezometrico. Equazioni globali di equilibrio in condizioni dinamiche. Azioni dinamiche sulle turbine Pelton. Stramazzi: stramazzo Bazin; diga tracimante; stramazzo in parete grossa.

Modelli idraulici (0.5 crediti)
Analisi dimensionale: teorema Buckingham e sue applicazioni. Cenni sui modelli idraulici. Similitudine di Reynolds. Similitudine di Froude.

Fluidi reali (1 credito)
Equazione di Navier-Stokes. Equazione globale di equilibrio per un liquido reale. Applicazione dell'equazione di Navier al moto laminare: moto tra due piastre; moto in condotta circolare; moto in sezione rettangolare larga. Il moto turbolento: esperienza di Reynolds; equazione di equilibrio globale per il moto turbolento; genesi delle tensioni turbolente; distribuzione della velocità nella sezione circolare; indice di resistenza e sue espressioni per il tubo liscio e il tubo scabro; diagrammi di velocità in funzione dei parametri caratteristici del moto turbolento; formula di Colebrook; diagramma di Moody; problemi di progetto e di verifica risolti con il diagramma di Moody e con curve ausiliarie; dipendenza della perdita di carico per unità di lunghezza di tubazione dal diametro e dalla portata per i diversi tipi di moto; formule pratiche per il moto turbolento.

Moto vario nelle correnti in pressione (1 credito)
Impianti Idroelettrici. Il colpo d'ariete: descrizione del fenomeno; equazione del moto; equazione di continuità; integrali generali del colpo d'ariete; equazioni concatenate; determinazione del sovraccarico all'otturatore e in una generica sezione; formula di Allievi-Michaud.

GRANDEZZE E UNITÀ DI MISURA

SI

Sistema internazionale → entrato in vigore 1 Gennaio 2000

MASSA	LUNGHEZZA	TEMPO
M	L	T
Kg_{massa}	m	s

Vi sono 3 grandezze fondamentali o indipendenti e tutte le altre derivano da queste

ST

Sistema tecnico, non è più in vigore ma è utilizzato

F	L	T
Kg_{forza}	m	s

Vi sono 3 grandezze fondamentali l'unica differenza è la prima grandezza

Tutte le altre grandezze derivano da queste

GRANDEZZE CINEMATICHE → dipendono da lunghezza e tempo quindi non c'è differenza tra SI e ST

tempo	t T	T	s
velocità	V u s w	LT^{-1}	m/s
accelerazione	A g a	LT^{-2}	m/s^2
portata	Q	L^3T^{-1}	m^3/s
viscosità cinematica	ν	L^2T^{-1}	m^2/s

GRANDEZZE GEOMETRICHE → dipendono soltanto dalla lunghezza quindi non c'è differenza tra S.I. e S.T.

lunghezza	L ℓ	L	m
area	A	L^2	m^2
volume	W	L^3	m^3

GRANDEZZE DINAMICHE NEL S.I → dipendono da massa, lunghezza e tempo

massa	m, M	M	Kg
forza	F, S, P	MLT^{-2}	N
peso specifico	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	N/m^3
densità	ρ	ML^{-3}	Kg/m^3
viscosità dinamica	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	$\frac{N}{m^2} \cdot s$
pressione	p	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2
modulo di elasticità a compressione cubica	ε	$ML^{-1}T^{-2}$	N/m^2

$(\vec{F} = m \cdot \vec{A})$ $Kg \frac{m}{s^2} = N$

↓

Newton

tensione superficiale	s	$T^{-2} \cdot L$	$\frac{N}{m}$
energia	E, J	$M^2 L T^{-2}$	$N \cdot m$
Potenza	P	MLT^{-3}	$\frac{N \cdot m}{s} = W$

le sistema tecnico fu utilizzato fino al 1960

GRANDEZZE DINAMICHE NEL S.T.

Forza	F, S	M	Kg_{FORZA}
massa	m, M		$\frac{Kg \cdot s^2}{m}$
peso specifico	γ		Kg/m^3
densità	ρ		$\frac{Kg \cdot s^2}{m^4}$
viscosità dinamica	μ		$Kg \cdot s/m^2$
pressione	P		Kg/m^2
modulo di elasticità a compressione cubica	ε		Kg/m^2
tensione superficiale	s		Kg/m
energia	E, J		$Kg \cdot m$
potenza	P		$\frac{Kg \cdot m}{s} = CV$ (cavalli)

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$m = \frac{F}{a} = \frac{Kg \cdot s^2}{m}$

La differenza sta nel fatto che la massa è una grandezza derivata nel sistema tecnico

RELAZIONE TRA GRANDEZZE

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (II legge dinamica)

$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ (forza peso)

$$1 Kg_f = 1 Kg_m \cdot 9{,}81\ m/s^2$$

$$\boxed{Kg_f = 9{,}81 \frac{Kg \cdot m}{s^2} = 9{,}81\ N}$$

$$1\ CV = 75\ Kg_f \cdot \frac{m}{s} = 75 \cdot 9{,}81\ N \cdot \frac{m}{s} = 735\ W = 0{,}735\ KW$$

Analizziamo alcune grandezze utili per l'idraulica

PESO SPECIFICO

$$\gamma = \frac{Peso}{Volume} = \frac{m \cdot g}{V} = \rho g$$

ρ densità

Nel caso di acqua $\rho = 1000\ Kg/m^3$

$\gamma = \rho \cdot g = 1000\ Kg/m^3 \cdot 9{,}81\ m/s = 9806\ N/m^3$ S.I

$\gamma = \rho \cdot g = 1000\ Kg/m^3$ S.T. perchè $\gamma = \frac{1000}{9{,}81} \cdot 9{,}81 = 1000\ Kg/m^3$

$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1000}{9{,}81} = 102\ Kg \cdot s^2/m^2$ → vale nel sistema tecnico ma non deve essere utilizzato questo valore

Quindi per la densità dell'acqua si fa riferimento al S.I.

$\rho = 9806\ N/m^3$ ACQUA

$\rho = 133300\ N/m^3$ MERCURIO

Consideriamo corrente idrica e la sua forza di trascinamento che la corrente esercita su un corpo di area A esposto alla corrente

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2$$

- ρ: densità fluido
- C_d: coeff. di drag o di resistenza (numero adimensionale)
- v: velocità costante della corrente

Nella formula compaiono più grandezze perciò bisogna fare l'analisi dimensionale

$\rho = 1000\ Kg/m^3$ (acqua dolce)

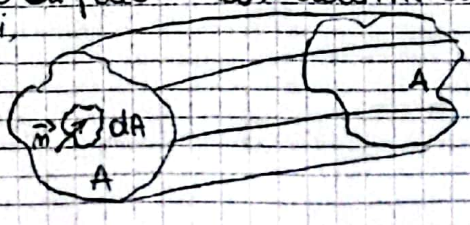
$\rho = 1027\ Kg/m^3$ (acqua salata)

$$\underbrace{\frac{Kg}{m^3}}_{\rho}\ \underbrace{m^2}_{A}\ \underbrace{\frac{m^2}{s^2}}_{v} = \frac{Kg \cdot m}{s^2} = N$$ → forza espressa in Newton

PORTATA IDRICA

$$Q = \frac{volume}{tempo}$$

Consideriamo un tubo di flusso ~~con~~ delimitato dalle linee di flusso con due sezioni, una di ingresso e l'altra di uscita



il vettore velocità è tangente alle linee di corrente

Consideriamo un'area infinitesima dA e il vettore normale all'area. Consideriamo la portata infinitesima che attraversa la sezione

$dQ_1 = v_1 \, dA_1$

v_1: velocità puntuale

Considerando un'area dA diversa con vettore $\vec{n}$ ortogonale. La velocità delle particelle è diversa, quelle più lontane dal centro hanno velocità minore

$dQ_2 = v_2 \cdot dA_2$

La portata totale è somma di questi contributi

$$\boxed{Q = \int_A v \, dA}$$ PORTATA COMPLESSIVA

$$\boxed{V = \frac{Q}{A}}$$ VELOCITÀ MEDIA (puntualmente la velocità è diversa)

COMPRIMIBILITÀ O MODULO DI ELASTICITÀ A COMPRESSIONE CUBICA

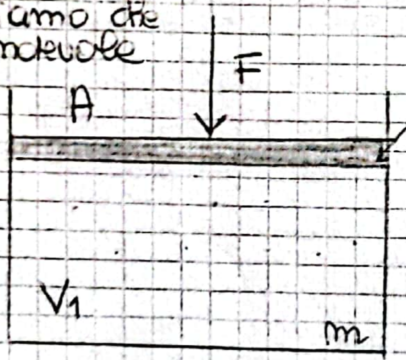
Misura l'attitudine dei fluidi a farsi comprimere e quindi deformare (sia liquidi che aeriformi)

I fluidi aeriformi sono più facilmente comprimibili di quelli liquidi

La comprimibilità ha le dimensioni di una pressione

$\varepsilon = N/m^2$

Supponiamo che F sia notevole



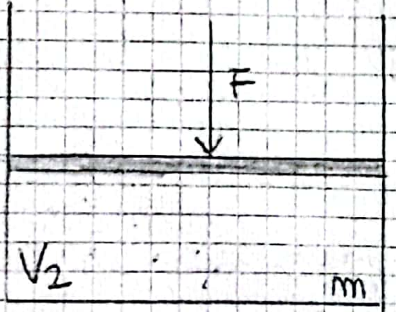
Per definire ε prendiamo un serbatoio con acqua sul quale vi è un pistone la pressione sulla superficie è 1 atm se non vi è il pistone

Applicando la forza sul pistone nascerà una sovrapressione

$\Delta p = \frac{F}{A}$ che si distribuisce su tutti i punti della massa fluida.

Quindi la pressione sarà $P + \Delta P$ in ogni punto

Applicando la forza diminuirà il volume



Differenza di volume proporzionale al Δp e quindi alla forza applicata ed è inversamente proporzionale alla comprimibilità

$\Delta V = V_2 - V_1 < 0$

$\Delta V = - V_1 \frac{\Delta P}{\varepsilon}$

Ricaviamo la comprimibilità

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_1}}$$

volume iniziale → può essere diverso quindi ricaviamo un'altra espressione funzione di m

La massa non subisce variazioni in seguito all'applicazione della forza.

$m = \rho \cdot V$

$dm = d\rho \cdot V + dV \cdot \rho = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$ → sostituendo

$$\varepsilon = -\frac{dp}{-d\rho/\rho} = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

$$\boxed{\varepsilon = \rho \frac{dp}{d\rho}}$$

densità liquido

$\varepsilon_{H_2O} = 2 \cdot 10^4 \ N/cm^2$ → VALORE MOLTO GRANDE

Ipotesi molto comune $\rho = cost$ ciò vuol dire che $d\rho = 0$, non ci sono variazioni di volume e quindi comprimibilità infinita e questo è coerente con la realtà poiché il suo valore è molto grande

Nel caso del colpo di ariete non si può trascurare la variazione di volume di un fluido e quindi della comprimibilità. Per comprendere quando si può trascurare la comprimibilità bisogna introdurre la celerità

CELERITÀ

Rappresenta la velocità di propagazione di un'onda sonora in un fluido

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}} = 1400 \ m/s \rightarrow \text{VALORE MOLTO GRANDE}$$

nel caso dell'acqua

In realtà questa velocità non riguarda solo le onde sonore ma anche le sovrappressioni

$$\varepsilon = c^2 \cdot \rho = \frac{dp}{d\rho} \cdot \rho$$

Secondo Pascal una variazione di sovrappressione si propaga istantaneamente, ciò non è proprio vero poiché la celerità non è infinita bensì pari a 1400 m/s

Il fluido risulta incomprimibile se $d\rho = 0$ → cioè VALE IL PRINCIPIO DI PASCAL

$\varepsilon \rightarrow \infty$

$c \rightarrow \infty$

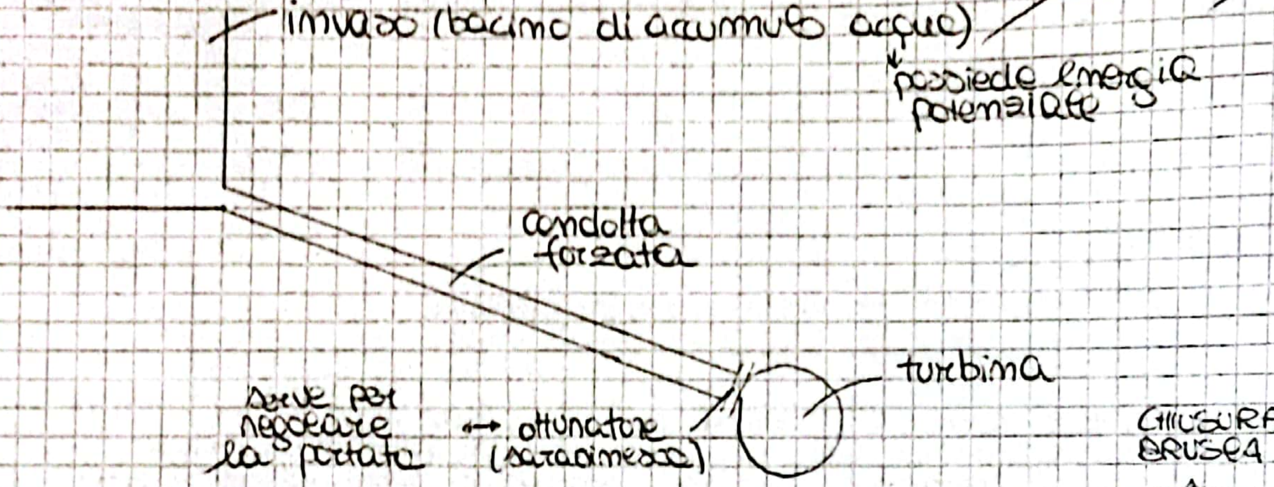
Questo è vero se la massa d'acqua è piccola

Ma se la massa d'acqua è grande dipende da come viene applicata la forza F, può essere istantanea o meno.
Se la forza è graduale, le sovrappressioni si propagano con una velocità elevata e quindi vale l'ipotesi di fluido incomprimibile.

Nelle lunghe condotte non è corretta l'ipotesi di fluido incomprimibile.
Nel caso di condotte lunghe circa 10 km o anche più, l'intervento di una saracinesca, ad esempio, provoca delle sovrappressioni che impiegano un po' di tempo a propagarsi perché anche se vale 1000 m/s ci sono punti abbastanza distanti e la nascita delle pressioni non è istantanea.

ESEMPIO
Schema impianto idroelettrico

~~E→∞~~ ~~c→∞~~

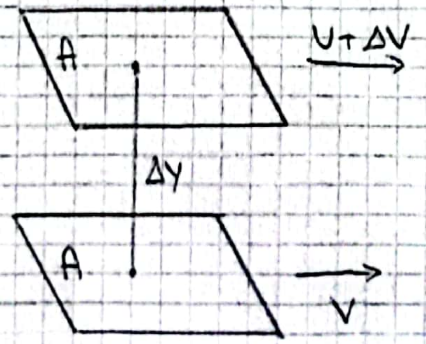


Può capitare che, in alcuni casi, bisogna chiudere la saracinesca.
Nascerà una sovrappressione, tutta l'energia cinetica si trasforma in una sovrappressione che si propaga con una celerità di circa 1000 m/s.
Se la condotta è lunga 1000 m, la sovrappressione arriverà all'imbocco dopo 1 s.
Non è corretto sostenere che la densità sia costante.

VISCOSITÀ DINAMICA

È una caratteristica dei fluidi.
Durante il moto di un fluido nascono sforzi tangenziali che sono proporzionali alla viscosità dinamica.

Moto semplice: laminare cioè le particelle si muovono in un'unica direzione e quindi il moto è piano. Le traiettorie sono parallele



Le particelle in esame sono poste a distanza ΔY e la velocità è diversa

ΔV ⇒ differenza velocità delle lamine

Consideriamo un fluido reale, quindi nascono delle forze di trascinamento (o resistenti) che una lamina esercita sull'altra

$$\boxed{T = \mu A \frac{\Delta V}{\Delta Y}}$$ FORZA DI TRASCINAMENTO

se il liquido è fermo lo sforzo è nullo

$$\boxed{\frac{T}{A} = \tau = \mu \frac{dV}{dy}}$$ SFORZO TANGENZIALE (Legge di Newton) → lo sforzo tang. è proporzionale alla viscosità e alla variazione di v lungo la normale alla superf.

$\mu = f(T)$ funzione temperatura, tanto più alta è la temperatura quanto meno viscoso è il fluido

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\mu = \frac{\tau}{dV} \cdot dy = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m \cdot s}{m}$$

S.I $\mu = \frac{N \cdot s}{m^2}$

$$\mu = \frac{kg \cdot \cancel{m}}{s^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{s}}{m^{\cancel{2}}} = \frac{kg}{m\,s}$$ → effettiva unità di misura

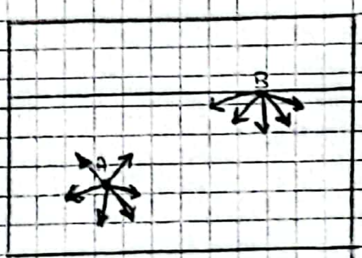
FORZA DI ADESIONE: forza tra particelle e pareti del recipiente

FORZA DI COESIONE: forza tra le particelle del liquido

TENSIONE SUPERFICIALE

Esprime le forze di coesione tra le molecole superficiali di un liquido

Considériamo un serbatoio con una massa d'acqua



La particella A è in equilibrio poiché la risultante delle forze è nulla

La particella B non è in equilibrio e la risultante delle forze è diversa da zero.

Questo giustifica la forma delle gocce d'acqua

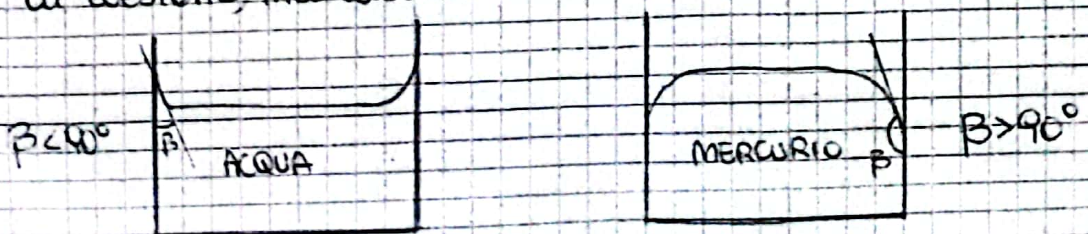
$S = \frac{L}{\Delta A}$ → lavoro per ridurre l'area; ΔA → variazione di area

$S_{H_2O} = 0{,}073 \; N/m$

$S_{Hg} = 0{,}559 \; N/m$

Per deformare una superficie bisogna compiere un lavoro per ridurre la sua area $\frac{N \cdot \cancel{m}}{m^{\cancel{2}}}$

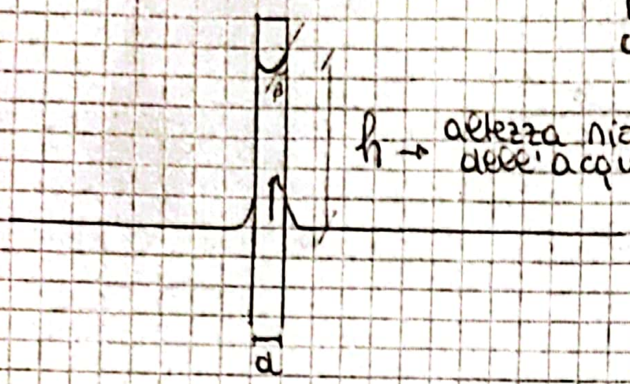
Nel caso dell'acqua prevalgono le forze di adesione su quelle di coesione, nel caso del mercurio vale il viceversa



CAPILLARITÀ

la capillarità rappresenta la risalita dell'acqua lungo tubicini che hanno un piccolo diametro

inserendo il tubicino si formano dei menischi



$h \rightarrow$ altezza risalita dell'acqua

tensione superficiale

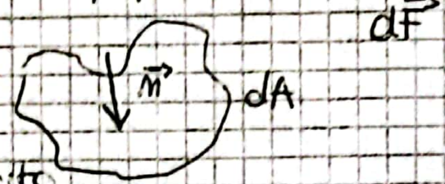
$$h = \frac{4 \cdot \delta \cos\beta}{\gamma d}$$

Lezione 2 2022/02/24

PRESSIONE

Grandezza più importante dell'idraulica. La pressione è legata allo sforzo.
Per capire cosa sia lo sforzo consideriamo una massa d'acqua ed isoliamo una superficie infinitesima di area dA. L'acqua è a contatto con la superficie inferiore e superiore.

Consideriamo la faccia superiore e il versore $\vec{n}$ ortogonale alla superficie (i liquidi non supportano sforzi di trazione)
Tutta la massa d'acqua che sta a contatto con la superficie esercita su di essa una forza dF

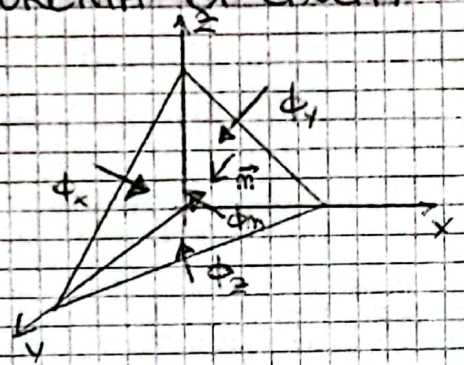


Lo sforzo è un vettore orientato come dF

$$\vec{\phi} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

Lo sforzo è legato alla normale alla superficie mediante un teorema

TEOREMA DI CAUCHY O DEGLI SFORZI



Consideriamo un sistema di assi cartesiani xyz e un tetraedro con una faccia che interseca i tre assi
Il volumetto è circondato da acqua che esercita degli sforzi sulle facce
Il versore $\vec{n}$ è ortogonale alla faccia che interseca i tre assi

Disegniamo sulla figura gli sforzi esercitati su ogni faccia.

Tuttavia non agiscono soltanto le forze di superficie ma anche di massa infatti per il II principio della dinamica:

$$d\vec{F} = \underbrace{d\vec{F}_s}_{\text{forze di superficie}} + \underbrace{d\vec{F}_m}_{\text{forze di massa (proporzionali alla massa)}} = \vec{A}\, dm$$

Introduciamo un'ipotesi: le forze di massa sono trascurabili in quanto proporzionali alla massa e quindi al volume dxdydz -> infinitesimi del terzo ordine
Quelle di superficie invece sono infinitesimi del secondo ordine.

$$d\vec{F} = d\vec{F}_s + \cancel{d\vec{F}_m} = \cancel{\vec{A}\, dm} \quad \rightarrow \sum d\vec{F}_s = 0$$

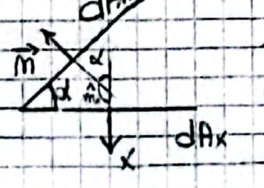
Esplicitiamo la somma delle forze di superficie:

$$\vec{\Phi}_x\, dA_x + \vec{\Phi}_y\, dA_y + \vec{\Phi}_z\, dA_z + \vec{\Phi}_n\, dA_n = 0$$

$$dA_x = dA_n \cos\underbrace{\alpha}_{\text{angolo formato dalla faccia } dA_x \text{ e } dA_n}$$

$$dA_y = dA_n \cos\beta$$

$$dA_z = dA_n \cos\gamma$$



$180° = \alpha + \hat{n}_x \rightarrow \alpha = 180 - \hat{n}_x$

$\cos\alpha = \cos 180 \cos\hat{n}_x + \sin 180 \sin\hat{n}_x$

$\cos\alpha = -\cos\hat{n}_x$

$\vec{\Phi}_n\, \cancel{dA_n} - \vec{\Phi}_x\, \cancel{dA_n} \cos\hat{n}_x - \vec{\Phi}_y\, \cancel{dA_n} \cos\hat{n}_y - \vec{\Phi}_z\, \cancel{dA_n} \cos\hat{n}_z = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos\hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos\hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos\hat{n}_z}$$

PRIMA FORMULAZIONE DEL TEOREMA:
lo sforzo Φ_n è combinazione lineare degli sforzi che agiscono sulle facce ortogonali

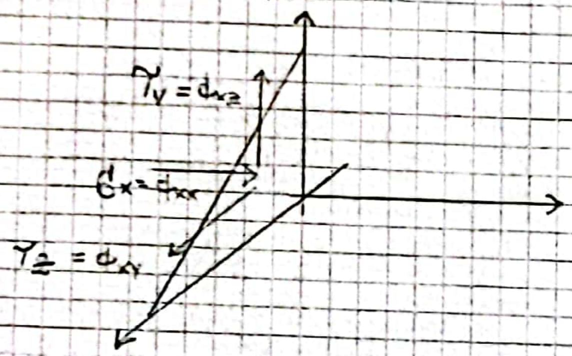
Proiettiamo la relazione lungo i tre assi (x, y, z)

$\Phi_{nx} = \Phi_{xx} \cos n_x + \Phi_{yx} \cos n_y + \Phi_{zx} \cos n_z$

$\Phi_{ny} = \Phi_{xy} \cos n_x + \Phi_{yy} \cos n_y + \Phi_{zy} \cos n_z$

$\Phi_{nz} = \Phi_{xz} \cos n_x + \Phi_{yz} \cos n_y + \Phi_{zz} \cos n_z$

Le componenti con indici uguali sono ortogonali alla superficie e li indichiamo con σ, gli altri sono sforzi tangenziali e si indicano con τ



Valgono le relazioni di simmetria per gli sforzi tangenziali

$\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$

$\Phi_{xz} = \Phi_{zx}$

$\Phi_{yz} = \Phi_{zy}$

La matrice con 9 elementi si riduce a 6 elementi.
Gli sforzi tangenziali sono proporzionali alla viscosità dinamica e alla variazione di velocità

$$\tau = \mu \frac{dV}{dA}$$

Se il fluido è in quiete $dV=0$ e quindi $\tau = 0$ (sforzi tangenziali nulli)

$\Phi_{nx} = \Phi_{xx} \cos\hat{n}_x$

$\Phi_{ny} = \Phi_{yy} \cos\hat{n}_y$

$\Phi_{nz} = \Phi_{zz} \cos\hat{n}_z$

Ma il vettore Φ_n si può scomporre lungo le sue componenti

$\Phi_{nx} = \Phi_n \cos\hat{n}_x$

$\Phi_{ny} = \Phi_n \cos\hat{n}_y$

$\Phi_{nz} = \Phi_n \cos\hat{n}_z$

$\phi_m \cancel{\cos \hat{m}_x} = \phi_{xx} \cancel{\cos \hat{m}_x}$

$\phi_m \cancel{\cos \hat{m}_y} = \phi_{yy} \cancel{\cos \hat{m}_y}$

$\phi_m \cancel{\cos \hat{m}_z} = \phi_{zz} \cancel{\cos \hat{m}_z}$

Perciò in idrostatica lo sforzo non dipende dalla giacitura

$$\phi_m = \phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = P$$

La pressione coincide con il modulo dello sforzo.

$$\vec{\phi} = P \cdot \vec{m}$$

ha un punto di applicazione, un verso ed una direzione

CONSEGUENZA DEL TH. DI CAUCHY
lo sforzo ha sempre la direzione di $\vec{m}$ cioè ortogonale alla superficie e l'intensità dello sforzo è la pressione

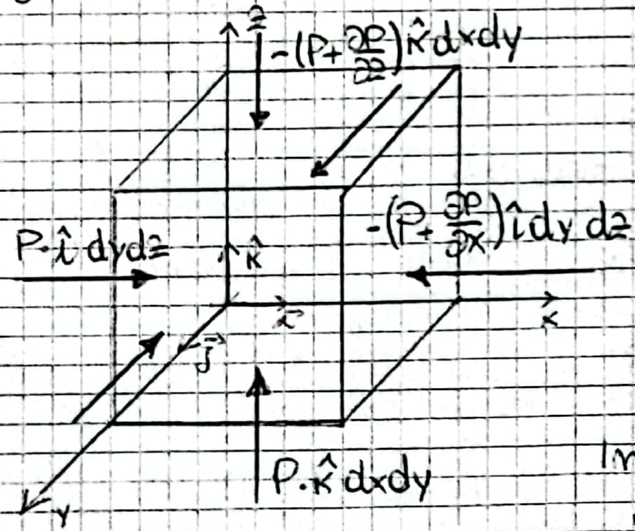
Unità di misura della pressione $Pa = \frac{N}{m^2}$

La forza si ottiene moltiplicando lo sforzo per una superficie

L'EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA

Ci permette di calcolare la pressione in tutti i punti di una massa.

Consideriamo un cubo infinitesimo con 6 facce e i versori ortogonali alle facce



il cubo ha un volume infinitesimo e una massa infinitesima

$dV = dx\,dy\,dz$

$dm = \rho\,dx\,dy\,dz$

Vale la seconda legge della dinamica e quindi per il teorema di Cauchy gli sforzi esercitati dall'acqua sono ortogonali alle facce

In idrostatica vale la relazione

$\vec{dF} = \vec{0}$

$\vec{dF_s} + \vec{dF_m} = \vec{0}$

$\vec{dF_m}$ non si trascurano in questo caso

La forza che agisce sulla faccia yz è $P \cdot \hat{\imath} \cdot dy\,dz$

La forza di massa per unità di massa è:

$\vec{R} = -g\,\text{grad}\,z$ (ha le dimensioni di un'accelerazione)

$\vec{dF_m} = \rho\,dx\,dy\,dz\,\vec{R}$

Si ottiene:

$\rightarrow$

$$p\vec{i}\,dydz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\vec{i}\,dydz + p\vec{j}\,dxdz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\vec{j}\,dxdz +$$
$$+ p\vec{k}\,dxdy - \left(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\vec{k}\,dxdy + \rho\vec{R}\,dxdydz = \vec{0}$$

$$\rho\vec{R}\,\cancel{dxdydz} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\cancel{dxdydz} = \vec{0}$$

$$\boxed{\rho\vec{R} = \text{grad}\, p}$$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI
(indefinita perché vale per un volume infinitesimo dxdydz)

Esplicitiamo $\vec{R}$

$$-\rho g\,\text{grad}\, z = \text{grad}\, p$$
$$-\gamma\,\text{grad}\, z = \text{grad}\, p$$

Nell'ipotesi di ρ=cost vale γ=cost:

$$-\text{grad}(\gamma z) = \text{grad}\, p$$
$$\text{grad}(p+\gamma z) = 0$$
$$\text{grad}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

Integriamo primo e secondo membro

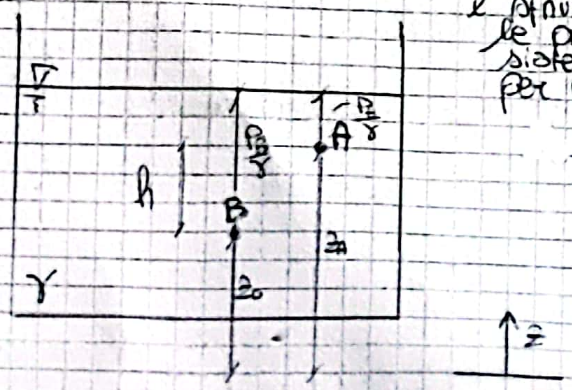
$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost.}}$$

z → altezza geodetica
$\frac{p}{\gamma}$ → altezza piezometrica
$z + \frac{p}{\gamma}$ → carico piezometrico

LEGGE DI STEVINO
permette di calcolare la pressione in qualsiasi punto del fluido nota che sia la pressione in un punto

Enunciato teorema:
"Un massa fluida in quiete ha un carico piezometrico costante in tutti i punti"

Supponiamo di avere un serbatoio con acqua a superficie libera e sfruttiamo la legge per calcolare le pressioni. Fissiamo un sistema di riferimento arbitrario per valutare le quote



$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} = cost$ → ciò vale per qualsiasi punto

Immaginiamo di voler calcolare P_A nota che sia P_B

$$\frac{P_A}{\gamma} = \frac{P_B}{\gamma} + (z_B - z_A)$$

$$P_A = P_B + \gamma(z_B - z_A) \qquad z_B < z_A$$

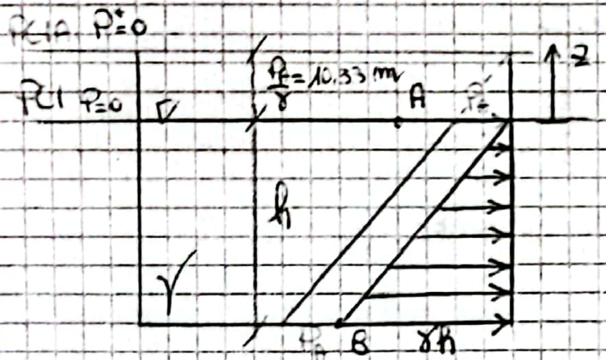
$$P_A = P_B - \gamma h \qquad \text{con } h = z_A - z_B$$

Analogamente si può determinare P_B nota che sia P_A

$$P_B = P_A + \gamma h$$

Scendendo la pressione aumenta e quindi il contributo γh va sommato

Consideriamo lo stesso serbatoio, ma il sistema di riferimento è sulla superficie libera



$z + \frac{P}{\gamma} = cost.$ LEGGE DI STEVINO

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = -z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

z_A ↓ 0, $\frac{P_A}{\gamma}$ ↓ 0 perché non c'è acqua al di sopra

$$z_B = \frac{P_B}{\gamma} = h \rightarrow P_B = \gamma \cdot h$$ affondamento nullo

La pressione si può calcolare in qualsiasi punto noto che sia il PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI cioè il piano con pressioni nulle.

Al di sopra del PCI la pressione è negativa, al di sotto è positiva.

La pressione varia linearmente con la profondità quindi nota la pressione in due punti si traccia l'andamento. Questo rappresenta il solo contributo dovuto all'acqua.

Ma la pressione dovuta all'aria non è trascurabile.

$1\ m^3$ di aria pesa 1,2 kg perché $P_a = 101280\ N/m^2$

Quindi alla pressione dell'acqua si somma quella dell'aria (in assoluto)

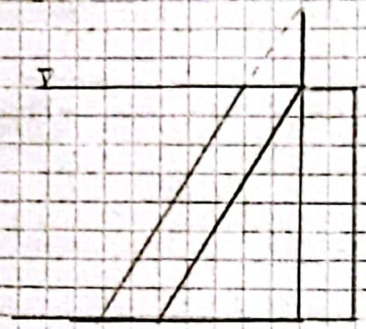
Bisogna tenere conto del PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO che si trova al di sopra di quello relativo

$$P^* = P_a + P$$

P^* pressione assoluta

Tuttavia si tiene conto della pressione relativa, cioè quella relativa alla presenza del fluido perché quella dell'aria si elide.

Volendo calcolare le sollecitazioni sulla parete il contributo dovuto all'aria è uguale e opposto perciò si elide

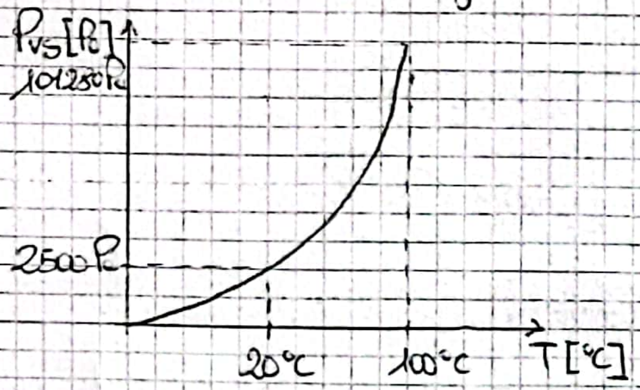


La pressione assoluta P^* è sempre maggiore o uguale a zero.
Quella relativa può essere negativa ma non inferiore a $-P_a$

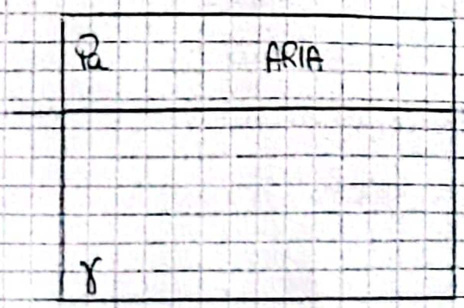
Introduciamo la $P_{vs}(T)$ cioè la PRESSIONE DI VAPORE SATURO che è funzione della temperatura
È una caratteristica dei liquidi. Si può calcolare con la seguente formula:

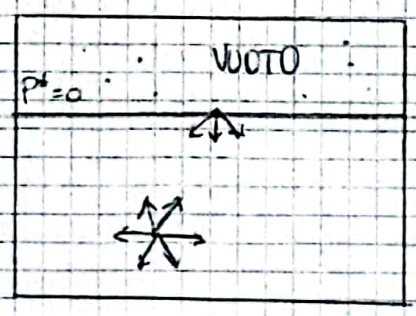
$$\boxed{P_{vs}(T) = 611 \exp\left(\frac{17{,}27\,T}{237{,}3+T}\right)} \qquad T\,[°C]$$

Oppure si può utilizzare un grafico che lega P_{vs} e T



Per capire cosa sia la $P_{vs}(T)$ consideriamo un serbatoio e immaginiamo di creare il vuoto mediante una pompa. La pressione ass. passa ad un valore pari a zero.





le particelle hanno una certa energia dovuta all'agitazione molecolare. Quelle sulla superficie possono avere una piccola energia e scappano passando a vapore.
La pressione aumenta man mano che le particelle passano allo stato di vapore.

Ci sarà un momento in cui il numero di particelle che passano dallo stato liquido a vapore sarà uguale a quelle che dal vapore passano al liquido
in questo caso si raggiunge la PRESSIONE DI VAPORE SATURO

P_{vs} → situazione in cui liquido e vapore sono in equilibrio

Ma perché le pressioni assolute non possono essere minori di zero?

Supponiamo che nel serbatoio $P_{vs} = 2500$ Pa togliendo l'aria nel serbatoio la pressione assoluta diminuisce

Mettendo una pentola sul fornello, aumenta la P_{vs}
L'acqua inizia a bollire quando:

$$P_{vs}(T) = P_{ambiente} \text{ (o atmosferica)}$$

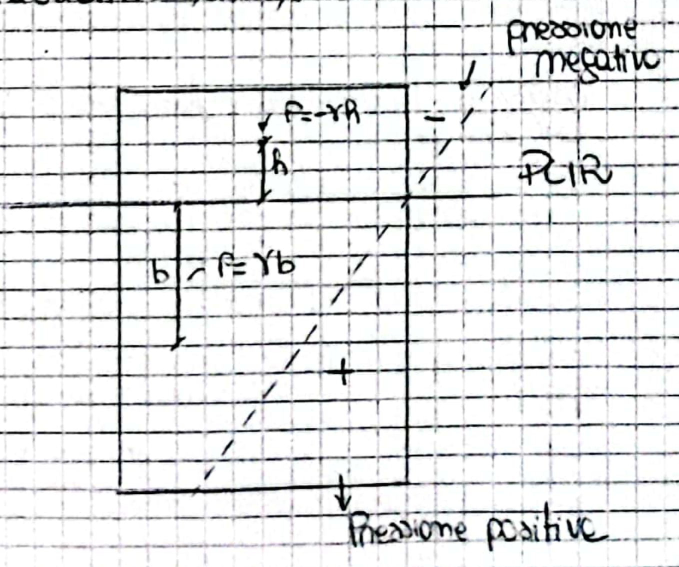
[In montagna l'acqua bolle ad una temperatura più piccola perché diminuisce la pressione atmosferica]

La grande massa di vapore si ha quando il liquido inizia a bollire. Togliendo l'aria, la pressione ambiente diventa uguale a 2500 cioè $P_{vs}(20°C) = 2500$ Pa se il liquido si trova a 20°C

Il PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO si trova ad una distanza pari a P_{vs}/γ dal pelo libero

La pressione relativa non raggiungerà mai il valore $-P_a$ perché bisogna tenere conto della $P_{vs}(T)$

Consideriamo un serbatoio con PCIR noto

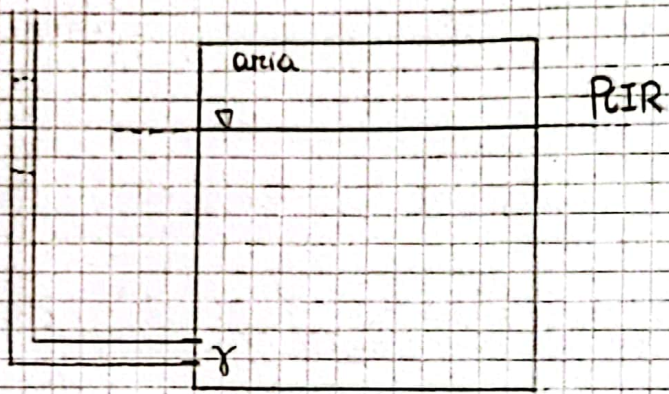


Nel caso di serbatoi a superficie libera il PCIR è noto altrimenti, nel caso di serbatoi chiusi servono degli strumenti che misurano la pressione

STRUMENTI DI MISURA

1 bar = 100.000 N/m^2 760 mmHg = 1 atm = 101325 Pa

Supponiamo di avere un serbatoio chiuso per determinare la pressione in tutti i punti bisogna determinare la posizione del PCI ma se il serbatoio è chiuso non è facile



Il PCIR si può determinare con un PIEZOMETRO.

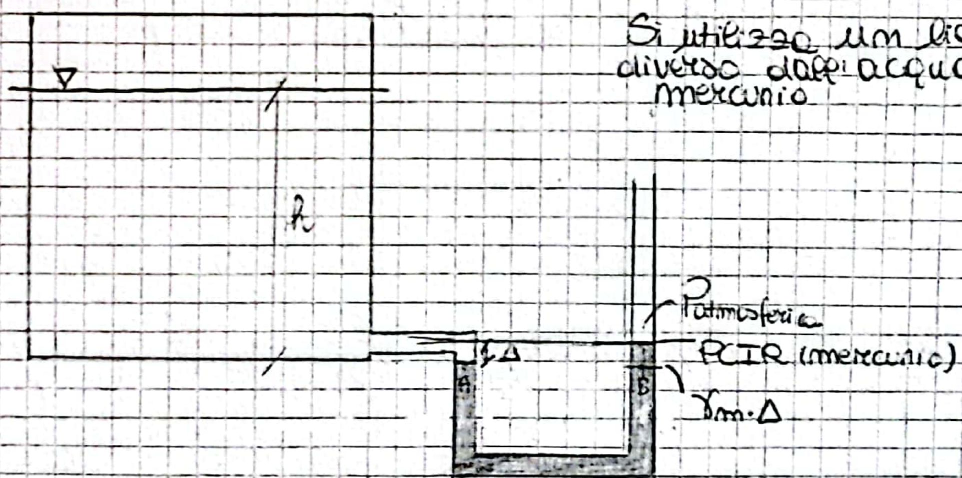
Il livello d'acqua nel serbatoio sarà uguale a quello del piezometro

Se l'aria presente nel serbatoio è in pressione o depressione il PCIR non coincide con la superficie libera

Se il serbatoio è grande non è conveniente utilizzare il piezometro ma altri strumenti

MANOMETRO SEMPLICE

Si utilizza un liquido diverso dall'acqua es. mercurio



Per stevino i punti alla stessa quota hanno la stessa pressione

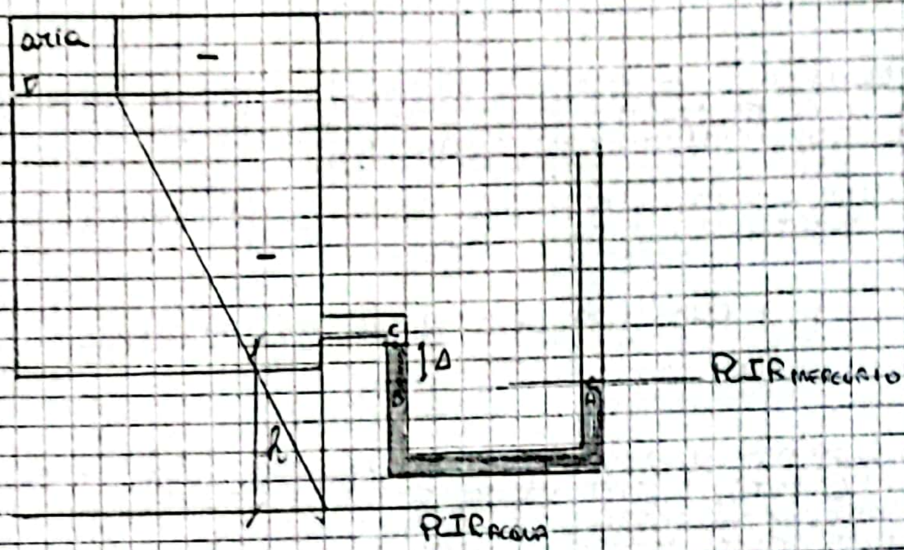
$P_A = P_B$ $\quad P_A = \gamma_m \Delta = \gamma \cdot h$

affondamento del punto rispetto al PCIR

$$\gamma = \frac{\gamma_m \Delta}{h}$$

Scansionato con CamScanner

Supponiamo che l'aria al di sopra del fluido sia in (P.E) pressione



$P_A = 0$

$P_B = 0$ (per Stevino)

$P_C = -\gamma\Delta$ (perché si trova al di sopra del PCIR mercurio)

$P_C = -\gamma \cdot h$

$-\gamma h = \gamma_m \Delta$ $\qquad h = -\dfrac{\gamma_m \cdot \Delta}{\gamma}$

il manometro semplice può andar bene in laboratorio ma non è molto comodo per altre utilità

MANOMETRO SEMPLICE

$1\ bar = 100.000\ N/m^2$

$1\ PSI = 0{,}0689\ N/m^2$

Misura le pressioni relative del punto dove è collegato il manometro

Le pressioni si possono misurare anche in metri di colonna d'acqua cioè altezza piezometrica

$\dfrac{P}{\gamma}$ $\qquad 10\,m \simeq 1\,atm$

La pressione sanguigna si misura in mmHg = torr cioè millimetri di colonna di mercurio

TRASDUTTORE DI PRESSIONE o misuratore di livello

Sono strumenti elettronici che restituiscono un segnale in corrente. Vi è una membrana che si deforma con la pressione e alla deformazione segue un segnale elettrico che viaggia sui fili a 24V il segnale viene acquisito da una stazione di acquisizione

Ogni strumento ha un fondo scala cioè valore minimo e massimo di pressione che può acquisire

Lo strumento restituisce una corrente, a partire da questa si determina la pressione e quindi si può determinare l'altezza piezometrica rapportando la pressione al gamma del liquido.

Esistono trasduttori ANALOGICI e DIGITALI. I primi misurano la pressione ma restituiscono una misura di corrente o di tensione che viene successivamente convertita.

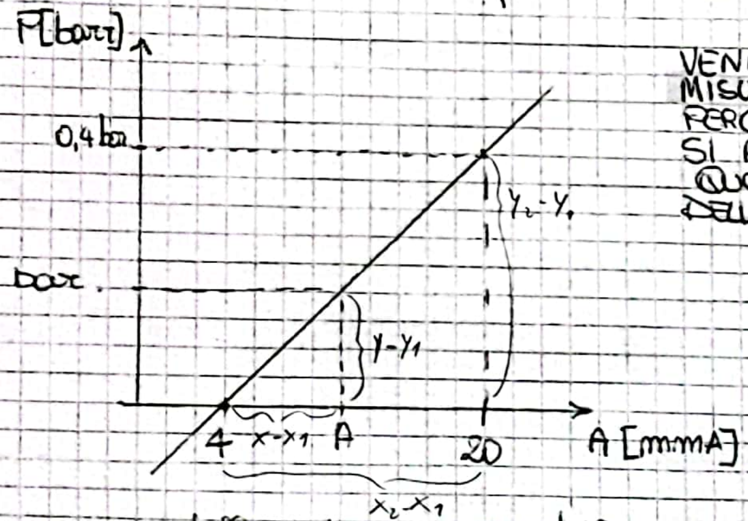
Ogni strumento ha un valore min. di pressione ed il fondo scala ovvero il valore max.

0 bar → valore min. 0,4 bar (cioè 4 m di colonna d'acqua) → valore max

Lezione 3

2021/02/26

Questi strumenti possono essere chiamati anche 4-20 mmA perchè a 0 bar corrispondono 4 mmA (cioè in aria) e a 0,4 bar la corrente è 20 mmA.
Tutti gli altri valori sono compresi in questo range.
Vi è una RELAZIONE LINEARE tra pressione e corrente



VENGONO CHIAMATI MISURATORI DI LIVELLO PERCHE' NOTA LA PRESSIONE SI PUO' RICAVARE LA QUOTA DI AFFONDAMENTO DELLO STRUMENTO

Nota l'equazione della retta è possibile calcolare la pressione nota la corrente

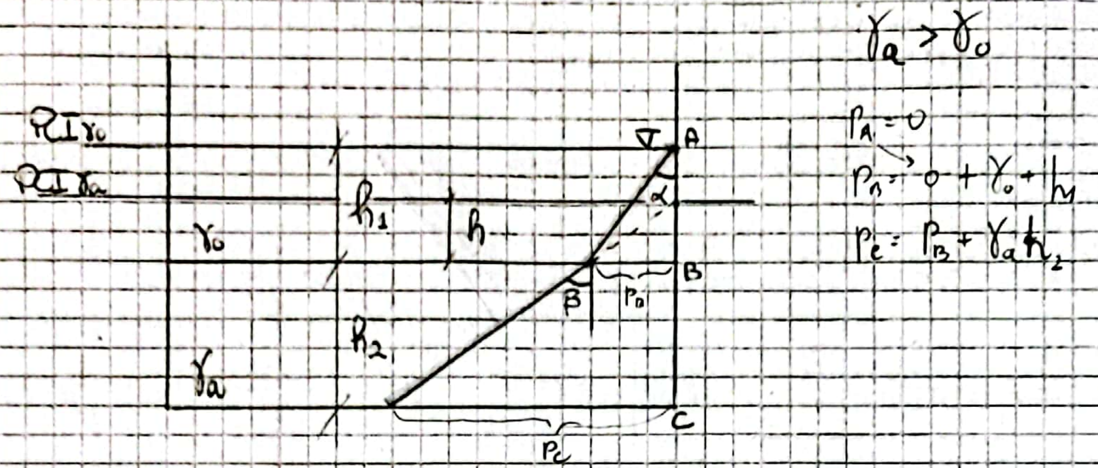
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$ similitudine tra due triangoli

$$\frac{0,4-0}{20-4}=\frac{bar-0}{A-4} \rightarrow \frac{0,4}{16}=\frac{bar}{A-4} \rightarrow bar=0,025(A-4)$$

$$\boxed{bar=0,025A-0,1}$$

APPLICAZIONE LEGGE DI STEVINO

Supponiamo di avere un serbatoio a superficie libera 10:00



All'interno del serbatoio vi sono due liquidi, ad esempio acqua e olio.
Applicando la legge di Stevino vogliamo tracciare il PCI e calcolare le pressioni in A-B-C

Il PCI del liquido che sta in alto coincide con la superficie libera quindi:

$$P_A = 0$$

La pressione nel punto B è uguale a

$$P_B = P_A + \gamma_o h_1 = \gamma_o h_1$$

Analogamente:

$$P_C = P_B + \gamma_a h_2 = \gamma_o h_1 + \gamma_a h_2$$

Possiamo tracciare il diagramma degli sforzi che per il teorema di Cauchy sono ortogonali alla superficie

$\alpha < \beta$ in quanto $\gamma_o < \gamma_a$

Nota la pressione in B possiamo calcolare il PCI di γ_a

$P_B = \gamma_a \cdot h$
↳ affondamento di B rispetto al PCI γ_a

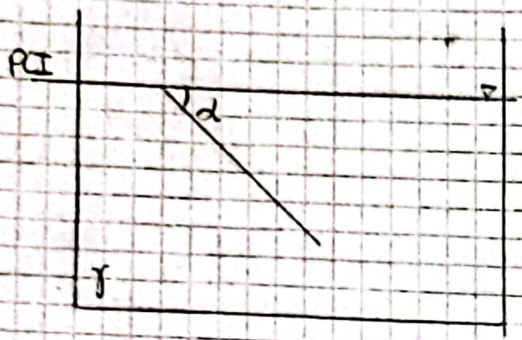
$\gamma_o h_1 = \gamma_a \cdot h$

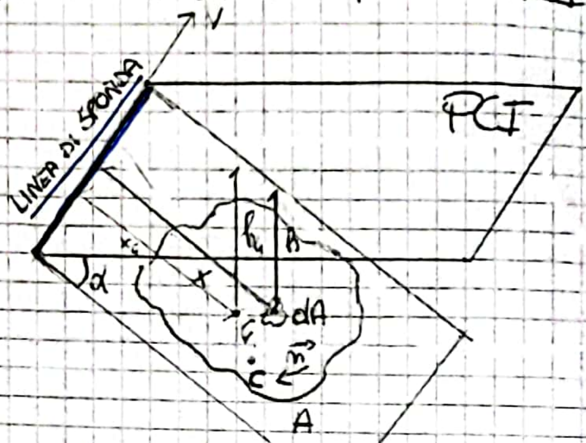
$h = \frac{\gamma_o}{\gamma_a} h_1$ poiché $\frac{\gamma_o}{\gamma_a} < 1$ $h < h_1$

Il diagramma delle pressioni è importante per calcolare la spinta che il liquido esercita sulla parete in quanto è sufficiente valutare il volume del diagramma

SPINTA SU SUPERFICI PIANE (16:40)

Consideriamo un recipiente ed una superficie inclinata all'interno di esso che appartiene ad un piano inclinato di α rispetto al PCI noto.





La spinta sulla superficie è l'incognita.
Quindi bisogna individuare direzione, verso, modulo e punto di applicazione.
Per il th. di Cauchy lo sforzo di pressione è ortogonale e quindi anche la spinta.

Per il calcolo del modulo isoliamo una superficie infinitesima dA che si può approssimare con un punto affondato di h rispetto al PCI.

La linea di sponda è l'intersezione del piano dei carichi idrostatici e del piano che contiene la superficie di normale $\vec{m}$

$h = x \operatorname{sen}\alpha$

Sulla superficie il liquido esercita una spinta

$d\vec{S} = P \cdot dA \cdot \vec{m}$ con $P = \gamma \cdot h$

Scegliendo un'area diversa la spinta sarà diversa poiché dipende dall'affondamento. Volendo calcolare la spinta totale si ricorre all'integrale

$$\vec{S} = \int_A d\vec{S} = \int_A P\vec{m}\, dA = \int_A \gamma \cdot h\, \vec{m}\, dA = \int_A \gamma x \operatorname{sen}\alpha\, \vec{m}\, dA$$

Per definizione $\int_A x \cdot dA =$ MOMENTO STATICO DELLA SUPERFICIE RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA

$$\int_A x\, dA = \underbrace{x_G}_{\text{posizione baricentro della superficie}} \cdot A$$

$$\vec{S} = \gamma \underbrace{x_G \cdot A \cdot \operatorname{sen}\alpha}_{h_G} \cdot \vec{m} = \underbrace{\gamma \cdot h_G}_{\substack{P_G \\ \text{pressione baricentro}}} \cdot A \cdot \vec{m}$$

$$\boxed{\vec{S} = P_G \cdot A \cdot \vec{m}}$$

La spinta è un vettore di modulo $S = p_G A$, direzione come n. Se il segno è positivo allora il verso è concorde ad n altrimenti è opposto.

Bisogna calcolare anche il punto di applicazione o CENTRO DI SPINTA di coordinate x_c, y_c

Per calcolare le coordinate si sfrutta la definizione di momento. Consideriamo la relazione scalare.

$$S \cdot x_c = \int_A dS \cdot x$$

IL MOMENTO RISULTANTE È UGUALE ALLA SOMMA DEI MOMENTI DELLE SPINTE ELEMENTARI

$$S \cdot x_c = \int_A dS \cdot x = \int_A p \cdot x \cdot dA = \int_A \gamma h \, x \, dA = \int_A \gamma x \operatorname{sen}\alpha \, x \, dA =$$

$$= \int_A \gamma \operatorname{sen}\alpha \, x^2 \, dA = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int_A x^2 \, dA$$

Ricordiamo che $\int_A x^2 dA$ è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse y

$$S \cdot x_c = \gamma \operatorname{sen}\alpha \cdot I \qquad \text{con} \qquad S = \gamma h_G \cdot A = \gamma \cdot x_G \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot A$$

$$\cancel{\gamma} x_G \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \, A \cdot x_c = \cancel{\gamma} \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \, I$$

$$x_c = \frac{I}{x_G A} = \frac{I}{M}$$

↳ momento statico sezione

Per ricavare l'altra coordinata si ragiona allo stesso modo

$$S \cdot y_c = \int_A dS \cdot y = \int_A \gamma x \operatorname{sen}\alpha \, y \, dA = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int_A xy \, dA$$

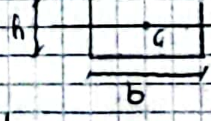
Ricordiamo che $\int_A xy \, dA$ è il momento centrifugo

$$y_c = \frac{I_{xy}}{M}$$

Se la superficie ha un asse di simmetria $I_{xy} = 0$ quindi $y_c = 0$ e per individuare la posizione del centro di spinta bisogna calcolare esclusivamente x_c

→ Il centro di spinta non dipende dall'inclinazione della superficie e che è più lontano del baricentro rispetto alla linea di sponda

Il momento d'inerzia si può calcolare sfruttando il teorema di Steiner



$$I_0 = \frac{1}{12} h^3 b$$

$$I = I_0 + A x_G^2$$

↓ momento d'inerzia di un asse passante per il baricentro e parallelo alla linea di sponda → tabellato

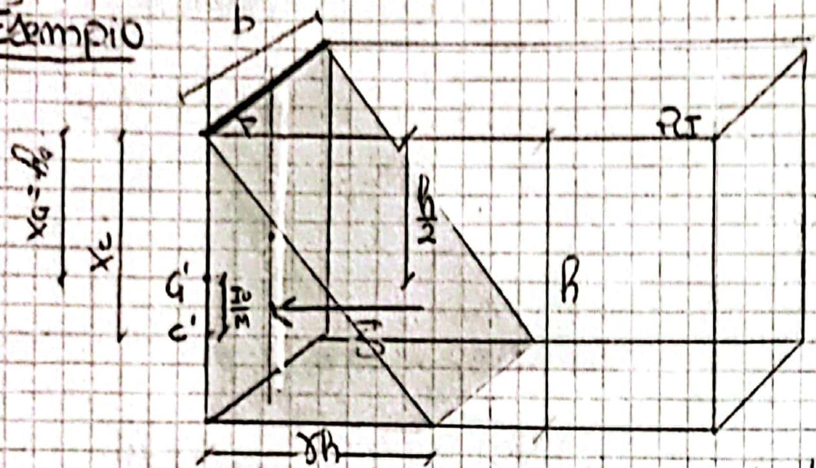
$$I_0 = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$x_C = \frac{I}{M} = \frac{I_0}{M} + \frac{A x_G^2}{M} = \frac{I_0}{A x_G} + \frac{\cancel{A} x_G^{\cancel{2}}}{\cancel{A x_G}}$$

$$\boxed{x_G = \frac{I_0}{M} + x_G}$$

[38:00]

Esempio



Consideriamo un serbatoio a pelo libero e calcoliamo la spinta sulla parete verticale
(se non fosse stato a pelo libero, con uno strumento di misura avremmo determ. la pressione in un punto e poi in quello di interesse)

$$S = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot h \cdot b \qquad x_C = \frac{I_0}{M} + x_G$$

eccentricità

se la superficie è verticale $x_G = h_G$ altrimenti se è inclinata:

$$x_G = \frac{h_G}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Nel caso in esame.

$$x_C = \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{12} h^{\cancel{3}} \cancel{b}}{\frac{h}{2} \cancel{b} \cancel{h}} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3} h$$

Quindi:

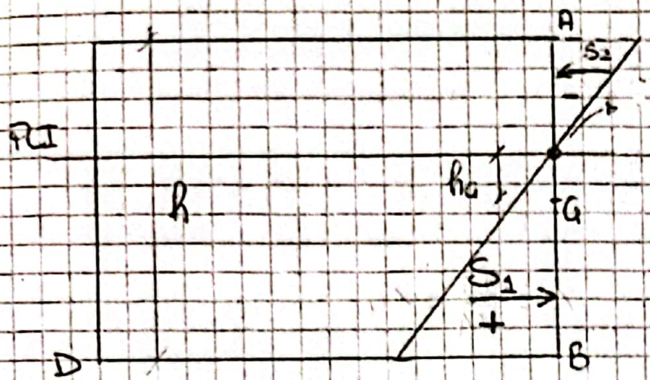
$$S = \frac{1}{2} \gamma h^2 b \qquad x_C = \frac{2}{3} h$$

La spinta si può calcolare geometricamente dal diagramma delle pressioni e in particolare dal volume

$$S = \underbrace{\frac{\gamma h \cdot h}{2}}_{\text{AREA TRIANGOLO}} \cdot \underbrace{b}_{\text{SPESSORE}}$$

Quindi entrambi i metodi danno lo stesso risultato ma nel caso di una superficie parzializzata non si può applicare il primo metodo

Esempio



Consideriamo un serbatoio chiuso con PCI noto

linea di sponda rappresentata da un punto

Noto il baricentro della parete, si valuta h_G e si calcola la spinta

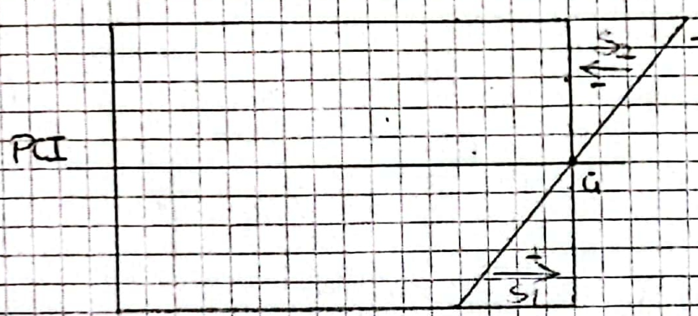
$$S = \gamma h_G \cdot A$$

Tracciamo il diagramma delle pressioni

$$x_C = \frac{I_0}{M} + x_G \qquad \text{con } x_G = h_G$$

$$S = S_1 - S_2 \quad \text{risultante delle spinte} \quad S = \gamma h_G \cdot A$$

Supponiamo che il PCI passi per il baricentro



In questo caso, applicando la formula la spinta dovrebbe essere nulla

$h_G = 0 \qquad S = \gamma h_G A = 0$

La spinta totale è nulla ciò vuol dire che $S_1 = S_2$

$$x_C = \frac{I_0}{M} + x_G$$

$M = x_G \cdot A$ → in questo caso $M = 0$ quindi $x_C \rightarrow \infty$

(x_G: distanza baricentro linea di sponda)

Per calcolare la spinta sul fondo è ancora più semplice perché la pressione è uguale su tutti i punti ed il diagramma è rettangolare

$$S = \gamma \cdot h_G \cdot A$$

Nel caso di superfici orizzontali $\boxed{x_G = x_C}$

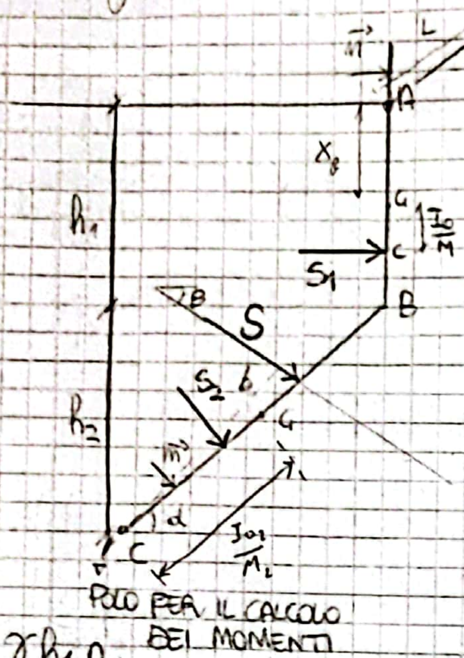
Se $P_G > 0$ → $x_C > x_G$ e anche $S > 0$

Se $P_G < 0$ (PCI al di sotto di G) → $x_C < x_G$ e S avrà verso opposto a $\vec{n}$

Fine Lezione 3

Lezione 4 2021/03/01

Consideriamo un serbatoio con una parete ABC.
Calcoliamo la spinta che il liquido esercita sulla parete nota che sia la geometria



$\vec{S} = \gamma h_G A \vec{n}$ versore ortogonale alla superficie

la spinta sarà applicata nel centro di spinta

$$x_C = \frac{I_0}{M} + x_G$$

I_0 MOMENTO D'INERZIA

M MOMENTO STATICO

$M = x_G \cdot A$

$$S_1 = \gamma \frac{h_1}{2} A_1$$

$$S_2 = \gamma\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)\frac{h_2}{\sin\alpha} L$$

$$I_{01} = \frac{1}{12} h_1^3 L$$

$$M_1 = x_{G1} A_1 = h_{G1} \cdot A = \frac{h_1}{2} \cdot h_1 L$$

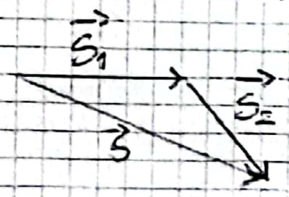
$x_G = h_G$ per la parete verticale

La linea di sponda si ottiene prolungando il lato BC che deve intersecare il piano dei carichi idrostatici

$$I_{02} = \frac{1}{12}\left(\frac{h_2}{\sin\alpha}\right)^3 L$$

$$M_2 = x_{G2} \cdot A = \frac{h_{G2}}{\sin\alpha} \cdot A = \left(\frac{h_1}{\sin\alpha} + \frac{h_2}{\sin\alpha}\right) \cdot \underbrace{\frac{h_2}{\sin\alpha} \cdot L}_{A}$$

Lo scopo è quello di calcolare la spinta risultante



$$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2}$$

Si sommano le componenti rispetto ad un sistema di riferimento

$$S_x = S_{1x} + S_{2x}$$

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} = -S_{2y}$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{S_y}{S_x}$$ inclinazione spinta

Possiamo calcolare il punto di applicazione della spinta complessiva

$$S \cdot b = S_1 \cdot b_1 + S_2 \cdot b_2$$

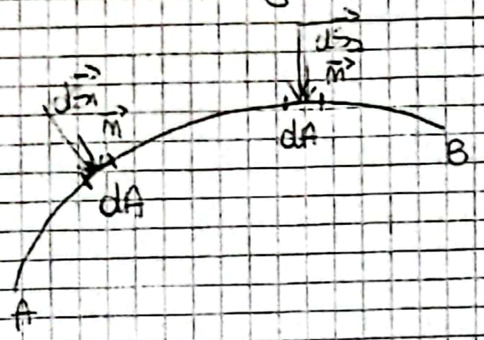
Si sceglie un polo e si calcolano i momenti delle forze

↓
momento spinta complessiva

[17:09]

SPINTE SU SUPERFICI CURVE - METODO DELLE COMPONENTI

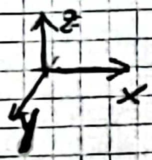
Consideriamo una generica superficie curva



Noto il PCI si può determinare la pressione sull'area infinitesima dA e quindi anche la spinta

Volendo calcolare la spinta su AB non è corretto fare l'integrale perché le spinte hanno diversi versi quindi la somma è vettoriale

Si calcolano le componenti x, y, z e si sommano



$dS_x = P\,dA \cos\hat{n}_x$

$dS_y = P\,dA \cos\hat{n}_y$

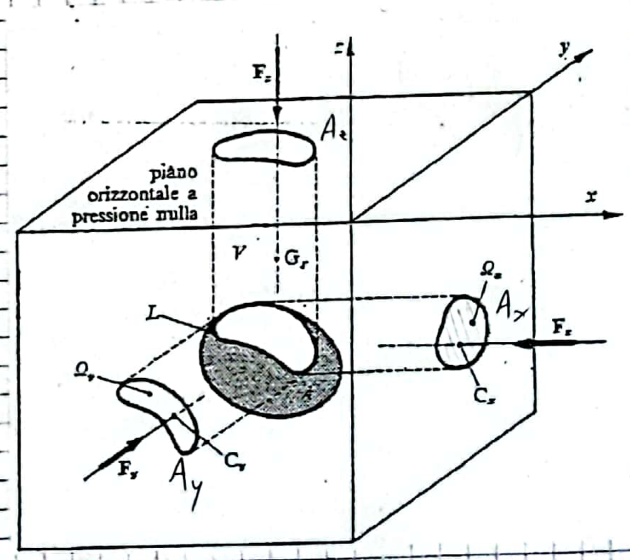
$dS_z = P\,dA \cos\hat{n}_z$

$dA_x = dA \cos\hat{n}_x$

$dA_y = dA \cos\hat{n}_y$

$dA_z = dA \cos\hat{n}_z$

proiezione area



$dS_x = P \cdot dA_x$

$dS_y = P \cdot dA_y$

$dS_z = P \cdot dA_z$

$S_x = \int_{A_x} P\,dA_x = \gamma h_x A_x$

$S_y = \int_{A_y} P\,dA_y$

affondamento baricentro A_x rispetto al PCI

$S_z = \int_{A_z} P\,dA_z = \gamma h_z A_z = \underline{\gamma W}$

peso volume individuato da PCI e superficie

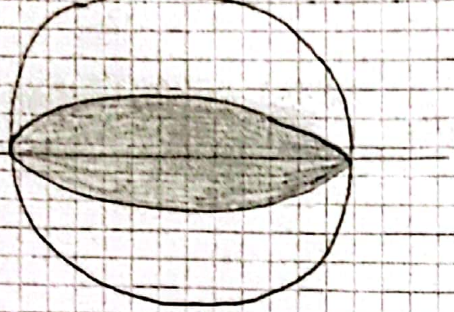
$S_o = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ FORZA ORIZZONTALE

$S_v = S_z$ FORZA VERTICALE

Questo metodo prende il nome di METODO DELLE COMPONENTI

Possono capitare casi più semplici in cui la superficie è contenuta in un piano (es. arco di cerchio)

Consideriamo una sfera, tagliandola con un piano otteniamo una circonferenza contenuta in un piano



Per il calcolo della spinta in questi casi si può applicare: EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA DEI FLUIDI

EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA DEI FLUIDI

Si dimostra a partire dalle eq. indefinita della statica dei fluidi

$$\rho\vec{R} = \text{grad}\, P$$ vale per un volume infinitesimo

integrazione

$$\underbrace{\int_W \rho\vec{R}\, dW}_{\substack{\text{forza di massa}\\ \text{per unità di massa}}} = \int_W \text{grad}\, P\, dW$$

Tutto l'integrale rappresenta la forza peso $\vec{G}$

Attraverso th. di Green si può passare da un integrale doppio ad uno di superficie

$$\int_W \left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) dW = -\int_A P(\vec{i}\cos m_x + \vec{j}\cos m_y + \vec{k}\cos m_z)\, dA$$

superficie che delimita W

$$= -\int_A P\,\vec{m}\, dA$$

Quindi

$$\left[\vec{G} + \Sigma\vec{\Pi} = \vec{0}\right]$$

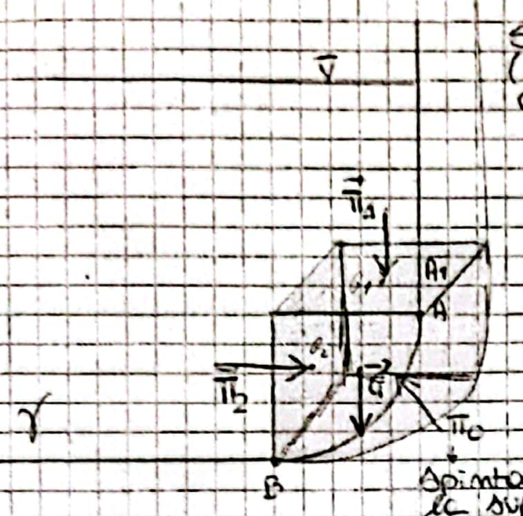
si considera la sommatoria perché il volume può avere diverse superfici

$\vec{G}$ forza peso del volume di controllo

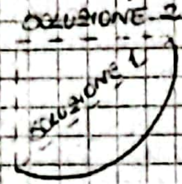
$\vec{\Pi}$ azione che il liquido che circonda il volume esercita sulla superficie

Affinché il corpo sia in quiete le forze sono in equilibrio

Immaginiamo di avere un serbatoio con questa geometria



Calcoliamo la spinta su AB
Scegliamo un volume di controllo (una porzione di superficie deve coincidere con quella curva



Applichiamo l'equazione globale della statica

$$\vec{G}+\sum_i \vec{\Pi}_i=\vec{0}$$

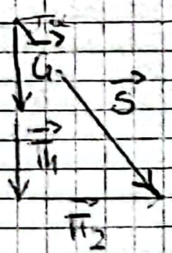
$\Pi_1 = P_1 \cdot A_1$ (applicata nel baricentro di A_1)

$\Pi_2 = P_2 \cdot A_2$ (applicata nel centro di spinta)

$$\vec{G}+\vec{\Pi}_1+\vec{\Pi}_2+\vec{\Pi}_0=\vec{0}$$

Lo scopo è calcolare la spinta che il liquido esercita sulla superficie curva

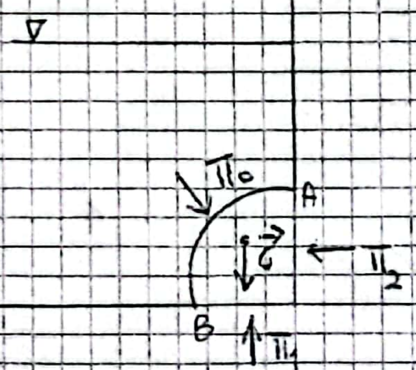
$$\vec{S}=-\vec{\Pi}_0=\vec{G}+\vec{\Pi}_1+\vec{\Pi}_2$$



$G=\gamma W$

Si calcola S a partire dalla somma delle componenti

Possiamo studiare anche superfici con concavità diverse

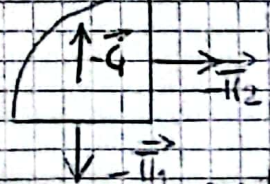


Si sceglie un volume di controllo che non è occupato dal liquido e si ipotizza che ci sia liquido all'interno

$$\vec{G}+\vec{\Pi}_1+\vec{\Pi}_2+\vec{\Pi}_0=\vec{0}$$

$$\vec{S}=\vec{\Pi}_0=-\vec{G}-\vec{\Pi}_1-\vec{\Pi}_2$$

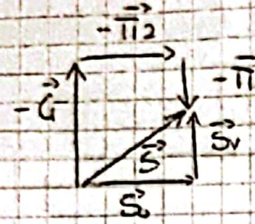
Il volume è fittizio



$-G=\gamma W$

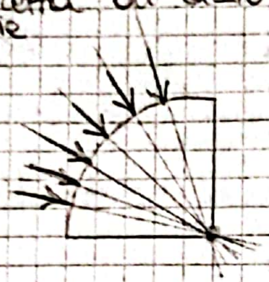
$\Pi_2 = P \cdot A$ (verso viene dettato dalla pressione, se è positivo l'ambiente spinge verso l'esterno)

Per calcolare la spinta che il liquido esercita sulla parete bisogna sommare le componenti



questo disegno non è corretto poiché $\vec{\Pi}_1$ è maggiore in modulo rispetto a Π_2 poiché la pressione sul fondo è maggiore

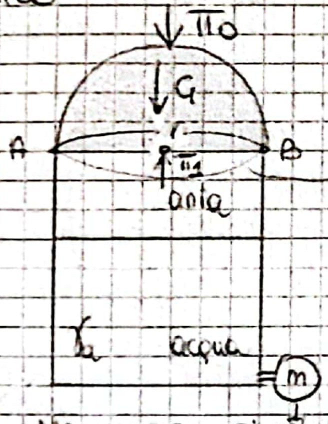
Per quanto riguarda il centro di spinta, nel caso di geometrie semplici la retta di azione passa per il centro di curvatura della superficie



53:30

CASO 2

Consideriamo un serbatoio con acqua e aria cioè un fluido a basso peso specifico



Applichiamo l'eq. globale della statica al volume di controllo

È un volume reale

è una circonferenza

la spinta Π_1 è verso l'alto se la pressione è positiva

MANOMETRO SEMPLICE: ci dà info sulla pressione

$$\vec{G}+\vec{\Pi}_1+\vec{\Pi}_0=\vec{0}$$

$$\vec{S}=-\vec{\Pi}_0=\vec{G}+\vec{\Pi}_1$$

$$\Pi_1 = P \cdot A$$

$$G=\gamma W$$

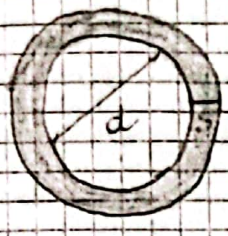
se il peso specifico del fluido è trascurabile si può trascurare G e la spinta è uguale a Π_1

LEGGE DI MARIOTTE

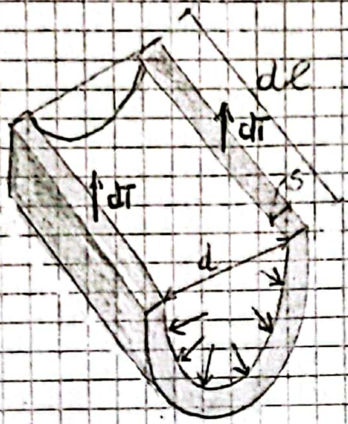
permette di calcolare lo spessore di una condotta in pressione

Pressione di esercizio

Sezione tubo



Immaginiamo di aver misurato la pressione al centro della condotta e di voler calcolare lo spessore della condotta affinché resista alla pressione



Su mezzo tubo agisce una forza legata alla pressione.

Per calcolare la spinta, poiché la superficie è curva bisogna applicare l'eq globale della statica

Poniamo trascurabile G perché la pressione è molto alta

SPINTA SU SUPERFICIE PIANA $\quad P\, d\, dl$

$$\underbrace{P}_{\text{pressione}}\ \underbrace{d\, dl}_{\text{area}}$$

dT FORZE ESERCITATE DAL CONDOTTO SUPERIORE

Affinché ci sia l'equilibrio la somma di tutte le forze deve essere nulla

$\vec{G}$ si può trascurare

$P\, d\, dl = 2dT$ → si può esprimere in funzione del CARICO DI SICUREZZA A TRAZIONE

↓ sono legate alle capacità del tubo

$$\sigma = \frac{dT}{s\, dl}$$

$$P d \cancel{dl} = 2\sigma s \cancel{dl} \rightarrow \boxed{s = \frac{P \cdot d}{2\sigma}}$$

dipende dal tipo di materiale

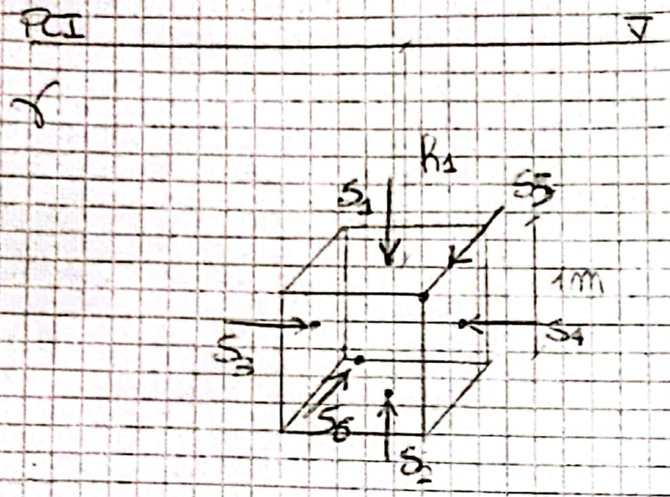
Dipende dalla portata che deve transitare

La scelta del tubo non è influenzata solo da d (che è legato alla portata) ma anche dallo spessore

1:11:50

SPINTA SU UN CORPO TOTALMENTE IMMERSO

Consideriamo un corpo tot. immerso e calcoliamo la spinta che il liquido esercita sul corpo



Calcoliamo la spinta risultante che il liquido esercita sul cubo di lato unitario.

$V = 1m^3$ VOLUME $\qquad A = 1m^2$ AREA

Il problema è semplice poiché le pareti sono piane

Si individuano i baricentri delle facce (. e i rispettivi affondamenti

$S_1 = \gamma h_1 \cdot A$

$S_2 = \gamma (h_1 + 1m) \cdot A$

Le spinte S_3, S_4, S_5, S_6 hanno lo stesso modulo poiché l'affondamento è lo stesso

$$S_3 = \gamma (h_1 + 0{,}5) A$$

$$\vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \vec{S_3} + \vec{S_4} + \vec{S_5} + \vec{S_6}$$

Fissiamo un sistema di riferimento e calcoliamo le componenti orizzontali e verticali

$S_o = 0$

$S_v = S_2 - S_1$

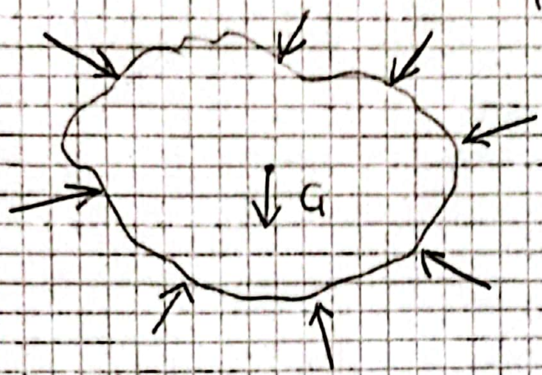
$$S_v = \gamma(h_1 + 1)A - \gamma h_1 A = \gamma A \cdot 1 = \gamma W$$

La spinta risultante non dipende dalla posizione del cubo rispetto la superficie libera poiché h_1 si semplifica.

La forza risultante è diretta dal basso verso l'alto

La spinta esercitata dal liquido è pari al peso del volume del liquido spostato

Supponiamo che il corpo abbia una forma qualsiasi e che il volume sia delimitato da più porzioni di superficie



γ

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{0}$$

$\vec{G}$ → peso del volume di controllo (fittizio)

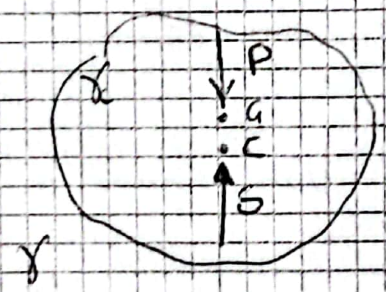
$\vec{\Pi}$ → unica superficie curva

$$\vec{S} = \vec{\Pi} = -\vec{G}$$

Dato un corpo di forma qualsiasi, la risultante delle forze che il liquido esercita sul corpo, è una forza diretta verso l'alto pari al peso del liquido spostato

La spinta è nota come [SPINTA DI ARCHIMEDE]

$$S = \gamma W \qquad P = \gamma_c \cdot W$$



Immaginiamo che γ_c sia il peso specifico del corpo e γ sia il peso specifico dell'acqua

La forza peso è applicata su G che coincide con C se il corpo è omogeneo.

C è il baricentro della massa d'acqua spostata

Considerazioni di STABILITA'

Affinchè il corpo sia in equilibrio $\boxed{P = S}$

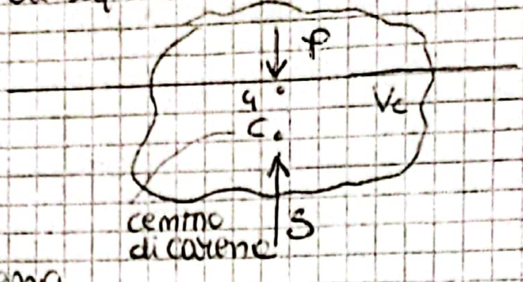
Se $\gamma_c = \gamma$ equilibrio sicuramente soddisfatto

→ anche la risultante dei momenti deve essere uguale a zero cioè G e C devono essere allineati

il corpo affonda se $\boxed{P > S}$ cioè $\gamma_c > \gamma$

il corpo galleggia se $\boxed{P < S}$ cioè $\gamma_c < \gamma$

$\gamma_c < \gamma$ il corpo tende a muoversi per ripristinare la condizione di equilibrio



$S = \gamma_c \cdot V_c$

volume di carena (immerso)

il peso P è sempre lo stesso, ciò che varia è la spinta perché $V_c \neq V$

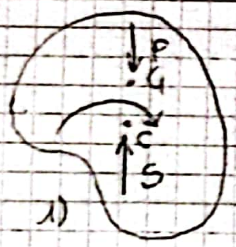
Dopo un certo tempo si raggiunge l'equilibrio ovvero

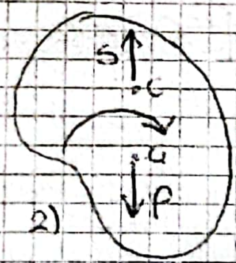
$P = S$

Vi sono tre possibili condizioni di equilibrio

INSTABILE — **STABILE** — **INDIFFERENTE**

si studia rispetto alle rotazioni orizzontali





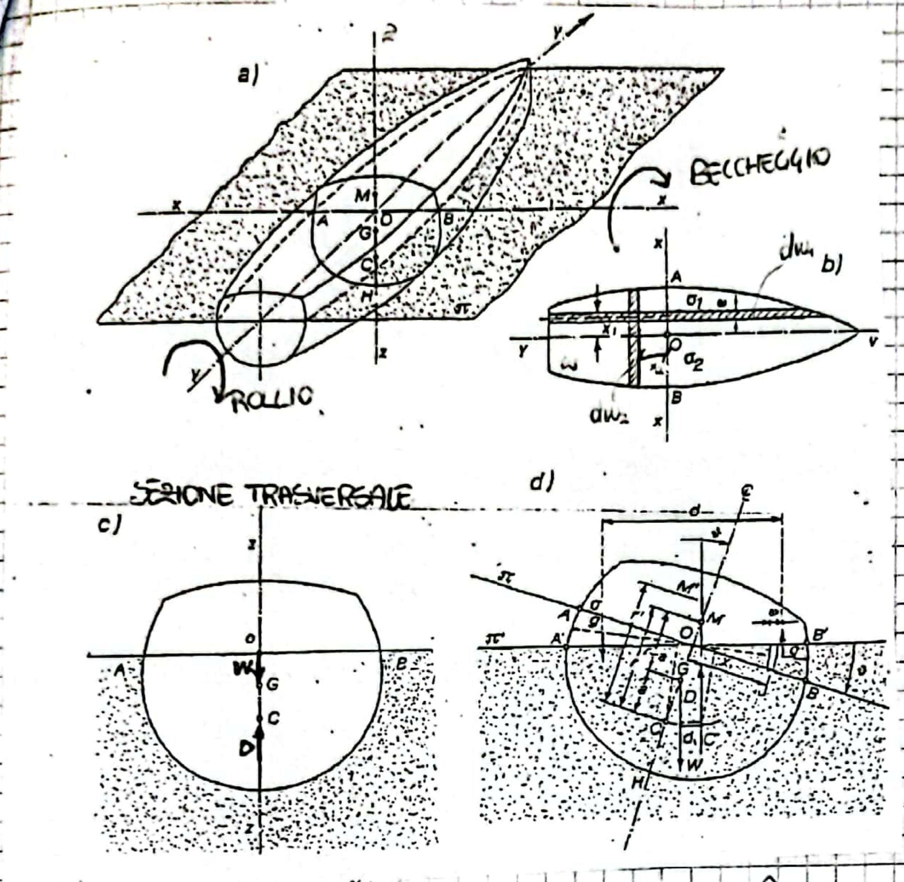
INDIFFERENTE: Sollecitando la struttura, in orizzontale o con rotazione, il corpo rimane nella sua nuova configurazione.

1) Andando a ruotare il corpo, nasce nel primo caso una coppia che fa ruotare il corpo allontanandolo dalla sua posizione di equilibrio (rotazione oraria)

2) Nel secondo caso, nasce una coppia di restoring che riporta il corpo nella sua posizione di equilibrio poiché il momento che nasce è opposto a quello che sollecita la struttura

Questo vale soltanto per i corpi immersi

STABILITÀ DEI CORPI GALLEGGIANTI



Consideriamo nella figura a) un'imbarcazione con assi di simmetria xx e zz.

Il natante è in equilibrio ma bisogna capire se l'equilibrio è STABILE O INSTABILE

La stabilità riguarda le rotazioni attorno agli assi orizzontali

La rotazione attorno all'asse y prende il nome di MOTO DI ROLLIO

La rotazione attorno all'asse x prende il nome di MOTO DI BECCHEGGIO

Bisogna attenzionare il moto di Rollio poiché risulta il più problematico per la stabilità

Consideriamo una striscia δw (figura b). La stabilità dipende dal momento d'inerzia della sezione di galleggiamento

La SEZIONE DI GALLEGGIAMENTO è data dall'intersezione della sezione libera (π) e l'imbarcazione

Possiamo calcolare il momento d'inerzia rispetto a y

$$\int_w dw_1 \, x_1^2 \, dw$$

area infinitesimo striscia

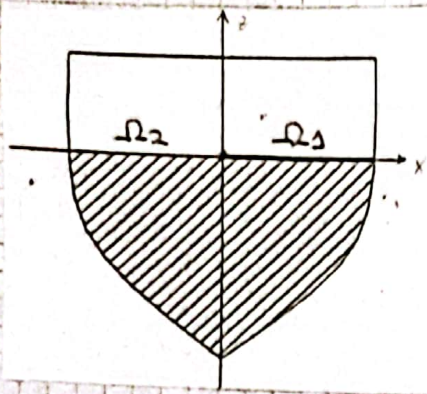
distanza

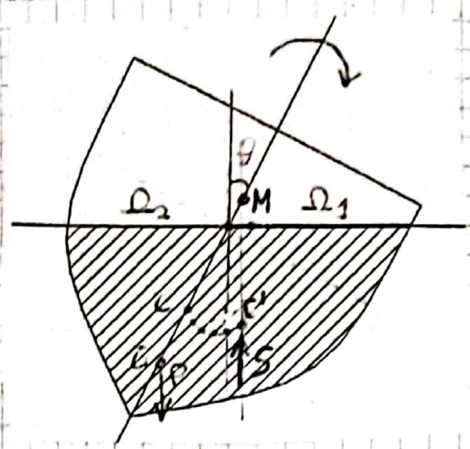
Oppure rispetto all'asse x

$$\int_w dw_2 \, x_2^2 \, dw$$

Il momento rispetto a y è minore poiché le distanze sono minori perciò la stabilità viene studiata lungo y

(I corpi completamente sommersi sono più semplici da studiare in quanto a seguito di una rotazione il volume di carena è il medesimo ma per i natanti non è così o per meglio dire il volume bagnato è lo stesso ma si sposta il centro di carena)





Possiamo notare che il volume è lo stesso e quindi anche la spinta di Archimede

In seguito alla rotazione, la posizione del baricentro resta inalterata, il centro di carena si sposta verso destra ma la spinta di Archimede è la stessa

Bisogna definire il **METACENTRO** a partire dal prolungamento della retta d'azione della spinta

Il metacentro è fondamentale per la stabilità

Supponiamo che $\theta \leq 15°$ allora la posizione di M è una posizione limite che si può calcolare

Un'altra conseguenza è che l'asse y è anche di simmetria

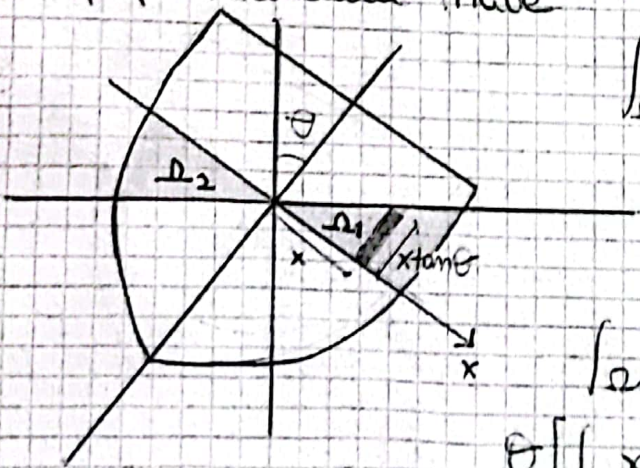
Si può osservare che se il natante non è inclinato l'area $\Omega_2 = \Omega_1$ cioè l'asse y è di simmetria

Ma in seguito ad una rotazione $\Omega_2 \neq \Omega_1$ e l'asse di simmetria si sposta verso dx. Ma per rotazioni piccole ciò si trascura

Dimostriamo che il volume di carena non cambia in seguito ad una rotazione

Basta far notare che l'asse di rotazione passa per il baricentro della sezione di galleggiamento

Prendiamo una striscioLina di area $d\Omega$ che si estende per tutta la profondità della nave



$$\int_{\Omega_1} x\tan\theta \, d\Omega = -\int_{\Omega_2} x\tan\theta \, d\Omega$$

le x sono negative a sinistra

Per angoli piccoli $\tan\theta \simeq \theta$

$$\int_{\Omega_1} x\theta \, d\Omega = -\int_{\Omega_2} x\theta \, d\Omega$$

$$\theta\left[\int_{\Omega_1} x \, d\Omega + \int_{\Omega_2} x \, d\Omega\right] = 0$$

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\theta \int_{\Omega} x \, d\Omega = 0$$

Per $\theta \to 0$ allora $\int_\Omega x\, d\Omega = 0$ per la regola dell'annullamento del prodotto

L'integrale rappresenta il momento statico della sezione rispetto all'asse y.

Questo integrale si annulla quando il baricentro cade sull'asse di simmetria

$x_G A = 0$

Quindi aver dimostrato che $\int_\Omega x\, d\Omega = 0$ vuol dire che l'asse di rotazione è di simmetria

Per $\theta \to 0$

- Ω non cambia e $\Omega_1 = \Omega_2$
- il metacentro assume una posizione limite
- l'asse y è anche di simmetria

ovvero il centro della circonferenza con arco di cerchio individuato dalla posizione dei centri di spinta per $\theta \leq 15°$

Rec Teams

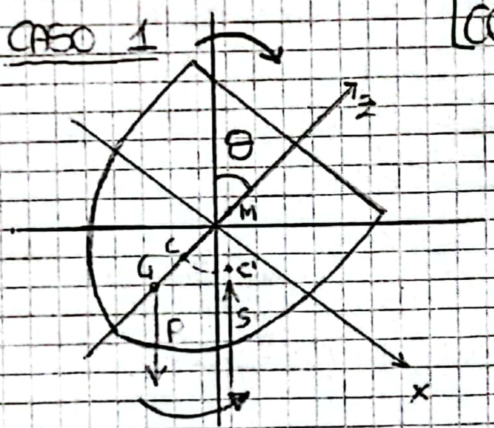
[22:00]

La STABILITÀ è strettamente legata alla posizione del baricentro G

Esistono 3 combinazioni, sono 3 i punti da attenzionare (G, C, M)

CASO 1

[CONDIZIONE DI STABILITÀ] (G si trova al di sotto di C e M)



In seguito alla rotazione, G e C non si trovano sulla stessa verticale e nasce un momento stabilizzante che tenderà a riportare il natante in una condizione di equilibrio

Possiamo calcolare il raggio metacentrico

$\overline{CM} = z_M - z_C$

z_M è positiva
z_C è negativa ma con il segno meno davanti diventa positiva perciò $\overline{CM} > 0$

$\overline{CG} = z_G - z_C$

z_G è negativa
z_C è negativa ma con il segno meno diventa positiva tuttavia $z_G > z_C$ in modulo perciò $\overline{CG} < 0$

$\overline{CM}$ RAGGIO METACENTRICO

$\overline{GM}$ ALTEZZA METACENTRICA

1. $\overline{CG} < \overline{CM}$

2. $\overline{GM} > 0$

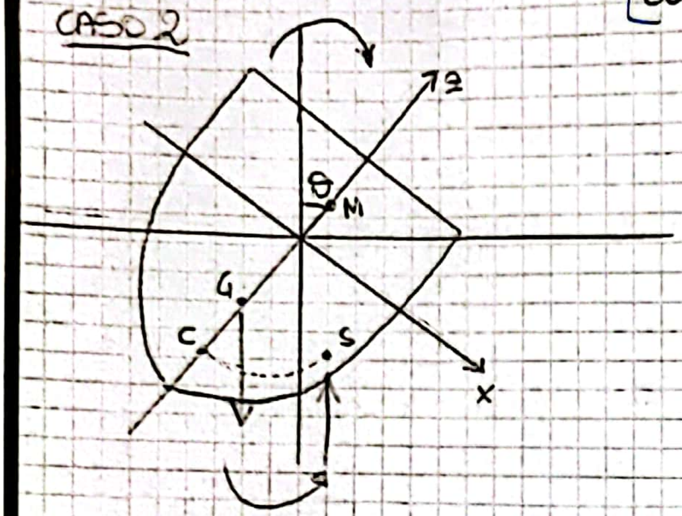
$\overline{GM} = z_M - z_G > 0$

Affinché ci sia la condizione di stabilità bisogna verificare la condizione 1. e 2. che risultano equivalenti

[27:40]

[CONDIZIONE DI STABILITA'] (G si trova tra C e M)

CASO 2



A differenza dei corpi immersi, se C si trova al di sotto di G, nasce una coppia stabilizzante che tende a riportare il natante nella condizione di equilibrio

$\overline{CM} = (z_M - z_C) > 0$

$\overline{CG} = (z_G - z_C) > 0$ perché in modulo $z_C > z_G$

$\overline{CM} > \overline{CG}$

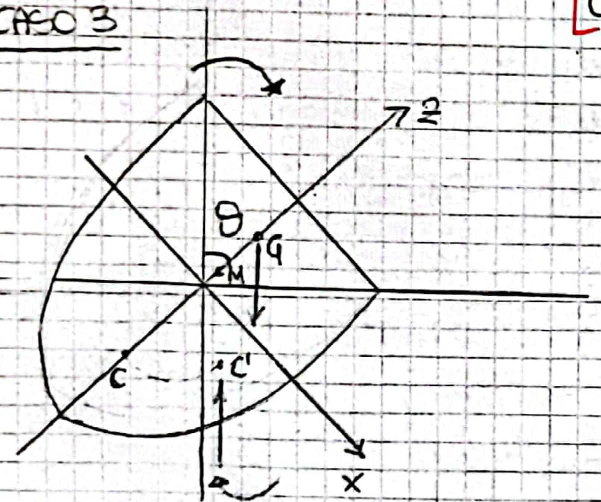
$\overline{GM} > 0$ $\quad \overline{GM} = z_M - z_G$

Le condizioni sono medesime al caso precedente

Rec Teams [31:40]

[CONDIZIONE DI INSTABILITA'] (G si trova al di sopra di C e M)

CASO 3



In questo caso, in seguito alla rotazione, nasce una coppia destabilizzante che tende a far ruotare ulteriormente il natante

$\overline{CM} = (z_M - z_C) > 0$

$\overline{CG} = (z_G - z_C) > 0$

$\overline{CM} < \overline{CG}$ $\quad$ Condizioni di instabilità

$\overline{GM} < 0$ $\quad \overline{GM} = z_M - z_G$

La posizione di G non è fissa, ovviamente dipende da quello che trasporta la nave e di come sono distribuite.

Tanto più grande è $\overline{GM}$ quanto maggiore sarà il momento stabilizzante

In una nave da crociera $\overline{GM} \simeq 1m$ (sono meno sicure)

Le navi da guerra $\overline{GM} \simeq 3m$

Pescherecci $\overline{GM} \simeq 1.5m$

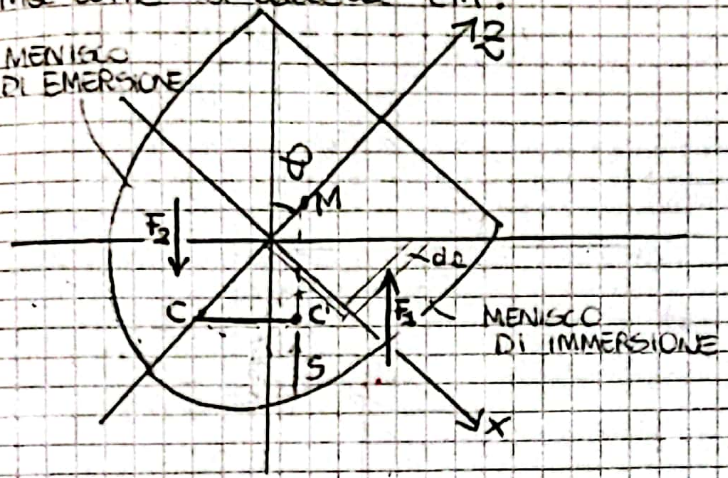
Per le navi da crociera $\overline{GM}$ è piccolo perché bisogna garantire il confort

Tanto maggiore è $\overline{GM}$ quanto minore è il confort perché nascono momenti che hanno periodi di oscillazione piccoli

[47:00]

Quindi per valutare le condizioni di stabilità bisogna confrontare CM e CG

Ma come si calcola $\overline{CM}$?



Nei due menischi nascono due forze pari al peso specifico per il volume

Nel menisco di emersione la forza è diretta verso il basso perché è una forza peso

Nel menisco di immersione la forza è diretta verso l'alto perché è una spinta

Le due forze generano una coppia di momento uguale a quello che la spinta forma rispetto a C (questo non è il momento stabilizzante) → (momento di S rispetto a G)

MOMENTO SPINTA RISPETTO C = MOMENTO DI RICHIAMO F_1 E F_2

$$\underbrace{\gamma V_c}_{S}\ \underbrace{\overline{CM}\sin\theta}_{CC'} = \int_{\Omega_2} \gamma x \underbrace{\theta\, d\Omega}_{\text{VOLUME STRISCIA INFINITESIMA}}\ \underbrace{x}_{\text{BRACCIO VOLUMETTO}} + \int_{\Omega_1} \gamma x \theta\, d\Omega\, x$$

$\sin\theta \approx \theta$, $\tan\theta \approx \theta$

$$\gamma V_c \overline{CM}\theta = \gamma\theta \underbrace{\int_{\Omega} x^2 d\Omega}_{\text{MOMENTO D'INERZIA DI TUTTA LA SEZIONE DI GALLEGGIAMENTO RISPETTO ALL'ASSE Y (VEDI FIGURA B)}} \rightarrow \cancel{\gamma} V_c \overline{CM}\cancel{\theta} = \cancel{\gamma}\cancel{\theta} I$$

$\overline{CM} = z_M - z_c$

$$\boxed{\overline{CM} = \frac{I}{V_c}}$$
↓ VOLUME DI CARENA

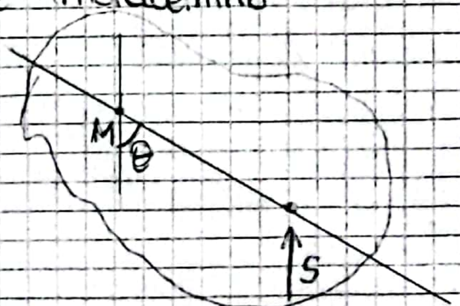
$$\boxed{z_M = \frac{\Omega}{V_c} + \frac{I}{V_c}}$$

Rec Trac.

[57:30]

Vi è una relazione tra $\overline{CM}$ e il periodo di oscillazione

Il galleggiante è come se fosse un pendolo che ruota attorno al metacentro



$$M_s = \gamma V_c\ \overline{CM}\theta$$
↓ MOMENTO STABILIZZANTE

I^* MOMENTO D'INERZIA DELLA MASSA RISPETTO AD UN ASSE TRASVERSALE CHE PASSA PER M (massa trasversale)

Equazione del moto del natante

$$I^* \frac{d^2\theta}{dt^2} = -M_s$$

↳ segno meno perché la spinta è diretta verso l'alto a differenza della forza peso

$$\frac{I^* d^2\theta}{dt^2} + \gamma V_c \overline{GM}\,\theta = 0$$

Risolvendo l'eq. si può ricavare il periodo.

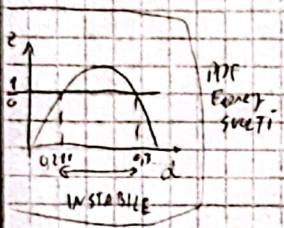
$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{I^*}{\gamma V_c \overline{GM}}}}$$

- il periodo è inversamente proporzionale alla distanza tra G e M
- il calcolo di I^* non è immediato ma esistono delle formule sperimentali che ci permettono di calcolare T

$$\boxed{T = K_R \cdot \frac{B}{\sqrt{\overline{GM}}}}$$

B → LARGHEZZA IMBARCAZIONE

K_R → NUMERO CHE VARIA DA IMBARCAZIONE A IMBARCAZIONE (si può assumere $K_R = 0{,}73$)



Tanto più grande è $\overline{GM}$ quanto maggiore è la stabilità del natante e minore sarà il periodo di oscillazione e quindi il comfort.

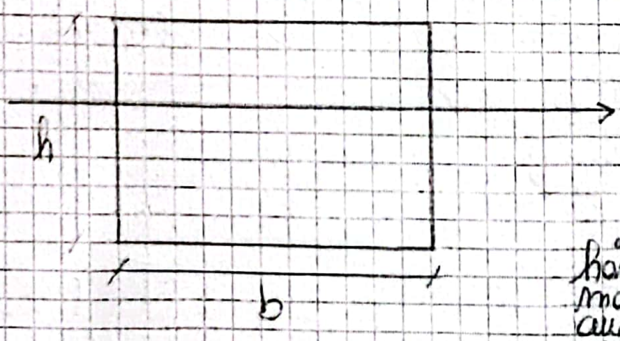
1:16:00) ...

In fase di progettazione bisogna lavorare sul momento di inerzia I cioè tanto più è larga la nave, tanto maggiore sarà il momento d'inerzia e quindi sarà alto il momento d'inerzia

La stabilità di un natante può essere garantita lavorando su:

- FORMA IMBARCAZIONE: stabilità in forma
- POSIZIONE DEL BARICENTRO: stabilità in peso (dislocamento masse)

Se in fase di progetto l'imbarcazione non è stabile allora è possibile aumentare il momento d'inerzia



$$I = \frac{1}{12} b h^3$$

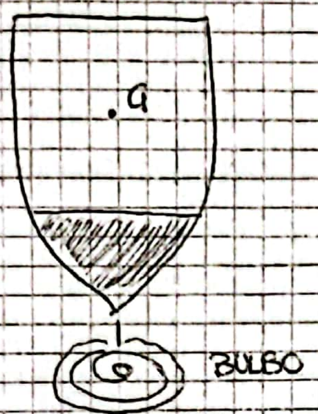
La forma influenza il momento d'inerzia (STABILITÀ IN FORMA)

Le imbarcazioni leggere hanno un baricentro alto ma risultano spanciate per aumentare il momento d'inerzia

Tuttavia se la larghezza è elevata, la resistenza è elevata (resistenza al moto)

Nel caso di imbarcazioni strette, la stabilità è garantita mediante il disassamento delle masse

Si possono inserire sul fondo dei pesi aggiuntivi (ghiaia o cls) oppure un bulbo esterno

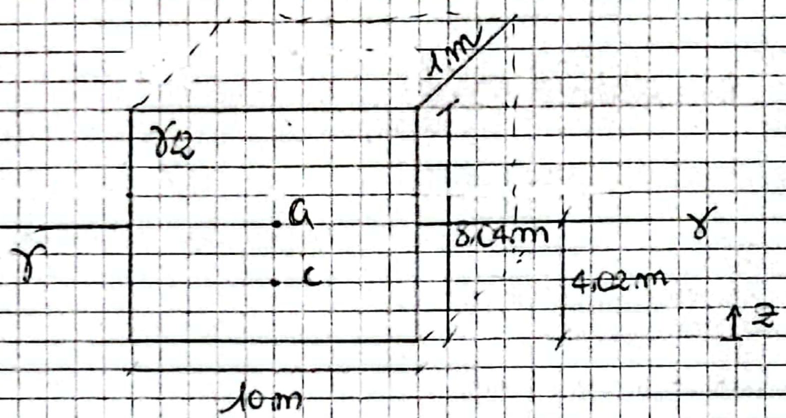


Nel caso delle navi da crociere, man mano che si consuma il carburante, vengono riempiti i serbatoi di acqua
(analogia con le petroliere)

1:24:20

ESEMPIO NUMERICO

Immaginiamo che un cubo sia parzialmente immerso con un peso specifico pari alla metà di quello dell'acqua allora il cubo sarà immerso a metà



Corpo omogeneo e quindi baricentro delle masse coincide con il baricentro geometrico

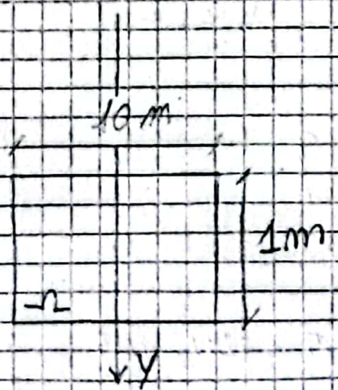
$V_c = 4{,}02\,m \cdot 10\,m \cdot 1\,m = 40{,}2\,m^3$

$z_G = \dfrac{8{,}04\,m}{2} = 4{,}02\,m$

$z_C = \dfrac{4{,}02\,m}{2} = 2{,}01\,m$

Verifica di stabilità

$I = \dfrac{1}{12} 10^3 \, 1$ momento d'inerzia →



$\dfrac{I}{V_c} = \dfrac{\frac{1}{12} 10^3 \, 1}{40{,}2} = 2{,}07\,m = \overline{CM}$

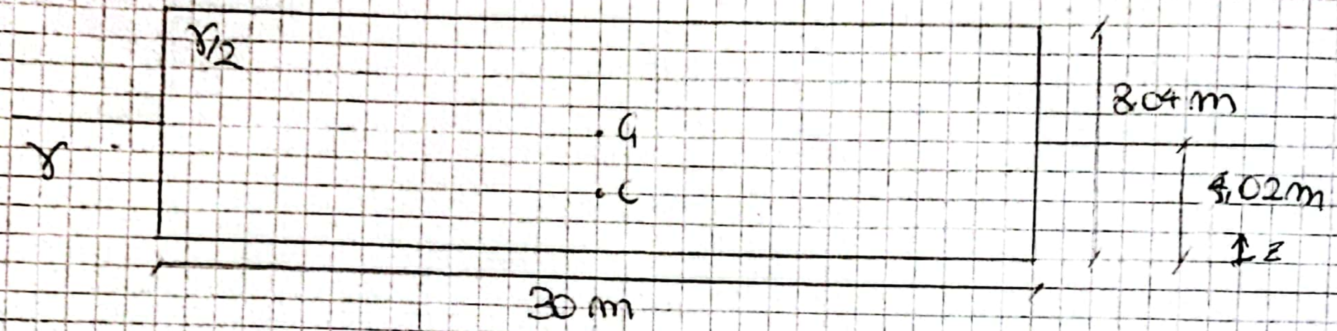
$z_M = z_C + \dfrac{I}{V_c} = 2{,}01\,m + 2{,}07\,m = 4{,}08\,m$

$\overline{GM} = z_M - z_G = 4{,}08\,m - 4{,}02\,m = 0{,}06\,m = 6\,cm > 0$

Siamo a limite di stabilità

$T = K_R \dfrac{B}{\sqrt{\overline{GM}}} \cong 30\,s$

Immaginiamo di modificare la forma del natante



$z_G = 4{,}02m$

$z_C = 2{,}01\,m$ → non sono cambiati rispetto al caso precedente

$V_C = 30\,m \cdot 4{,}02m \cdot 1m = 120{,}6\,m^3$ (triplo rispetto al caso precedente)

$\overline{CM} = \dfrac{I}{V_C} = \dfrac{\frac{1}{12} 30^3 \cdot 1}{120{,}6} = 18{,}657m$

$z_M = z_C + \dfrac{I}{V_C} = 2{,}01\,m + 18{,}66\,m = 20{,}67\,m$

$\overline{GM} = z_M - z_G = 20{,}67\,m - 4{,}02\,m = 16{,}65\,m$

Triplicando la base, si ottiene un valore di $\overline{GM}$ molto maggiore perciò aumenta la stabilità ma si riduce il periodo di oscillazione e quindi anche il confort.

$T = 0{,}73 \sqrt{\dfrac{30}{16{,}64}} = 5{,}36\,s$

(?) $T = k_r \cdot \dfrac{B}{\sqrt{\overline{GM}}}$

Fine lezione 5 2021/03/03