DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Il moto dei fluidi si può studiare mediante due approcci:

- EULERO: permette di descrivere il moto dei fluidi esaminando le particelle nello spazio e nel tempo

Un fluido è costituito da particelle, la posizione è identificata da tre coordinate

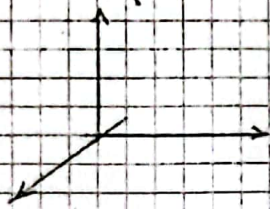
$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$

$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$

$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$

Questo metodo è il più utilizzato e in questo caso la velocità è funzione delle coordinate spaziali e del tempo

$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$



Il campo di moto è definito quando sono note le 3 componenti del vettore velocità

$u = \frac{dx}{dt}$

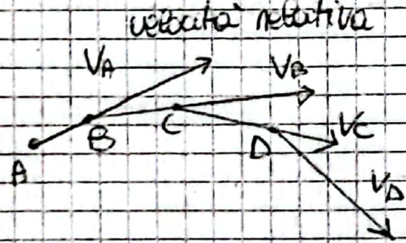
$v = \frac{dy}{dt}$

$w = \frac{dz}{dt}$

Per definire il campo di velocità ci vengono in aiuto le LINEE DI CORRENTE o LINEE DI VELOCITÀ.

Sono tangenti al vettore velocità in ogni punto

È come se avessimo una foto della massa fluida in movimento



Congiungendo i punti A/B/C/D otteniamo una spezzata e diminuendo la distanza tra i punti otteniamo una curva

La LINEA DI CORRENTE fornisce la direzione del vettore di velocità dei suoi punti

Per ogni punto della massa fluida passa una linea di corrente che può variare per ogni istante

La TRAIETTORIA individua la posizione della particella al variare del tempo

Nel caso di MOTO STAZIONARIO le velocità non variano nel tempo le linee di corrente possono coincidere con le traiettorie

LAGRANGIANO: si segue il percorso di una particella valutando le coordinate

$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$
$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$
$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$

PARTICELLA

metodo non conveniente

EULERIANO: si scelgono dei punti del flusso e si valutano le grandezze cinematiche

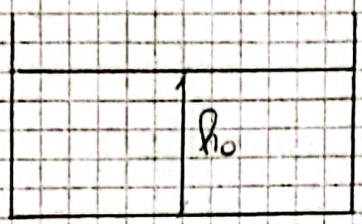
$\vec{v} = V(x, y, z, t)$

VOLUME DI CONTROLLO

Il vettore velocità ha una dipendenza spaziale e temporale
$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$

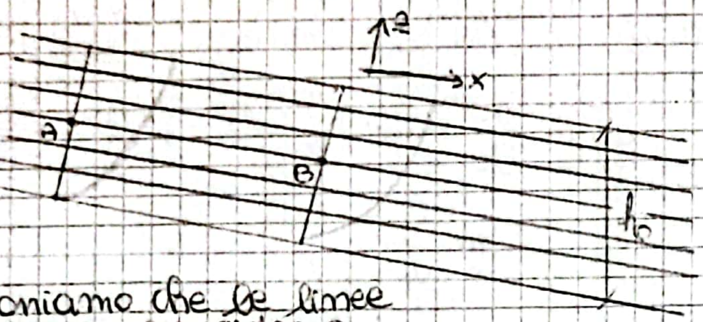
MOTO UNIFORME

Supponiamo di avere un canale a sezione rettangolare che si mantiene costante



Tracciamo le linee di corrente parallele al fondo (e parallele tra loro)

Nel regime di moto laminare le traiettorie sono rettilinee e parallele.



Supponiamo che le linee di corrente coincidano con le traiettorie

Scelto un punto A tracciamo l'andamento della velocità

La velocità è nulla sul fondo e max in superficie

Se l'alveo è molto grande, si può trascurare l'effetto di bordo quindi si può assumere costante la velocità lungo Y

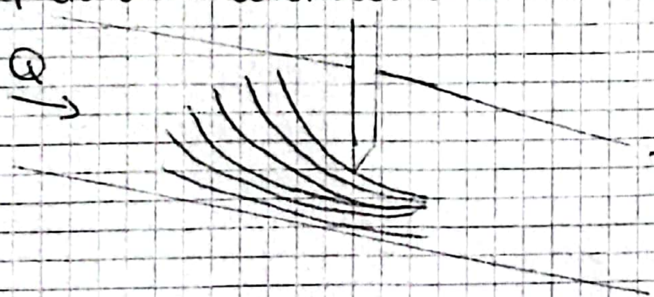
In questo caso la velocità dipende solo da z

$V(z)$ Non varia lungo la direzione del moto

MOTO PERMANENTE

Supponiamo di avere un alveo con una paratia che restringe la sezione

La portata è la stessa ciò che varia è la velocità



$\vec{V} = \vec{V}(x, z)$

funzione dello spazio ma non del tempo

MOTO VARIO

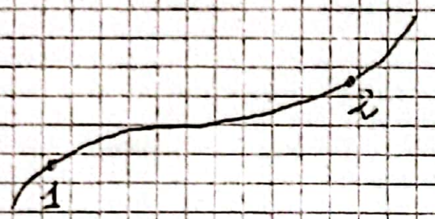
Supponiamo di avere una paratia come nel caso precedente che viene messa in movimento.
In questo caso la velocità dipende anche dal tempo.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

L'accelerazione di una particella si può determinare noto che sia il vettore velocità fissate le coordinate che identificano la particella

→ Traiettoria della particella in esame



$$d\vec{V} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt}_{\text{variazione temporale}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cancel{\frac{dt}{dt}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{\vec{A} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{variazione temporale velocità}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w}_{\text{variazione spaziale velocità}}}$$

DERIVATA EULERIANA
(o derivata totale)

Nel caso di moto uniforme perfetto in cui la velocità non varia neanche lungo z si può avere un'accelerazione nulla

TEOREMA DI BERNOULLI

È un teorema fondamentale della dinamica dei fluidi
Deriva dalla seconda legge della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

(in idrostatica $\vec{A} = \vec{0}$ e abbiamo ottenuto $\rho\vec{R} = \text{grad}\, P$)

In questo contesto:

$$\boxed{\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}\, P}$$

EQUAZIONE DI EULERO (equazione indefinita della dinamica dei fluidi)

Da questa equazione discende il teorema di Bernoulli:

FORZA DI MASSA per unità di massa $\quad \vec{R} = -g\, \text{grad}\, z$

$\rho\vec{R} = \text{grad}\, P$ EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI (da cui deriva Stevino)

$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}\, P$ EULERO ← EQUAZIONE INDEFINITA DELLA DINAMICA DEI FLUIDI (da cui deriva Bernoulli)

$$-\rho g\, \text{grad}\, z - \rho\vec{A} = \text{grad}\, P$$

$$-\rho g\, \text{grad}\, z - \text{grad}\, P = \rho\vec{A}$$

$$\gamma\, \text{grad}\, z + \text{grad}\, P = -\rho\vec{A}$$

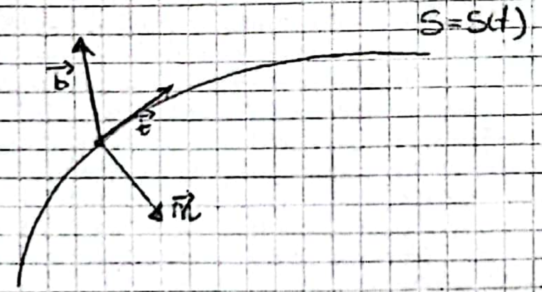
Ipotesi: peso specifico costante nel fluido incomprimibile

$$\text{grad}\, \gamma z + \text{grad}\, P = -\rho\vec{A}$$

$$\text{grad}(\gamma z + P) = -\rho\vec{A}$$

$$\text{grad}\underbrace{\left(z + \frac{P}{\gamma}\right)}_{\text{carico piezometrico}} = -\frac{1}{g}\vec{A} \qquad (*)$$

Introduciamo una generica traiettoria in coordinate curvilinee



$\vec{V} = \vec{V}(t, s(t))$

velocità funzione del tempo e del punto

Scegliamo un punto e scomponiamo il vettore lungo 3 direzioni (tangente, normale e binormale)

L'accelerazione $\vec{A}$ avrà 3 componenti

$$A_t = \frac{dv}{dt}$$

$$A_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{acc. centripeta}$$

$$A_b = 0$$

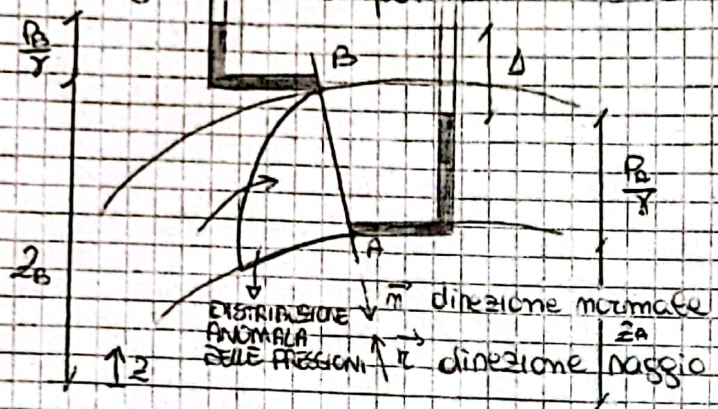
Proiettiamo l'equazione (*) lungo le tre direzioni

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{v^2}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = 0$$ → lungo la binormale il carico piezometrico rimane costante $z+\frac{p}{\gamma}=cost$ (distribuzione idrostatica delle pressioni)

Consideriamo una condotta con un raggio di curvatura e scegliamo due punti



Immaginiamo di bucare B e di collegare un piezometro lo stesso si fa in A

In condizioni idrostatiche la quota d'acqua sarebbe la stessa poiché il carico piezometrico è lo stesso.

In questo caso in B il carico è maggiore rispetto ad A

In termini analitici è possibile quantificare Δ

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{v^2}{r}$$

$$\partial n = -\partial r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = \frac{1}{g}\frac{v^2}{r}$$

Integriamo tra A e B

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial r}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) dr = \int_A^B \frac{1}{g}\frac{v^2}{r}\, dr$$

$$\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]_A^B = \int_A^B \frac{1}{g}\frac{v^2}{r}\, dr$$

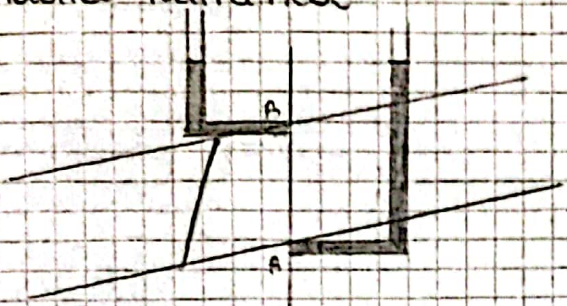
$$\left(z_B+\frac{p_B}{\gamma}\right) - \left(z_A+\frac{p_A}{\gamma}\right) = \int_A^B \frac{1}{g}\frac{v^2}{r}\, dr$$

$$h_B - h_A = \Delta$$

Il carico piezometrico non si mantiene costante in quanto a causa dell'accelerazione centripeta nasce un Δ e la distribuzione delle pressioni non è idrostatica

Tuttavia in alcuni casi è possibile avere una distribuzione idrostatica anche con un fluido in moto

Ciò accade se $\Delta = 0$ cioè accelerazione centripeta $\to 0$ ovvero condotta rettilinea



$h = cost$

$$z + \frac{p}{\gamma} = cost$$

in B la pressione è inferiore rispetto al punto A poiché è maggiore z

Il teorema di Bernoulli discende dalla seguente eq.

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Hp. FLUIDO IDEALE, INCOMPRIMIBILE MOTO PERMANENTE

$$V = V(t, s(t))$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{ds}{dt}\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial s}$$

Sostituendo

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Dopo aver introdotto varie ipotesi (fluido ideale, incomprimibile, omogeneo) aggiungiamo l'ipotesi di MOTO PERMANENTE cioè a dire che la velocità non varia nel tempo

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) = 0$$

Integrando si ottiene

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H}$$

Per un fluido perfetto incomprimibile in condizione di moto permanente la somma delle altezze piezometrica, geodetica e cinetica è costante lungo una traiettoria o linea di corrente

ENERGIA LEGATA ALLA QUOTA (per unità di peso)

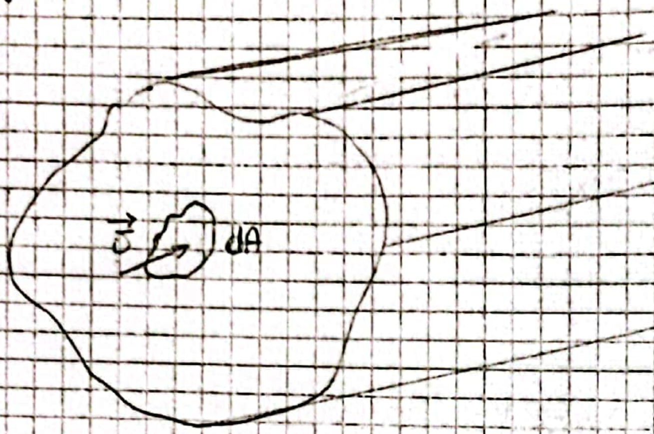
ENERGIA LEGATA ALLA PRESSIONE (per unità di peso)

ENERGIA CINETICA PER UNITÀ DI PESO

La potenza rappresenta l'en[ergia] di un fluido nell'unità di tempo

Calcoliamo la potenza

Consideriamo un tubo di flusso delimitato da linee di corrente (non c'è scambio di massa con l'esterno per definizione di linea di corrente).



Selezionata una area infinitesima dA e sia $\vec{v}$ il vettore ortogonale

$$dQ = v\,dA$$

le particelle che entrano in dA avranno una certa energia:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

La potenza infinitesima della particella sarà:

$dP = \gamma H dQ$ — H carico totale, dQ portata infinitesima

La potenza complessiva sarà:

$$P = \int_Q \gamma H\, dQ = \int_A \gamma H v\, dA = \int_A \gamma\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) v\, dA$$

Se la condotta è rettilinea $z + \frac{p}{\gamma} = cost$

$$P = \int_A \gamma\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) v\, dA + \int_A \gamma \frac{v^2}{2g} v\, dA$$

$$P = \gamma\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \underbrace{\int_A v\, dA}_{Q} + \gamma \int_A \frac{v^3}{2g} dA$$

$$P = \underbrace{\gamma\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) Q}_{\text{potenza legata al carico piezometrico}} + \underbrace{\gamma \int_A \frac{v^3}{2g} dA}_{\text{potenza cinetica effettiva}}$$

v non è la velocità media ma la velocità puntuale

Molte volte si fa riferimento ad una velocità media e quindi ad una potenza fittizia

$$V = \frac{Q}{A} \qquad P_{cf} = \frac{\gamma V^2 Q}{2g}$$

Possiamo legare le due potenze mediante un coeff.

$$\alpha = \frac{\int_A \gamma \frac{v^2}{2g} dQ}{\gamma \frac{V^2}{2g} Q} \quad \begin{matrix}\text{POTENZA CINETICA EFFETTIVA} \\ \text{POTENZA CINETICA FITTIZIA}\end{matrix}$$

α: COEFFICIENTE DI CORIOLIS

$$P_{CE} = \alpha \frac{\gamma V^2}{2g} Q$$

Pertanto:

$$P = \gamma\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g}\right) Q = \gamma H Q$$

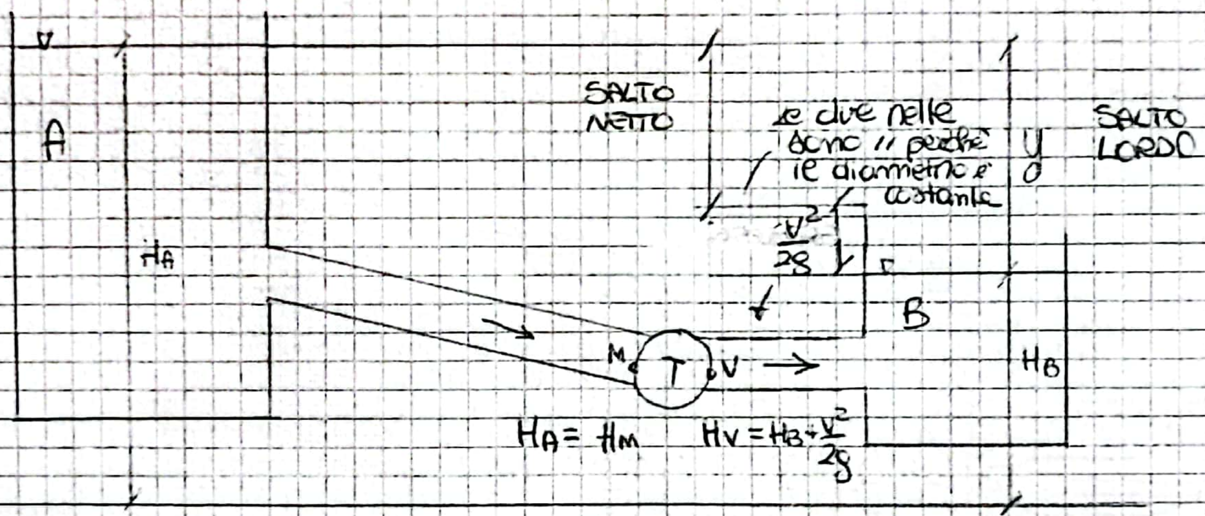
POTENZA COMPLESSIVA INTERA CORRENTE

V = velocità media

$\alpha \simeq 1$ perciò si trascura

È possibile sfruttare la potenza negli IMPIANTI IDROELETTRICI

Schema



L'energia che può sfruttare la turbina è la differenza di carico tra il serbatoio di monte e quello di valle

$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$ la somma dei termini rimane costante

La potenza della corrente per definizione è:

$P = \gamma H Q$

A monte della turbina l'energia è H_M, a valle l'energia è H_V

Nel serbatoio l'acqua è ferma e il termine cinetico è nullo

Nella condotta la somma dei 3 termini continua ad essere pari a H anche se il termine cinetico è diverso da zero

L'ultimo tratto della condotta è noto come diffusore

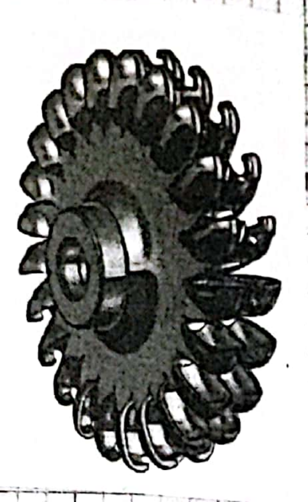
Il salto che la turbina può sfruttare non è Y bensì $Y - \frac{V^2}{2g}$ in quanto vi è una porzione di energia che l'impianto non sfrutta

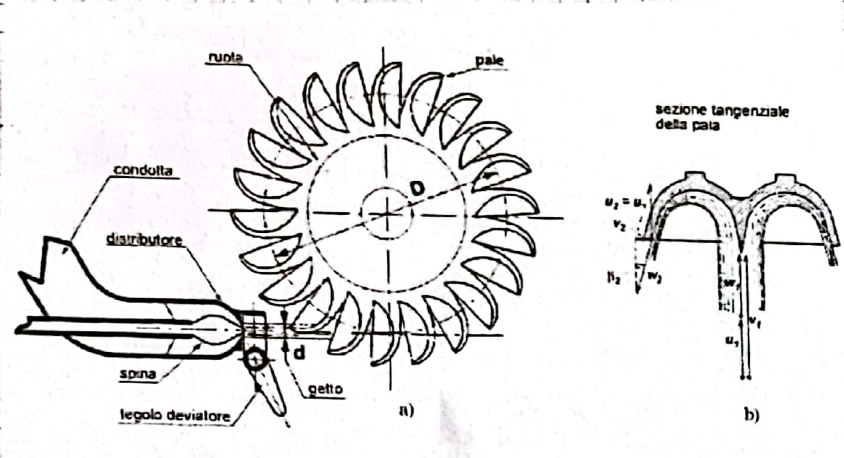
Questo schema è molto semplice ma non va bene in tutti i casi le turbine hanno caratteristiche diverse.
Tuttavia sono caratterizzate da un DISTRIBUTORE che converte l'energia di pressione in energia cinetica

TURBINA PELTON (turbina ad azione)

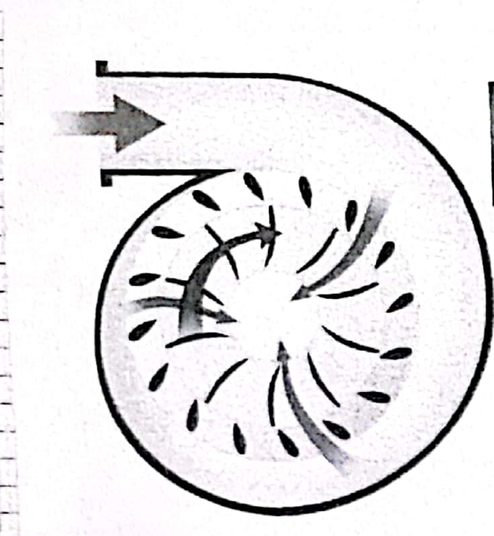
Il distributore in questo caso è un convergente. Il liquido viene sparato sulle pale della turbina, cede la sua energia mettendo in moto le pale della turbina.
Uscendo dal convergente la pressione è pari a quella atmosferica e tutta l'energia di pressione è convertita in energia cinetica.
Abbandonando la turbina, la velocità del liquido è nulla perciò lo schema precedente non va bene (velocità in uscita non è nulla)

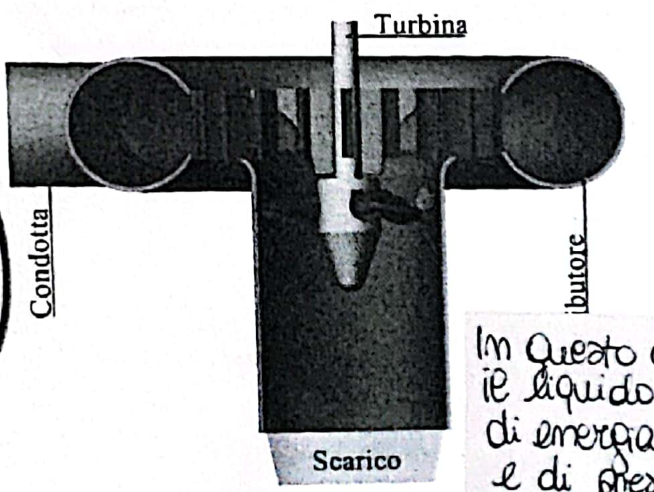
La velocità aziona la girante.
La pressione è pari a quella atmosferica.





TURBINA KAPLAN (turbina a reazione) → anche la turbina KAIMAN





In questo caso il liquido è dotato di energia cinetica e di pressione

Com'è possibile ottimizzare il rendimento?

La potenza disponibile ~~perm~~ è:

$$\boxed{P = \gamma Q Y} \quad \text{POTENZA DISPONIBILE}$$

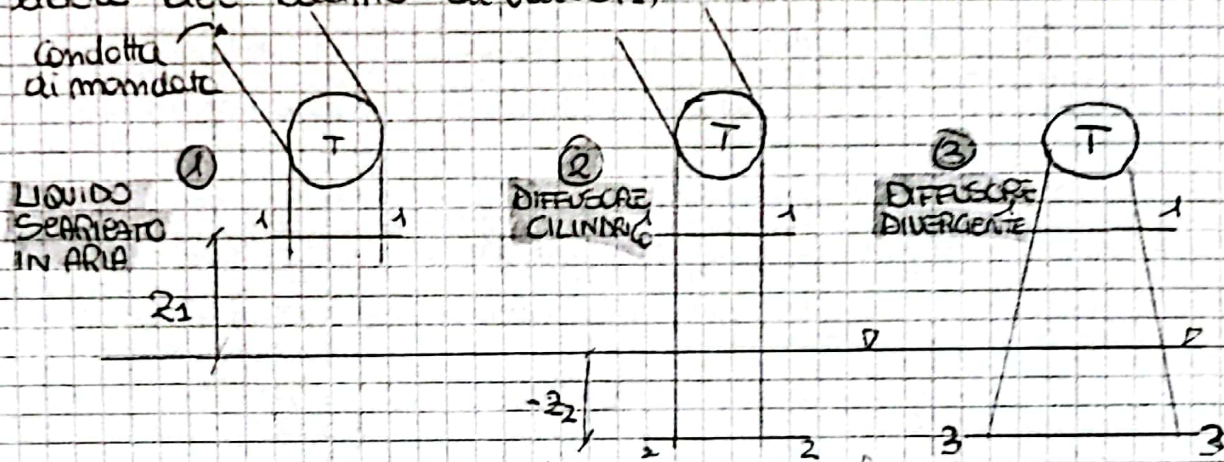
bensì quella effettiva è minore

$$\boxed{P = \gamma Q \Delta H} \quad \text{POTENZA EFFETTIVA}$$

con $\Delta H = Y - \frac{V^2}{2g}$

Per massimizzare la potenza è necessario progettare un diffusore che riduca il termine cinetico.

Supponiamo che la turbina si trova al di sopra del pelo libero del bacino di valle (1)



① il diffusore può essere un condotto cilindrico che scarica all'aperto e al di sopra del pelo libero

② il diffusore scarica al di sotto del pelo libero del bacino di valle ed ha una forma cilindrica

③ il diffusore non è cilindrico ma è un divergente e scarica alla quota $-z_2$ (geometria variabile)

Nella sezione 1-1 il diametro è uguale in tutti e 3 i casi. Per valutare quale sia il sistema più efficiente è necessario calcolare l'energia di valle.

Applichiamo Bernoulli

① $H_{v_1} = z_1 + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + \frac{V_1^2}{2g}$ Scarico in aria quindi $\frac{P_1}{\gamma} = 0$

② $H_{v_2} = -z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$ $V_1 = V_2$ diametro uguale

$H_{v_2} = -z_2 + \frac{\cancel{\gamma} z_2}{\cancel{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$ $P_2 = \gamma z_2$

Già si può notare che $H_{v_1} > H_{v_2}$ e quindi la soluzione ② è migliore di ① poiché si recupera una parte di energia pari a z_1

Per Bernoulli l'energia rimane costante perciò se una forma di energia si recupera, se ne perde un'altra

Applichiamo il teorema tra 1-1 e 2-2 del (2)

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = -\cancel{z_2} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}}$$

$V_1 = V_2$ diametro costante

$P_2 = \gamma z_2$ quindi si semplificano i termini

Si ottiene:

$P_1 = -\gamma z_1$ (intuibile perchè 1 si trova al di sopra del PCI)

Quindi l'energia persa è quella di pressione

Tuttavia bisogna tenere conto della CAVITAZIONE
Questo fenomeno accade quando la pressione assoluta uguaglia quella di vapore saturo (oppure è minore)

Se la pressione raggiunge la $P_{vs}(T)$ l'acqua inizia a bollire. Le bolle collassano e martellano le pareti e le pale della turbina (in ghisa oppure acciaio inox)

Perciò bisogna evitare le pressioni negative in quanto danneggiano l'impianto

Ritorniamo al caso (3)

(3) $H_{v3} = -z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$

$V = \frac{Q}{A}$ quindi $\frac{V_3^2}{2g} < \frac{V_2^2}{2g}$

In questo caso $P = \gamma Q \Delta H_3$ è maggiore poiche l'energia di valle è minore
Perciò risulta conveniente il divergente per massimizzare la potenza

Tuttavia l'energia che si recupera in (3) si perde sotto forma di pressione

Applichiamo il teorema tra 1-1 e 3-3 del (3)

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = -\cancel{z_3} + \cancel{\frac{P_3}{\gamma}} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = -z_1 + \left(\frac{V_3^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}\right) \qquad V_3 < V_2$$

Le depressioni sono aumentate rispetto al caso (2)

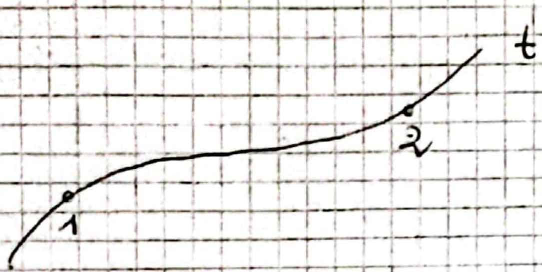
I diffusori hanno sempre la forma di divergente

ESTENSIONE BERNOULLI AL MOTO VARIO

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

↳ quantità nulla sotto l'ipotesi di moto permanente

In questo caso H non si mantiene costante



Linea di corrente

Scegliamo 2 punti ed integriamo

L'energia nei due punti non è uguale.

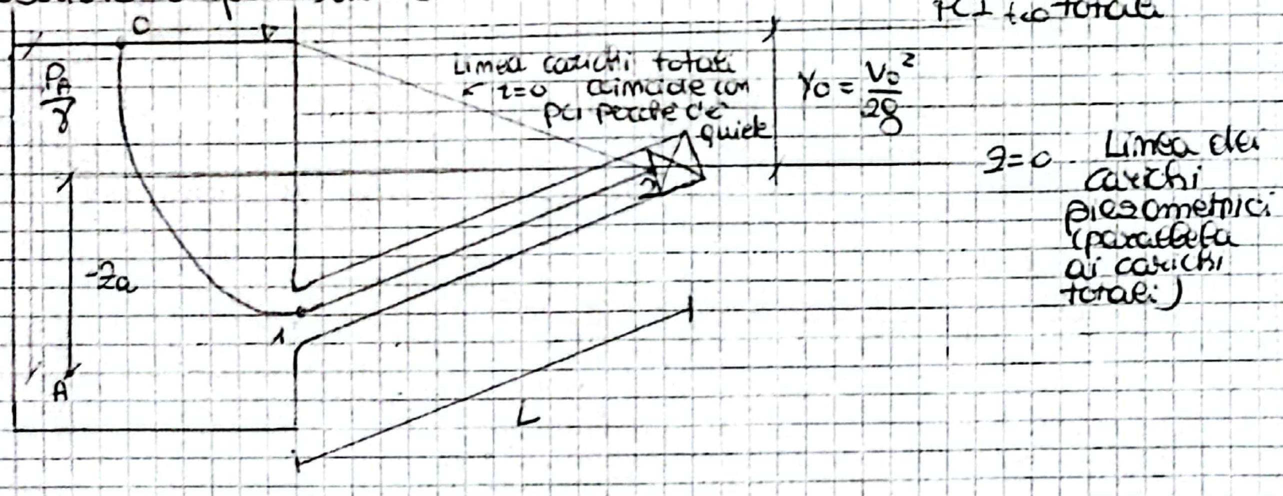
$$\int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = -\int \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{g}\int \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

VARIAZIONE DI ENERGIA LEGATA ALLA VARIAZIONE DI VELOCITÀ

Andiamo a studiare cosa succede nell'avviamento del moto di una corta condotta.

Serbatoio a pelo libero



Supponiamo che la condotta sia raccordata (per ipotesi di moto ideale le perdite devono essere nulle)

L piccolo → perdite piccole

↳ ipotesi fluido incomprimibile, pressioni si risentono in tutti i punti

Supponiamo di inserire un tappo alla condotta $\boxed{t<0}$

Y_0 è il carico idrostatico

In A il carico è pari a $h = \frac{p_A}{\gamma} - z_A = Y_0$

È un moto vario e si ragiona per istanti di tempo

$t = \infty$

Togliamo il tappo e da un moto vario si passa ad uno permanente

$$H = \text{cost.}$$

Possiamo calcolare la velocità in uscita

Consideriamo una generica linea di corrente e applichiamo Bernoulli tra 0 e 2 (la linea passa per l'asse della condotta)

$$\underset{Y_0}{z_0} + \underset{\text{atm}}{\cancel{\frac{P_0}{\gamma}}} + \underset{\text{fluido fermo}}{\cancel{\frac{V_0^2}{2g}}} = \cancel{z_2} + \underset{\text{atm}}{\cancel{\frac{P_2}{\gamma}}} + \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow z_0 = \frac{V_2^2}{2g} \rightarrow$$

VELOCITÀ TORRICELLIANA (si identifica con pedice 0)

È legata al carico

$$\frac{V_0^2}{2g} = Y_0$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{2gY_0}} \quad \text{per } t = \infty$$

Tra 0 e ∞ il moto è vario vale la legge:

$$\frac{\partial H}{\partial S} = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Consideriamo l'istante $t = 0$ appena si toglie il tappo

$$\int_0^2 \frac{\partial H}{\partial S} dS = -\frac{1}{g}\int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} dS$$

Applichiamo la legge alla stessa linea di corrente

$$\cancel{\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial S} dS} + \int_1^2 \frac{\partial H}{\partial S} dS = \cancel{-\frac{1}{g}\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} dS} - \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dS$$

variazione energia tra 0 e 1 → Non varia perché si assume costante il livello del serbatoio

Variazione velocità nel serbatoio è nulla perché l'acqua è ferma

$$\int_1^2 \frac{\partial H}{\partial S} dS = -\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dS$$

Questa legge vale per moto vario

La portata Q è funzione di t e S(t) ma fissato l'istante di tempo Q è costante

$$Q = Q(t, S(t))$$

$$\frac{dv(s)}{dt} = \frac{\partial v(s)}{\partial t} + v\cancel{\frac{\partial v(s)}{\partial s}}$$

$Q = cost$
$A = cost$
$\Downarrow$ allora
$V(s) = cost$

$$\frac{dv(s)}{dt} = \frac{\partial v(s)}{\partial t}$$

Quindi si ottiene

$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{dv}{dt}\, ds$$

L = costante

$$\boxed{H_2 - H_1 = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt} L}$$

La differenza di energia di due punti dipende dalla variazione di velocità e dalla lunghezza della condotta

$t=0$ ELIMINAZIONE TAPPO $\quad H_2 - H_1 = -\frac{1}{g}\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} L$

Istante di massima accelerazione, fluido fermo

$$H_2 = \cancel{z_2} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} = 0$$

in aria $\quad$ liquido fermo

$$H_1 = -z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = Y_0$$

punto 1 appartenente al serbatoio (quindi fermo)

Quindi:

$$0 - Y_0 = -\frac{1}{g}\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} L \rightarrow \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{g\, Y_0}{L}$$

t generico $\quad$ LIQUIDO FUORIESCE

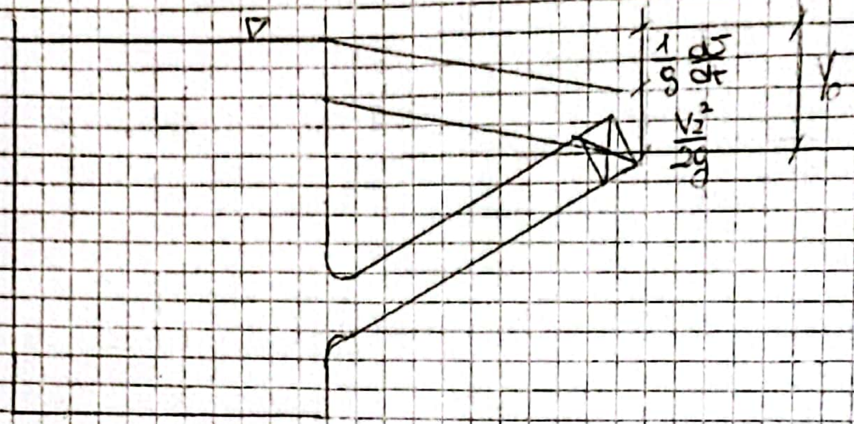
$$H_2 - H_1 = -\frac{1}{g}\left(\frac{dv}{dt}\right)_t L$$

$$H_2 = \cancel{z_2} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_1 = -z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = Y_0 = \frac{V_0^2}{2g}$$ (nel caso di moto permanente)

$$\frac{V_2^2}{2g} - Y_0 = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}L$$

$$Y_0 - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{1}{g}\frac{dv}{dt}L$$



$$\boxed{\frac{V_0^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{g}\frac{dv}{dt}\cdot L}$$

↓ energia cinetica all'istante considerato

Questa relazione ci permette di individuare la legge di variazione della velocità

* Equazione differenziale del primo ordine

$$V_0^2 - V^2 = 2L\frac{dv}{dt}$$

$$dt = 2L\frac{dv}{V_0^2 - V^2}$$

$$dt = \frac{\cancel{2}L}{\cancel{2}V_0}\left[\frac{dv}{V_0+V} + \frac{dv}{V_0-V}\right]$$ espressione equivalente

Integrando:

$$t = \frac{L}{V_0}\left[\ln(V_0+V) - \ln(V_0-V)\right] + C$$

↳ costante di integrazione

↓ Si introducono le condizioni al contorno

$$0 = \frac{L}{V_0}\left[\ln V_0 - \ln V_0\right] + C$$

$t=0$ $V=0$

quindi $C=0$

$$t = \frac{L}{V_0}\ln\frac{V_0+V}{V_0-V}$$

$$\frac{V_0 t}{L} = \ln\frac{V_0+V}{V_0-V}$$

$$e^{\frac{V_0 t}{L}} = \frac{V_0+V}{V_0-V}$$

$$(V_0 - V)e^{\frac{V_0 t}{L}} = V_0 + V$$

$$V_0 e^{\frac{V_0 t}{L}} - V e^{\frac{V_0 t}{L}} = V_0 + V$$

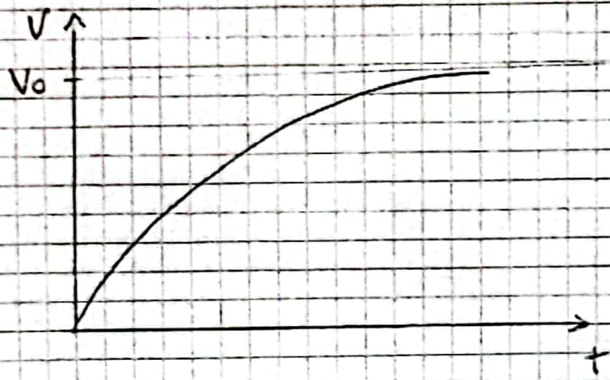
$$V_0 \left(e^{\frac{V_0 t}{L}} - 1\right) = V\left(e^{\frac{V_0 t}{L}} + 1\right)$$

Legge di variazione cioè $V(t)$

$$\boxed{V = V_0 \frac{\left(e^{\frac{V_0 t}{L}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{V_0 t}{L}} + 1\right)}}$$

LEGGE DI VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ

Diagrammiamo la legge:



La velocità V_0 è quella di moto permanente

$$P = \gamma Q \Delta H$$

a regime $Q = V_0 \cdot A$

La potenza aumenterà nel tempo fino a raggiungere la condizione a regime

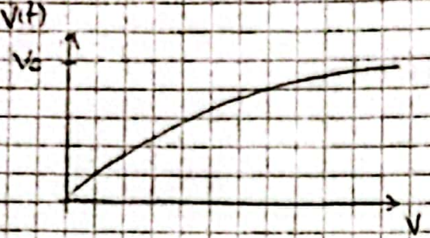
Lo scopo è far in modo che il sistema arrivi a regime il prima possibile

POZZO PIEZOMETRICO

Abbiamo ricavato la legge di variazione della velocità nel tempo

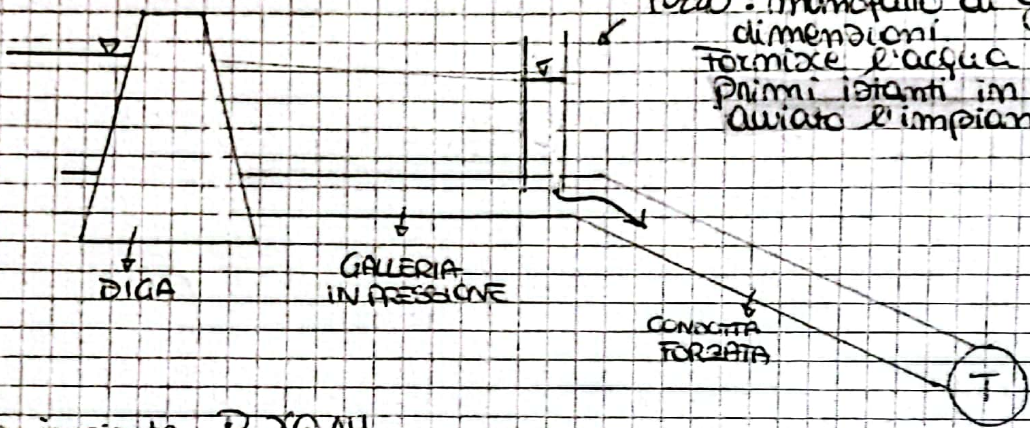
$$V = V(t) = V_0 \frac{\left(e^{\frac{V_0 t}{L}} - 1\right)}{e^{\frac{V_0 t}{L}} - 1}$$

V_0 velocità di moto permanente (la sappiamo calcolare)



Ciò che succede in una piccola condotta è analogo agli impianti idroelettrici

Consideriamo un impianto a piccola portata e alta caduta



Pozzo: manufatto di grandi dimensioni. Fornisce l'acqua nei primi istanti in cui viene avviato l'impianto

Potenza impianto $P = \gamma Q \Delta H$

Q → portata (dipende dalla velocità)

$Q = \frac{V}{A}$ → la velocità è funzione di V_0, t, L

L è la lunghezza della galleria in pressione e condotta forzata (maggiore è L e maggiore sarà il tempo per raggiungere V_0) → si inserisce un pozzo piezometrico

Esempio

$L = 6000\ m$

$V_0 = 3\ m/s$ → $V(100\ s) = 0{,}24\ V_0$

$t = 100\ s$

Lo scopo è ridurre il tempo t che serve per raggiungere V_0

↓

Si può spezzare la condotta introducendo un POZZO PIEZOMETRICO

Il livello del pozzo piezometrico è più basso a causa delle perdite pari a $J \cdot L$

Il pozzo si comporta come un volano, fornisce l'acqua alla condotta forzata e dopo, a causa dell'abbassamento del livello, dall'invaso l'acqua va verso valle

La condizione a regime si raggiunge prima perché il pozzo funge da invaso, la lunghezza L della condotta si riduce (è pari solo alla condotta forzata)

Il pozzo ha una seconda funzione ovvero quella di proteggere la galleria dalle sovrappressioni che nascono a causa di manovre brusche (esempio chiusura valvole)

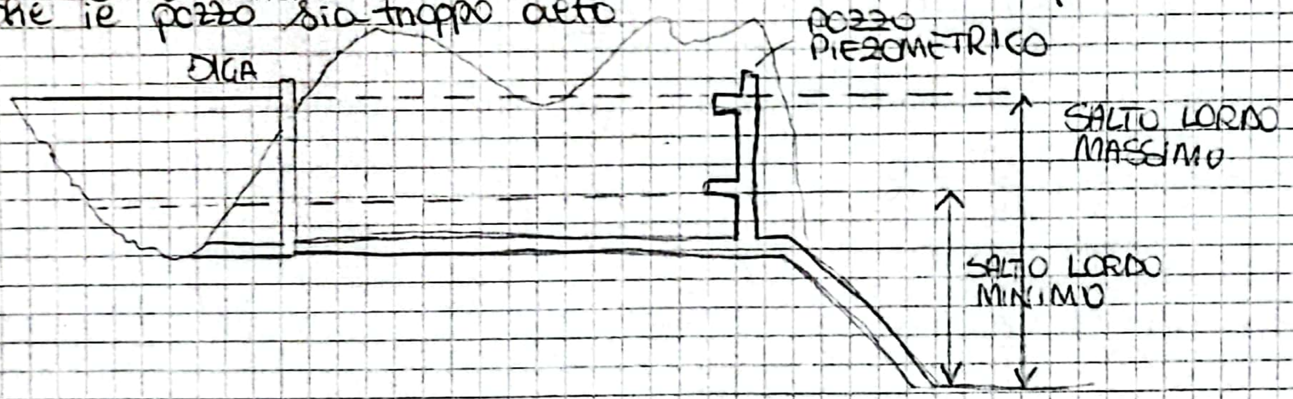
Infatti a seguito di una chiusura della valvola, l'energia cinetica si converte in energia di pressione per tale ragione la condotta forzata è realizzata in acciaio.

Sotto queste condizioni l'acqua in galleria non si arresta ma alimenta il pozzo e quindi le pressioni aumentano e il livello del pozzo si innalza fin tanto che supera il livello dell'invaso. In quel caso raggiunta una quota z_{max} l'acqua tende a spostarsi verso l'invaso fin tanto che si raggiunge una quota z_{MIN}

Nasce un moto oscillatorio dell'acqua tra pozzo e galleria in pressione ed il livello dell'acqua del pozzo si sposta tra z_{MAX} e z_{MIN}

z_{MAX} è importante perché influenza la lunghezza del pozzo così come z_{MIN} (bisogna evitare che entri aria nella condotta forzata)

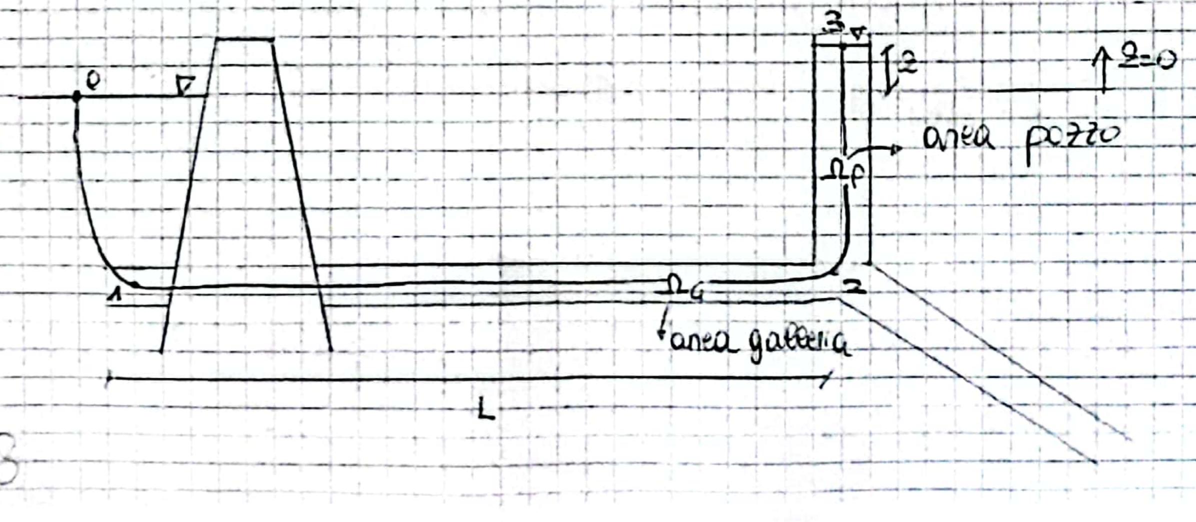
Il pozzo può essere dotato di due camere, come in figura una di alimentazione ed un'altra che serve per evitare che il pozzo sia troppo alto



Per calcolare z_{MAX} bisogna considerare la legge di moto vario

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$ vale lungo una linea di corrente

Schematizziamo l'impianto



Tracciamo una linea di corrente ed individuiamo 4 p.

Non essendoci variazioni spaziali: $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t}$

$$\int_0^3 \frac{\partial H}{\partial S} dS = -\frac{1}{g}\int_0^3 \frac{dv}{dt} dS$$

Lo scopo è quello di ricavare la legge di variazione di z

Spezziamo l'integrale:

$$\cancel{\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial S} dS} + \int_1^2 \frac{\partial H}{\partial S} dS + \int_2^3 \frac{\partial H}{\partial S} dS = \cancel{-\frac{1}{g}\int_0^1 \frac{dv}{dt} dS} - \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{dv}{dt} dS \cancel{- \frac{1}{g}\int_2^3 \frac{dv}{dt} dS}$$

il bacino ha una superficie libera costante

l'acqua è ferma nel bacino

all'interno del pozzo il moto oscillatorio è molto lento e si può trascurare

$$\int_1^2 \frac{\partial H}{\partial S} dS + \int_2^3 \frac{\partial H}{\partial S} dS = -\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{dv}{dt} dS$$

$$H_3 - H_1 = -\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{dv}{dt} dS$$

Per calcolare l'energia bisogna applicare Bernoulli:

$$H_3 = z_3 + \cancel{\frac{p_3}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_3^2}{2g}} = z$$

contatto con aria — velocità trascurabile

$$H_1 = \cancel{-z_1} + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}$$

acqua ferma

$\frac{p_1}{\gamma} = -z_1$

per la scelta del sistema di riferimento

$$z - 0 = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt} L$$

EQUAZIONE DEL MOTO (due incognite: z e v)

Serve un'altra equazione: CONTINUITÀ

La portata in un particolare istante t, della galleria è uguale alla variazione di portata nel pozzo

$$* \quad V \Omega_G = \Omega_P \frac{dz}{dt}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

velocità in un generico istante t

$$V = \frac{\Omega_P}{\Omega_G}\frac{dz}{dt}$$

$$z + \frac{1}{g}\frac{dv}{dt}L = 0$$

$$z + \frac{L}{g}\frac{\Omega_P}{\Omega_G}\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI II GRADO valide per fluido perfetto e incomprimibile

Struttura soluzione

$z = A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t$ con ω frequenza oscillazioni

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}$$

Per ricavare A e B bisogna introdurre le equazioni al contorno 1) e 2)

1) $t=0 \quad z=0$ non ci sono oscillazioni quindi $z=0$

$0 = A\,\cancel{\text{sen}(\omega\cdot 0)} + B\cos(\omega\cdot 0) \rightarrow B=0$

la legge diventa:

$z = A\,\text{sen}(\omega t)$

2) $t=0 \quad V=V_0$ MOTO PERMANENTE

$$V_0\Omega_G = \Omega_P\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} \rightarrow V_0\Omega_G = \Omega_P A\omega\cos(\omega t)_{t=0}$$

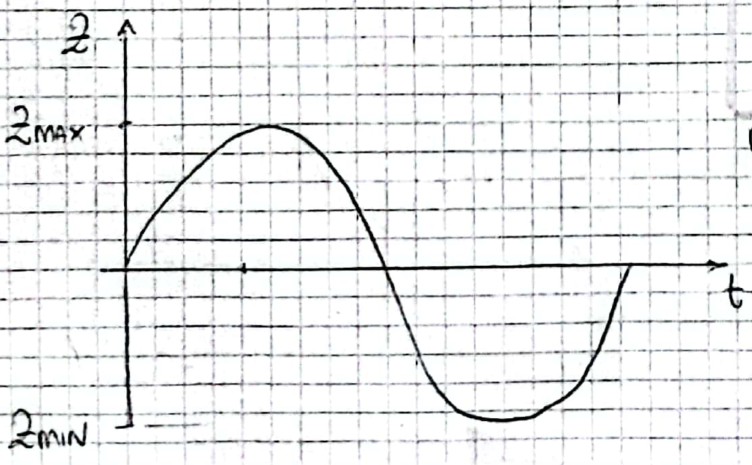
$$V_0\Omega_G = \Omega_P A\omega$$

$$A = \frac{V_0}{\omega}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}$$

$$A = \frac{\Omega_G}{\Omega_P}V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_P}{\Omega_G}} = V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}$$

La soluzione diventa:

$$z = V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}\,\text{sen}(\omega t)$$ La z oscilla con una legge sinusoidale



$$\boxed{z_{MAX} = V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}}$$
↓
MASSIMO LIVELLO RAGGIUNTO NEL POZZO

↳ per ridurre z si può aumentare l'area del pozzo Ω_P

Il periodo di oscillazione sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_P}{\Omega_G}}$$ → il periodo di oscillazione cresce al crescere dell'area del pozzo

Esempio numerico

$L = 3980\ m$

$\Omega_G = 4\ m^2$

$\Omega_p = 64\ m^2$

$Q_0 = 12\ m^3/s$

VELOCITÀ DI MOTO PERMANENTE $\quad V_0 = \dfrac{Q_0}{\Omega_G} = 3\ m/s$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3934}{9{,}81} \frac{64}{4}} \simeq 504\ s$$

$$z_{MAX} = V_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{\Omega_G}{\Omega_p}} = 15\ m$$

→ si raggiunge ad un quarto di periodo cioè per:

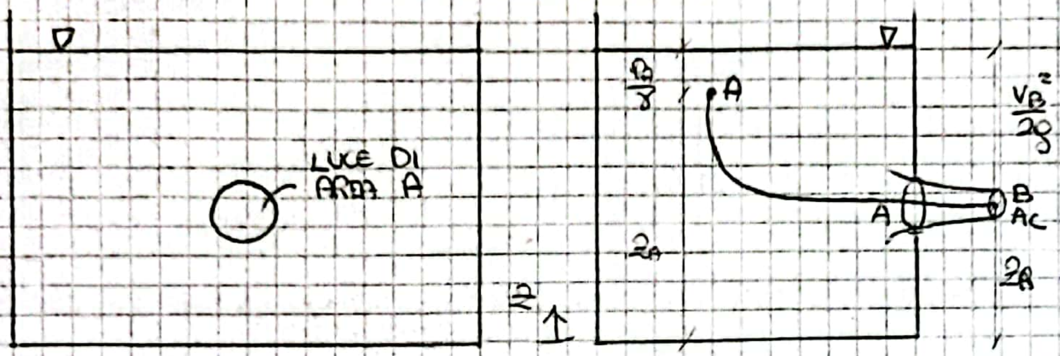
$t = 126\ s$

ALCOLO PORTATA NEI CANALI

La portata può essere calcolata mediante stramazzi ovvero delle piccole luci.

Consideriamo un serbatoio e pratichiamo un foro al di sotto della superficie libera (BATTENTE)

LUCE A BATTENTE (tutto il contorno della luce è al di sotto del pelo libero)



Consideriamo la sezione trasversale del serbatoio
Dopo aver praticato il foro l'acqua fuoriesce dal serbatoio ed in prossimità dell'area contratta A_c, le traiettorie sono rettilinee

Prendiamo una generica linea di corrente

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}} = H_B = z_B + \cancel{\frac{p_B}{\gamma}} + \frac{V_B^2}{2g}$$

fluido fermo

L'energia si trasforma ma la somma rimane costante

$$\frac{V_B^2}{2g} = z_A - z_B + \frac{p_A}{\gamma} \rightarrow \frac{V_B^2}{2g} = h_B$$

CARICO SULLA LUCE

$V_B = \sqrt{2gh_B}$ Tuttavia bisogna tenere conto delle perdite

$$V = C_v \sqrt{2gh_B}$$

COEFFICIENTE VICINO ALL'UNITÀ

$C_v = 0,97$ coeff. di velocità

$Q = V \cdot A_c$ $\qquad A_c = A \cdot C_c$

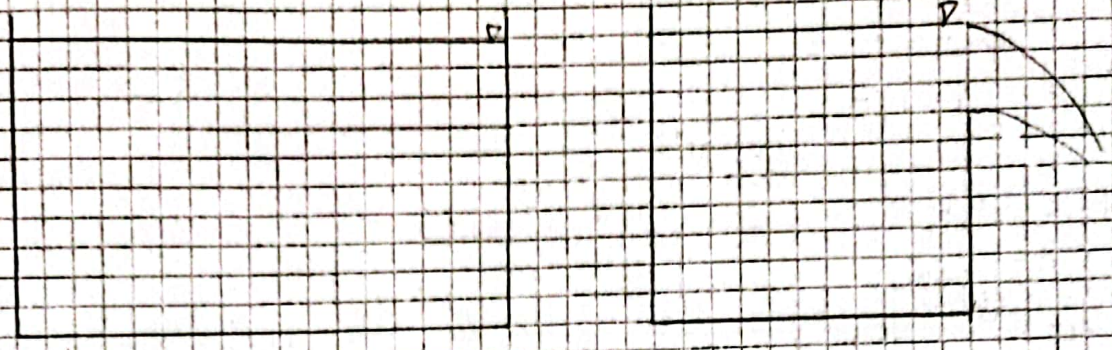
$$Q = \underbrace{C_v C_c}_{\mu} \sqrt{2gh_B}\, A \rightarrow \boxed{Q(h) = \mu A \sqrt{2gh}}$$

μ COEFFICIENTE DI AFFLUSSO

$\mu = 0,67$

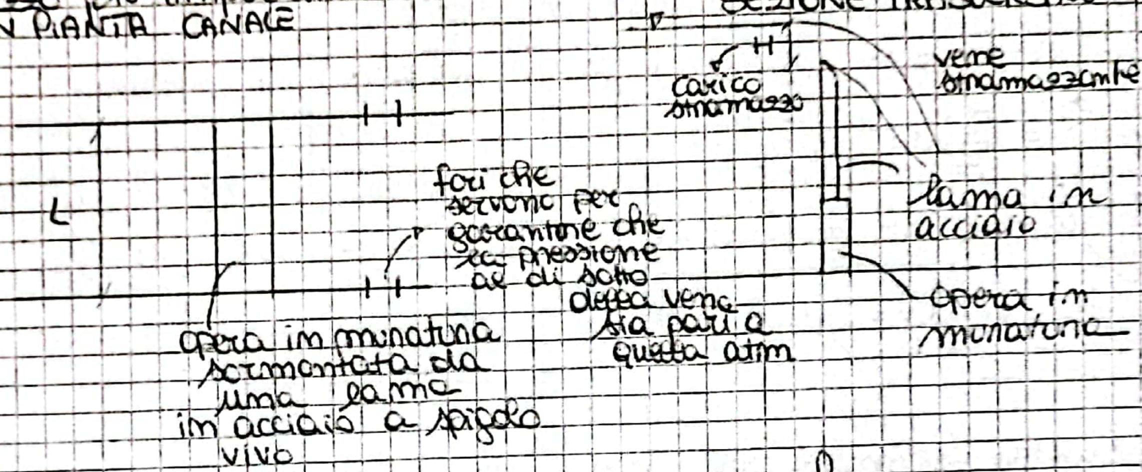
Per calcolare la portata dei canali vengono utilizzate le luci ovvero dei fori che possono essere al di sotto del pelo libero (LUCE A BATTENTE) oppure solo la parte inferiore al di sotto. (LUCE A STRAMAZZO)

LUCE A STRAMAZZO (soltanto il contorno inferiore è al di sotto del pelo libero)



Gli stramazzi servono a misurare le portate nei canali

Lo stramazzo più importante è lo BAZIN



Lo scopo è trovare una relazione tra Q e h

$Q = Q(h)$

Non è possibile individuare una sezione in cui la traiettoria è rettilinea e parallela come nel caso precedente

Quindi è stata dedotta sperimentalmente la relazione

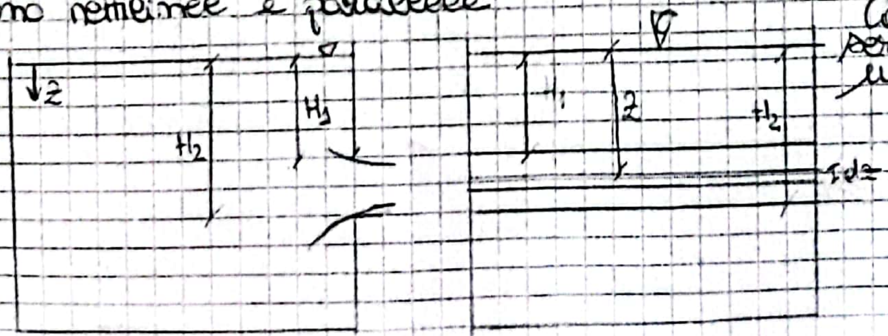
$$Q = \mu_s L H \sqrt{2gH} \qquad \mu \simeq 0{,}42$$

coeff di afflusso

carico misurato sullo stramazzo

Questa formula può essere giustificata applicando Bernoulli anche se non si potrebbe fare perché le traiettorie non sono rettilinee e parallele

Consideriamo un serbatoio con una luce



È una luce a battente poiché è tutta al di sotto della superficie libera

Consideriamo una striscialina di ampiezza dz
Calcoliamo la portata che fluisce attraverso la striscialina di area $dz \cdot L$

$$dQ = \mu L \, dz \sqrt{2gz}$$

z → carico sulla striscialina

Integrando si ottiene la portata totale

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu L \sqrt{2gz}\, dz = \mu L \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} z^{1/2}\, dz = \mu L \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{H_1}^{H_2}$$

$$\boxed{Q = \mu L \sqrt{2g}\, \frac{2}{3} \left[H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right]}$$ PORTATA NEL CASO DI UNA LUCE A BATTENTE

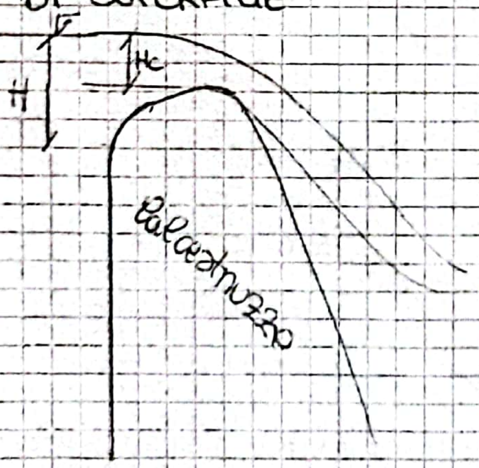
Se $H_1 \to 0$ la luce tende ad essere a STRAMAZZO

$$Q = \frac{2}{3} \mu L H \sqrt{2gH}$$

$\mu = 0{,}6$ per le luci a battente $\Rightarrow \frac{2}{3}\mu \simeq 0{,}42 = \mu_s$

Per cui $\boxed{Q = \mu_s L H \sqrt{2gH}}$ PORTATA NEL CASO DI LUCE BAZIN

Questa formula può essere utilizzata nel caso della diga
L'acqua in eccesso viene fatta sfiorare mediante uno SFIORATORE DI SUPERFICIE



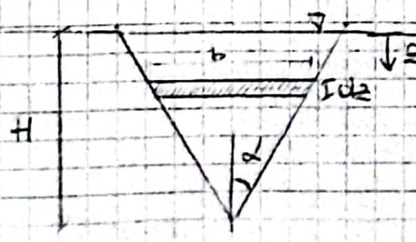
SFIORATORE A STRAMAZZO CREAGER

$$Q = \mu_{sc} L H_c \sqrt{2gH_c}$$

μ_{sc} → ricavato sperimentalmente
$\mu_{sc} = 0{,}47$

STRAMAZZO TRIANGOLARE

Vista frontale



Per il calcolo della portata consideriamo una striscialina dz a cui è associata una portata dQ

Troviamo una relazione tra Q e α

$$dA = b\, dz$$

$$dQ = \mu\, b\, dz \sqrt{2gz}$$

z → carico sulla luce

Integniamo tra 0 e H per ottenere la portata totale

$$Q = \int_0^H \mu\sqrt{2gz}\, b\, dz$$

$$b = 2(H-z)\tan\alpha$$

Sostituendo:

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}\tan\alpha \int_0^H (H-z)\, z^{1/2}\, dz = 2\mu\sqrt{2g}\tan\alpha \int_0^H (Hz^{1/2} - z^{3/2})\, dz =$$

$$= 2\mu\sqrt{2g}\tan\alpha \left[\frac{2}{3} H z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}}\right]_0^H = 2\mu\sqrt{2g}\tan\alpha \left[\frac{2}{3} H^{5/2} - \frac{2}{5} H^{5/2}\right]$$

$$\boxed{Q = \frac{8}{15}\mu\sqrt{2gH}\tan\alpha\, H^2}$$

carichi abbastanza elevati anche in presenza di portate piccole

Se $\alpha = 45°$ STRAMAZZO THOMSON

$$\boxed{Q = \frac{8}{15}\mu H^2\sqrt{2gH}}$$