# TEORIA DEI MODELLI

E' una disciplina molto importante in fluido dinamica per risolvere alcuni problemi complessi. Tali problemi non possono essere risolti per via analitica e quindi si creano dei modelli in scala ridotta su cui si effettuano degli esperimenti

La teoria dei modelli si avvale di due pilastri: l'ANALISI DIMENSIONALE e la TEORIA DELLA SIMILITUDINE

## ANALISI DIMENSIONALE

Bisogna utilizzare il SISTEMA INTERNAZIONALE
Le tre grandezze fondamentali sono:

$$M \quad L \quad T$$
$$[Kg] \quad [m] \quad [s]$$

Tutte le altre grandezze sono dette DERIVATE (cinematiche, geometriche e dinamiche)
Consideriamo una generica grandezza può essere espressa come segue:

$Q_i = [Kg^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot s^{\gamma}]$ con $\alpha, \beta, \gamma$ indici

Ad esempio la pressione si misura in $\frac{N}{m^2}$

$$P = \frac{N}{m^2} = Kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{m^2} \rightarrow P = Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

Nel caso della pressione $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$

Consideriamo come grandezze fondamentali questa terna di grandezze:

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3$$

Così M L T diventano grandezze derivate
Esprimiamo le tre grandezze:

$$[Q_1] = [Kg^{\alpha_1} \, m^{\beta_1} \, s^{\gamma_1}]$$
$$[Q_2] = [Kg^{\alpha_2} \, m^{\beta_2} \, s^{\gamma_2}]$$
$$[Q_3] = [Kg^{\alpha_3} \, m^{\beta_3} \, s^{\gamma_3}]$$

Si dimostra che se il determinante relativo alla matrice ottenuta dagli esponenti è diverso da zero, allora è possibile assumere $Q_1, Q_2, Q_3$ come grandezze fondamentali

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{\text{questo vuol dire}} Q_1^p \, Q_2^q \, Q_3^r \neq \text{numero puro}$$

tranne nel caso in cui $p = q = r = 0$

Se vale questa relazione $Q_1, Q_2, Q_3$ sono grandezze dimensionalmente dipendenti

Si dimostra questa relazione (ma noi non lo faremo)

ESEMPIO 1)

Consideriamo 3 grandezze:

DENSITÀ $\rho$ (dinamica)

VELOCITÀ $U$ (cinematica)

DIMENSIONE DI UN CORPO $D$ (geometrica)

Valutiamo le dimensioni

$[\rho]=[Kg \cdot m^{-3}]=[Kg^{1} \cdot m^{-3} \cdot s^{0}]$ $\alpha=1$ $\beta=-3$ $\gamma=0$

$[U]=[m \cdot s^{-1}]=[Kg^{0} \cdot m^{1} \cdot s^{-1}]$ $\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=-1$

$[D]=[m]=[Kg^{0} \cdot m^{1} \cdot s^{0}]$ $\alpha=0$ $\beta=1$ $\gamma=0$

Scriviamo la matrice formata dagli indici

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le determinante

$D(A)=1 \neq 0$ → le tre grandezze possono essere utilizzate come fondamentali perché sono dimensionalmente dipendenti

ESEMPIO 2)

VISCOSITÀ $\mu$ (dinamica)

① $[\mu]=[Kg^{1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$ $\alpha=1$ $\beta=-1$ $\gamma=-1$

Immaginiamo di voler esplicitare la viscosità in funzione di $\rho$, $U$ e $D$

② $[\mu]=[\rho^{a} \, U^{b} \, D^{c}]$

Dobbiamo calcolare gli esponenti uguagliamo le due relazioni

$[Kg^{1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]=[\rho^{a} \cdot U^{b} \cdot D^{c}]=[(Kg \cdot m^{-3})^{a} \, (m \cdot s^{-1})^{b} \cdot m^{c}]$

$[Kg^{1} \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]=[Kg^{a} \cdot m^{-3a+b+c} \cdot s^{-b}]$

$a=1$

$-3a+b+c=-1 \rightarrow -3+1+c=-1 \rightarrow c=1$

$-b=-1 \rightarrow b=1$

Per cui $[\mu]=[\rho^{1} \cdot U^{1} \cdot D^{1}]$

# TEOREMA DI BUCKINGHAM (oppure TEOREMA $\Pi$)

Teorema fondamentale per la modellistica idraulica

Supponiamo di osservare un fenomeno fisico in cui una grandezza è funzione di altre:

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$$

Immaginiamo che $Q_1, Q_2, Q_3$ siano fondamentali vale a dire che il det. della matrice degli esponenti è $\neq 0$

$$y = f\left(Q_1, Q_2, Q_3, \frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}} Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}, \frac{Q_5}{Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}} Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}\right)$$

calcoliamo $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4$ affinché il rapporto sia adimensionale analogamente con $\alpha_5\ \beta_5\ \gamma_5$

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4 Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}, N_5 Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5})$$

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

La dipendenza da $Q_1, Q_2, Q_3$ è stata già esplicitata dai primi termini

il primo membro rappresenta una grandezza dimensionale perciò si può scrivere

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}} \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

Calcoliamo $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$

$$N_y\, Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

La dimensione al primo membro è data da $Q_1^{\alpha_y} Q_2^{\beta_y} Q_3^{\gamma_y}$ ma deve essere uguale a quella del secondo membro

$$N_y\, \cancel{Q_1^{\alpha_y}} \cdot \cancel{Q_2^{\beta_y}} \cdot \cancel{Q_3^{\gamma_y}} = \cancel{Q_1^{\alpha_y}}\, \cancel{Q_2^{\beta_y}}\, \cancel{Q_3^{\gamma_y}}\, G(N_4, N_5)$$

Semplifichiamo i termini comuni

In conclusione:

$$N_y = G(N_4, N_5)$$

Legame fra 3 numeri puri

Enunciato del teorema:

"Se in un fenomeno fisico intervengono n grandezze generiche (nel nostro caso erano 6) e sia m il numero di grandezze fondamentali allora il problema si riduce a n-m legame tra numeri puri"

il teorema riduce il numero di variabili e semplifica le relazioni poiché il legame è tra numeri puri

Immaginiamo che il fenomeno fisico sia l'acqua che scorre in un tubo

L'azione di trascinamento è funzione di queste grandezze


$$F = f(\rho, v, D, \mu)$$

IPOTESI DI FLUIDO IDEALE (altrimenti avremmo dovuto considerare anche la scabrezza del tubo)

Applichiamo il teorema $\pi$. Individuiamo 3 grandezze es. $\rho, v, D$

Avevamo dimostrato che per $\rho, v, D \rightarrow \det A \neq 0$

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} v^{\beta} D^{\gamma}}\, \rho^{\alpha} v^{\beta} D^{\gamma} = f\left(\rho, v, D, \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} D^{\gamma_1}}\, \rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} D^{\gamma_1}\right)$$

Il passo successivo è quello di calcolare $\alpha, \beta, \gamma$ affinché il primo termine sia un numero puro

$$[F] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}]$$
$$[\rho] = [kg \cdot m^{-3}]$$
$$[v] = [m \cdot s^{-1}]$$
$$[D] = [m]$$
$$[\mu] = [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$$

$$[kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [(kg \cdot m^{-3})^{\alpha} \cdot (m \cdot s^{-1})^{\beta} \cdot m^{\gamma}]$$
$$[kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [kg^{\alpha} \cdot m^{-3\alpha+\beta+\gamma} \cdot s^{-\beta}]$$

$$\alpha = 1$$
$$-3\alpha+\beta+\gamma = 1 \rightarrow -3+2+\gamma = 1 \rightarrow \gamma = 2 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$
$$-\beta = -2 \rightarrow \beta = 2$$

Analogamente ricaviamo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}] = [(kg \cdot m^{-3})^{\alpha_1} \cdot (m \cdot s^{-1})^{\beta_1} \cdot m^{\gamma_1}]$$
$$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}] = [kg^{\alpha_1} \cdot m^{-3\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot s^{-\beta_1}]$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

Perciò si ottiene:

$$\underbrace{\frac{F}{\rho^1 v^2 D^2}}_{N_F = \text{NUMERO ADIMENSIONALE}}\, \rho^1 v^2 D^2 = f\left(\rho, v, D, \underbrace{\frac{\mu}{\rho^1 v^1 D^1}}_{N_1 = \text{NUMERO ADIMENSIONALE}}\, \rho^1 v^1 D^1\right)$$

$$N_F\, \rho^1 v^2 D^2 = f(\rho, v, D, N_1, \rho^1 v^1 D^1)$$

$$N_F\, \cancel{\rho^1 v^2 D^2} = \cancel{\rho v^2 D^2}\, G(N_1) \rightarrow N_F = G(N_1)$$

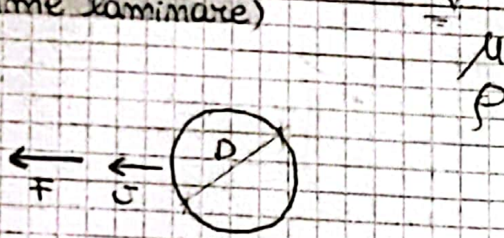
Legame fra due numeri puri

APPLICAZIONE DEL TEOREMA $\Pi$

Esempio 1)

Consideriamo una massa fluida ed un corpo sferico di diametro D.
Supponiamo che la sfera stia viaggiando con velocità $v$ molto piccola. La massa fluida avrà una viscosità dinamica $\mu$ ed una densità $\rho$.

SFERA LONTANA DAL PELO LIBERO
(regime laminare)




Supponiamo di voler calcolare la forza F che serve a trascinare la sfera con velocità $v$ lontano dal pelo libero.

Il problema può essere visto anche come un corpo fermo investito da una corrente in movimento con velocità $v$

Caso in cui $v$ molto piccola → REGIME LAMINARE
La resistenza al moto in genere sono funzione di $\mu$ e $\rho$

$$R = R_A(\mu) + R_B(\rho) \rightarrow \text{resistenza di scia}$$

Nel caso di REGIME DI MOTO LAMINARE il secondo termine si può trascurare
Perciò:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Lo scopo è calcolare la forza che serve per trascinare la sfera

$$F = f(v, D, \mu)$$

Utilizziamo il teorema $\Pi$

Si calcolano gli esponenti $\alpha, \beta, \gamma$ delle grandezze e si valuta il determinante, poiché è diverso da zero si applica il teorema

$m = 4$

$n = 3$

$m - n = 1$ NUMERO PURO

$$\frac{F}{V^\alpha D^\beta \mu^\gamma} = \text{costante}$$

(il numero puro non dipende da nulla)

$$F = f(v, D, \mu)$$

Calcoliamo $\alpha, \beta, \gamma$

$$[Kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [(m \cdot s^{-1})^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot (Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1})^{\gamma}]$$

$$[Kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [Kg^{\gamma} \cdot m^{\alpha+\beta-\gamma} \cdot s^{-\alpha-\gamma}]$$

$\gamma = 1$

$\alpha+\beta-\gamma = 1 \rightarrow \beta = 1$

$-\alpha-\gamma = -2 \rightarrow \alpha = 1$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$N_F = \frac{F}{V^1 D^1 \mu^1} = \text{costante} \rightarrow F = \text{cost} \cdot V \cdot D \cdot \mu$$

Il teorema $\Pi$ semplifica il problema ma non lo risolve. Per calcolare il valore della costante bisogna fare esperimenti in laboratorio.

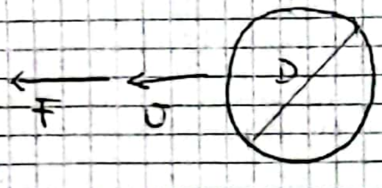
Esempio 2)

Consideriamo il caso precedente. Unica differenza sta nella velocità. In questo caso non è piccola quindi il moto non è laminare

SFERA LONTANA DAL PELO LIBERO
(REGIME DI MOTO
NON LAMINARE)

$\rho$

$\mu$



Lo scopo è valutare la forza che serve per muovere la sfera.

In questo caso la dipendenza da $\rho$ non è trascurabile

$$F = f(\rho, \upsilon, D, \mu)$$

$\rightarrow$ ci potrebbero essere altre dipende ad esempio la rugosità del corpo oppure il suo affondamento

Scegliamo le tre grandezze fondamentali

$$F = f(\rho, \upsilon, D, \mu)$$

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} \upsilon^{\beta} D^{\gamma}} = G\left(\frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} \upsilon^{\beta_1} D^{\gamma_1}}\right)$$

$\alpha, \beta, \gamma$ sono stati già calcolati $\rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases}$

Perciò:

$$\frac{F}{\rho \upsilon^2 D^2} = G\left(\frac{\mu}{\rho \upsilon D}\right)$$

$\hookrightarrow$ NUMERO DI REYNOLDS INVERTITO $\rightarrow$ perché il numero è molto piccolo si considera l'inverso

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = G\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

↓ NUMERO ADIMENSIONALE

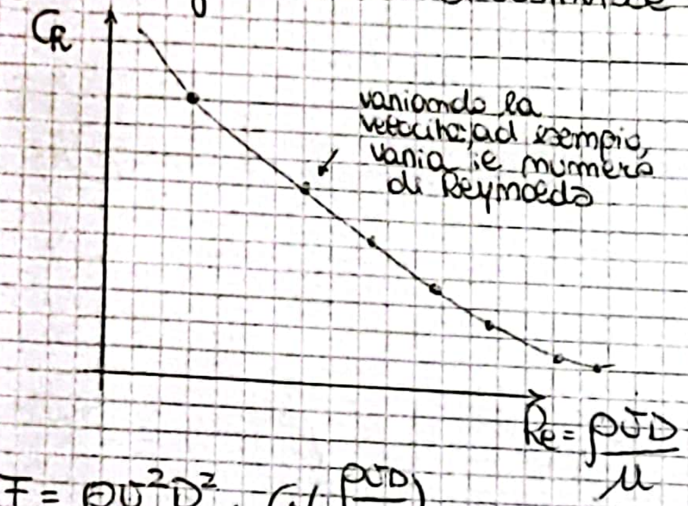
$$C_R = G(Re)$$

↓

coeff. di resistenza

Il problema non è risolto poiché non si conosce la relazione allora bisogna riprodurre il fenomeno fisico

In questo caso non basta una singola prova poiché il legame è funzionale. Si costruisce un grafico




Bisogna far variare il numero di Reynolds e per farlo si può variare qualsiasi grandezza ad esempio D

$$F = \rho v^2 D^2 \cdot G\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

Forma più nota:

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\pi D^2}{4} \cdot C_R$$

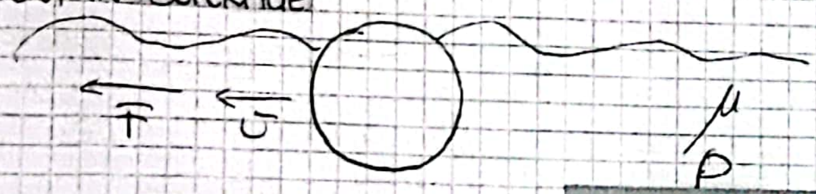
↳ calcolato mediante il diagramma più noto come COEFF. DI DRAG

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 \frac{\pi D^2}{4}$$ FORZA DI DRAG

Esempio 2)

Consideriamo una sfera come nel caso precedente ma vi è una differenza, la sfera si trova sulla superficie e per effetto del suo moto nascono delle onde

SFERA IN SUPERFICIE




Le onde sono moti a potenziale di velocità che dipendono da g (accelerazione di gravità)

Si trascura la viscosità

In questo caso la forza F $F = f(\rho, v, D, g)$

$$F = f(\rho, v, D, g)$$

72

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = G\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

↓ NUMERO ADIMENSIONALE

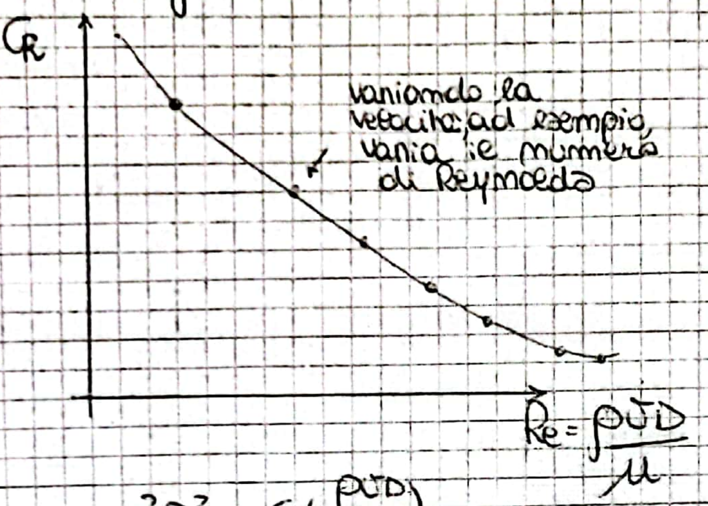
$$C_R = G(Re)$$

↓

coeff. di resistenza

Il problema non è risolto poiché non si conosce la relazione quindi bisogna riprodurre il fenomeno fisico.

In questo caso non basta una singola prova poiché il legame è funzionale, si costruisce un grafico




Bisogna far variare il numero di Reynolds e per farlo si può variare qualsiasi grandezza ad esempio D

$$F = \rho v^2 D^2 \cdot G\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

Forma più nota:

$$F = \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{\pi D^2}{4} \cdot C_R$$

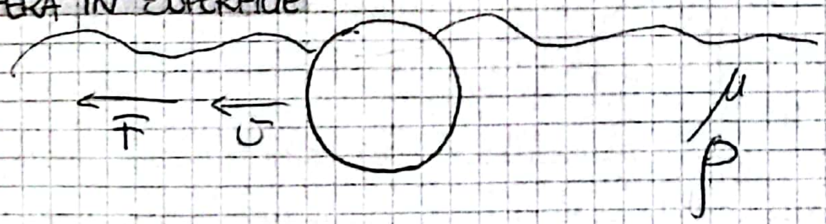
↳ calcolato mediante il diagramma più noto come COEFF. DI DRAG

$$F = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 \frac{\pi D^2}{4}$$ FORZA DI DRAG

Esempio 2)

Consideriamo una sfera come nel caso precedente ma vi è una differenza, la sfera si trova sulla superficie e per effetto del suo moto nascono delle onde

SFERA IN SUPERFICIE




Le onde sono moti a potenziale di velocità che dipendono da g (accelerazione di gravità)

Si trascurano le viscosità

In questo caso la forza F è funzione:

$$F = f(\rho, v, D, g)$$

Applichiamo il teorema $\Pi$

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} v^{\beta} D^{\gamma}} = G\left(\frac{g}{\rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} D^{\gamma_1}}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Calcoliamo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

$$(m \cdot s^{-2}) = (kg \cdot m^{-3})^{\alpha_1} \cdot (m \cdot s^{-1})^{\beta_1} \cdot m^{\gamma_1}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 1 = -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ -2 = -\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = -1 \end{cases}$$

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = G\left(\frac{gD}{v^2}\right)$$

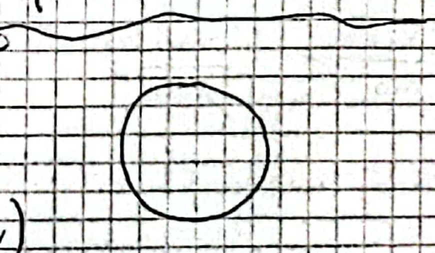
$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = G\left(\frac{v^2}{gD}\right)$$ il numero puro può essere invertito poiché è adimensionale

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = G\left(\frac{v}{\sqrt{gD}}\right)$$

In presenza di onde, il numero adimensionale è il numero di Froude. Per ricavarlo bisogna fare esperimenti in laboratorio

$$\underbrace{\frac{F}{\rho v^2 D^2}}_{\text{coeff. di resistenza}} = G(F_r)$$ Numero di Froude

Analizziamo il caso di un corpo in una posizione intermedia



Il problema si complica poiché l'attrito non si può trascurare

$$F = f(\rho, v, D, \mu, g)$$

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = G\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{gD}}\right) = G(Re, F_r)$$

Reynolds  Froude

Sono importanti per la modellistica idraulica

$$C_R = G(Re, F_r)$$

# TEORIA DELLA SIMILITUDINE

Abbiamo introdotto il teorema $\pi$ che ha molte utilità
ci ha permesso di calcolare il coeff. di resistenza

$$C_R = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = G(Re)$$ Relazione tra numeri puri $C_R$ e $Re$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Caso in cui il corpo viaggia in prossimità del pelo libero

$$C_R = G(Fr)$$ il corpo risente delle turbolenze

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

In altri casi vale la relazione:

$$C_R = G(Re, Fr)$$

Il legame funzionale si ottiene mediante prove in laboratorio.

Se la struttura ha grandi dimensioni:

$$C_{R_0} = G\left(\frac{\rho_0 V_0 D_0}{\mu_0}\right)$$ dove o sta per corpo reale, m sta per modello

Si introduce un fattore scala

$$\lambda = \frac{D_m}{D_0} \qquad \lambda < 1$$ Lavorando in scala 1:10 $\rightarrow \lambda = 0.1$

Il modello avrà il suo coeff. di resistenza

$$C_{R_m} = G\left(\frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m}\right)$$

Tuttavia dovrebbe essere valida la relazione:

$$C_{R_m} = C_{R_0}$$ Le due funzioni G devono essere uguali e ciò vale se il numero di Reynolds deve essere uguale

$$\frac{\rho_0 V_0 D_0}{\mu_0} = \frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m}$$

Immaginando di mantenere lo stesso liquido

$$\rho_0 = \rho_m \qquad \mu_0 = \mu_m$$

$$V_0 D_0 = V_m D_m$$

SIMILITUDINE DI REYNOLDS

$$\boxed{\lambda = \frac{D_m}{D_0} = \frac{V_0}{V_m}}$$

velocità del corpo o del fluido in base a quello che si sta studiando

La velocità del modello risulta essere più grande di quella del prototipo

Se $\lambda = \frac{1}{10}$ $\rightarrow$ $V_0 = \frac{1}{10} V_m \rightarrow V_m = 10\, V_0$

Nel caso in cui il corpo dovesse essere sollecitato dal moto ondoso vale la relazione

$$C_R = G(F_R)$$

$$C_{R_0} = G(F_{R_0})$$
$$C_{R_m} = G(F_{R_m})$$ con $F_R = \frac{V}{\sqrt{gD}}$

Perciò:

$$C_{R_m} = G\left(\frac{V_m}{\sqrt{g D_m}}\right)$$

$$C_{R_0} = G\left(\frac{V_0}{\sqrt{g D_0}}\right)$$

Affinché i due coeff. siano uguali deve essere valida la relazione:

$$\frac{V_0}{\sqrt{g D_0}} = \frac{V_m}{\sqrt{g D_m}}$$

$$\sqrt{\frac{D_m}{D_0}} = \frac{V_m}{V_0}$$

SIMILITUDINE DI FROUDE $\lambda = \frac{V_m}{V_0} = \sqrt{\frac{D_m}{D_0}}$ la velocità del modello risulta essere più piccola del caso reale

Valutiamo l'entità delle forze nel modello e nel prototipo

SIMILITUDINE DI REYNOLDS

$$\frac{F_0}{\rho_0 V_0^2 D_0^2} = G(Re_0)$$

Valgono le relazioni:

$\rho_0 = \rho_m$

$\mu_0 = \mu_m$

$G(Re_0) = G(Re_m)$

$\lambda = \frac{D_m}{D_0} = \frac{V_0}{V_m}$

$$F_0 = \rho_0 V_0^2 D_0^2\, G(Re_0) = \rho_m \frac{\cancel{\lambda^2} V_m^2}{V_0^2} \frac{D_m^2}{\cancel{\lambda^2}} G(Re_0)$$

$$F_m = \rho_m V_m^2 D_m^2\, G(Re_m) \quad \rightarrow F_m = F_0$$

Rispettando la similitudine di Reynolds l'entità delle forze è la stessa per il modello e per il prototipo

## SIMILITUDINE DI FROUDE

$$\lambda = \frac{D_m}{D_o} = \frac{V_m^2}{V_o^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho_m = \rho_o \\ \mu_m = \mu_o\end{array}\right] \rightarrow \text{il fluido è lo stesso}$$

$$C_R = \frac{F_o}{\rho_o V_o^2 D_o^2} = G(Fr_o)$$

$$F_o = \rho_o V_o^2 D_o^2 G(Fr_o) = \rho_m \frac{V_m^2}{\lambda} \frac{D_m^2}{\lambda^2} G(Fr_m)$$

$$\boxed{F_o = \frac{F_m}{\lambda^3}}$$

Nel caso di similitudine di Froude le forze nel modello non sono uguali a quelle del prototipo

Es. se $\lambda = \frac{1}{10}$

$$F_o = \frac{F_m}{\frac{1}{1000}} = 1000 F_m$$

E' possibile ragionare anche in termini di TEMPI

SIMILITUDINE DI REYNOLDS $\quad \lambda = \frac{D_m}{D_o} = \frac{V_o}{V_m} = \frac{D_o}{T_o} \cdot \frac{T_m}{D_m}$

Definiamo la SCALA DI RIDUZIONE DEI TEMPI

$$\varepsilon = \frac{T_m}{T_o}$$

$$\lambda = \frac{D_m}{D_o} = \frac{D_o}{D_m}\varepsilon \rightarrow \boxed{\varepsilon = \left(\frac{D_m}{D_o}\right)^2 = \lambda^2}$$

In similitudine di Reynolds la scala dei tempi è pari al quadrato della scala delle lunghezze

SIMILITUDINE DI FROUDE $\quad \lambda = \frac{D_m}{D_o} = \frac{V_m^2}{V_o^2} = \left(\frac{D_m}{T_m}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_o}{D_o}\right)^2$

$$\varepsilon = \frac{T_m}{T_o}$$

$$\lambda = \frac{D_m^2}{D_o^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \rightarrow \boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{D_m}{D_o}}}$$

In similitudine di Froude la scala dei tempi è pari alla radice della scala delle lunghezze

Al NOEL si lavora in similitudine di Froude.
Le onde che sollecitano le strutture non saranno mai molto grandi infatti l'agitazione ondosa dipende dal fetch ($\simeq 10$ Nm), dalla velocità del vento e dalla durata.

$H_s = 0,3$ m (nel mare di RC)

Questo vuol dire che è possibile utilizzare scale $\frac{1}{10}$ o $\frac{1}{30}$ per simulare eventi oceanici (con $H_s = 3m$ o $H_s = 9m$)

$$\varepsilon = \frac{T_m}{T_0} = \sqrt{\frac{L_m}{L_0}}$$

Le onde che si verificano nel mare di Re rispettano la similitudine di Froude quindi è possibile fare MODELLISTICA IDRAULICA

Il coefficiente di resistenza può essere funzione del numero di Reynolds e del numero di Froude

$$C_R = G(Re, Fn)$$

Questo vorrebbe dire che va rispettata la similitudine di Froude e di Reynolds

$$\begin{cases} \dfrac{D_m}{D_0} = \dfrac{V_0}{V_m} & \text{REYNOLDS} \\ \dfrac{D_m}{D_0} = \left(\dfrac{V_m}{V_0}\right)^2 & \text{FROUDE} \end{cases}$$

Bisogna soddisfare il sistema ma ciò risulta fattibile soltanto nel caso in cui la scala è 1:1 cioè $\lambda = 1$

Vi sono 3 alternative

- Si esamina il fenomeno fisico e si valuta se predominano gli effetti dissipativi legati alla viscosità $\mu$ e alla turbolenza $\rho$ in questo caso si trascura la similitudine di Froude e quindi si considera soltanto la prima equazione
- Si esamina il fenomeno fisico e si valuta che predominano gli effetti legati alla trasformazione energia cinetica - potenziale. In questo caso si trascura la similitudine di Reynolds e quindi si considera soltanto la seconda equazione
- Nel caso in cui nessuna delle ipotesi precedenti è valida, l'unica alternativa è quella di cambiare il fluido vale a dire che $\rho_0 \neq \rho_m$ e $\mu_0 \neq \mu_m$

Vale a dire:

$C_{R0} = C_{Rm}$ (vale in ogni caso)

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_0 D_0 V_0}{\mu_0} = \dfrac{\rho_m D_m V_m}{\mu_m} & \text{SIMILITUDINE DI FROUDE} \\ \dfrac{D_m}{D_0} = \left(\dfrac{V_m}{V_0}\right)^2 \end{cases}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{VISCOSITÀ CINEMATICA}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_0 D_0}{\nu_0} = \dfrac{V_m D_m}{\nu_m} \\ \dfrac{D_m}{D_0} = \left(\dfrac{V_m}{V_0}\right)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_m D_m}{V_0 D_0} = \dfrac{\nu_m}{\nu_0} \\ \dfrac{D_m}{D_0} = \left(\dfrac{V_m}{V_0}\right)^2 \rightarrow \dfrac{V_m}{V_0} = \left(\dfrac{D_m}{D_0}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{D_m}{D_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{D_m}{D_0} = \frac{\nu_m}{\nu_0} \\ \frac{V_m}{V_0} = \left(\frac{D_m}{D_0}\right)^{1/2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{D_m}{D_0}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\nu_m}{\nu_0}$$

$$\boxed{\nu_m = \nu_0 \, \lambda^{3/2}}$$

Questa espressione ci dice quale liquido utilizzare per soddisfare le due equazioni.

viscosità cinematica modello

viscosità cinematica prototipo

Riprendendo la prima:

$$\frac{V_m D_m}{V_0 D_0} = \frac{\nu_m}{\nu_0}$$

$$\frac{V_m}{V_0} \frac{V_m^2}{V_0^2} = \frac{\nu_m}{\nu_0} \Rightarrow \left(\frac{V_m}{V_0}\right)^3 = \frac{\nu_m}{\nu_0} \Rightarrow \boxed{V_m = V_0 \left(\frac{\nu_m}{\nu_0}\right)^{1/3}}$$