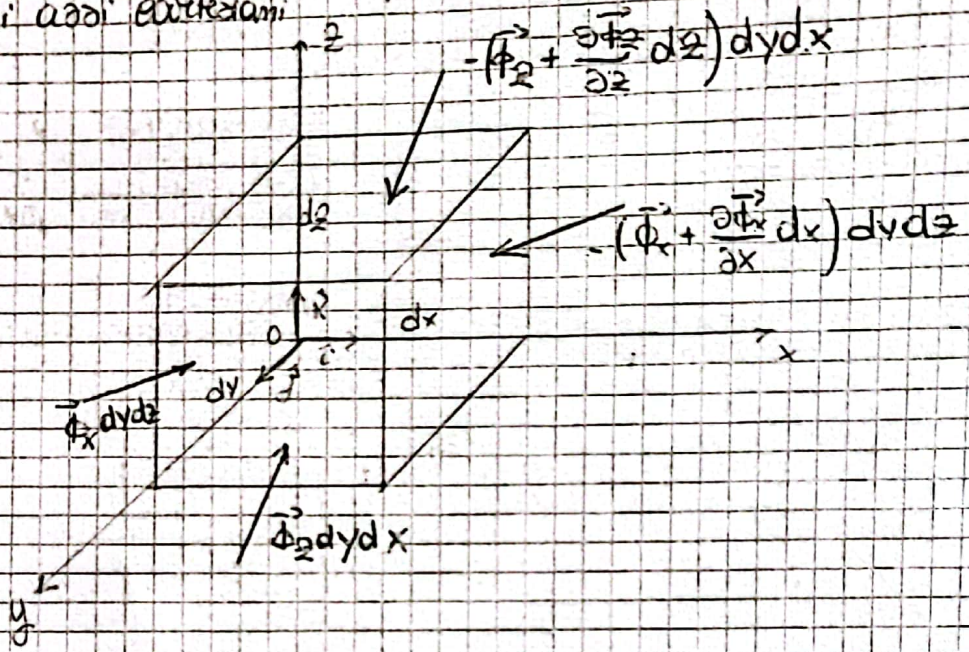


# FLUIDI REALI

Finora è stata fatta l'ipotesi di fluido ideale ovvero di assenza degli sforzi tangenziali.

Nella trattazione analitica gli sforzi tangenziali non si possono trascurare per cui bisogna individuare l'equazione del moto andando ad esprimere gli sforzi normali e tangenziali.

Consideriamo un volumetto di fluido in movimento ed un sistema di assi cartesiani.



La velocità nel punto O è  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$   
 $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

$dm = \rho dx dy dz$  MASSA INFINITESIMA

Deve essere valido la II legge di Newton secondo cui:

$d\vec{F} = \vec{A} dm$

risultante delle forze che agiscono sul volumettino (forze di massa e di superficie)

$\vec{E} = g \text{ unit} (-g\hat{z})$  FORZA DI MASSA PER UNITA' DI MASSA

$\int \rho \vec{V} dx dy dz$  FORZA DI MASSA COMPLESSIVA

Su ogni faccia vengono esercitate delle forze di superficie.

In idrostatica lo sforzo risultava essere ortogonale alla superficie ma in idrodinamica non è così.

Inacciamo gli sforzi sulle superfici per ottenere le forze bisogna moltiplicare lo sforzo per l'area.

$d\vec{F}_s + d\vec{F}_m = \vec{A} dm$

Esprimiamo le forze.

$$\rho \vec{R} dx dy dz + \vec{F}_x dy dz - \left( \vec{F}_x + \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \vec{F}_y dx dz +$$

$$- \left( \vec{F}_y + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \vec{F}_z dx dy - \left( \vec{F}_z + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} dz \right) dx dy =$$

$$= \rho \vec{A} dx dy dz$$

Semplice richiamo i termini uguali e contrari

$$\rho \vec{R} dx dy dz - \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} dx dy dz = \rho \vec{A} dx dy dz$$

$$\rho (\vec{R} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z}$$

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO LOCALE PER UN LIQUIDO REALE IN MOVIMENTO oppure

$\vec{F}_x$  sforzo che agisce sulla faccia con asse x ortogonale

EQUAZIONE INDEFINITA DEL MOVIMENTO (vale per un volume infinitesimo)

Nel caso di fluido reale ogni sforzo ha tre componenti

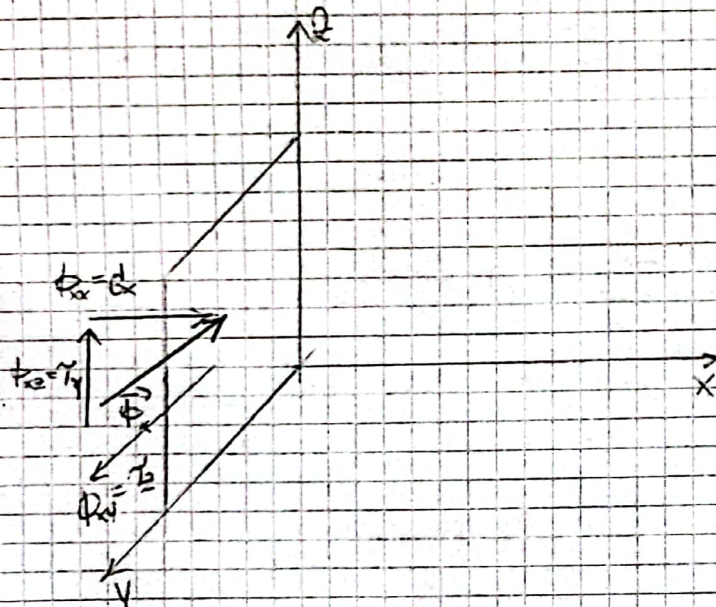
$G_x$  sforzo normale

$\tau_x, \tau_y$  sforzi tangenziali

In idrostatica o per fluido ideale

$$G_x = G_y = G_z = P$$

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z$$



Nel caso di fluido ideale:

$$\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Per cui:

$$\rho (\vec{R} - \vec{A}) = \rho \text{grad } P$$

EQUAZIONE DI EULERO

ci ha permesso di ricavare l'eq di Bernoulli

# EQUILIBRIO GLOBALE DI UN LIQUIDO REALE

Nella lezione precedente abbiamo ricavato dalla II legge della dinamica, l'eq. indefinita del movimento

$$\rho(\vec{r}-\vec{a}) = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z}$$

Integriamo la relazione per far sì che essa sia valida per un volume finito  $W$

$$\int_W \rho \vec{r} dW - \int_W \rho \vec{a} dW = \int_W \left( \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} \right) dW$$

FORZA PESO



(1)

(2)

Analizziamo (1)

Ricordiamo che:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$$-\int_W \rho \vec{a} dW = -\int_W \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dW - \int_W \rho \left( u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) dW$$

INERZIA LOCALE



Se il moto è  
vasto il termine  
è diverso da zero  
Se il moto è permanentemente  
duro non vi sono variazioni  
di velocità  $I=0$

Per il teorema di Green:

Componente di velocità  
lungo l'ortogonale  $\vec{n}$  alla superficie

$$-\int_W \rho \left( u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) dW = \int_A \rho v_n \vec{v} dA$$

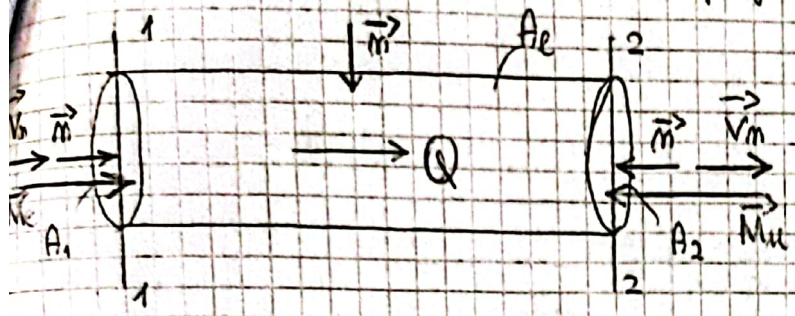
Superficie di contorno  
che determina il  
volume  $W$

FLUSSO QUANTITÀ  
DI MOTO CHE ATTRAVERSA  $A$   
NELL'UNITÀ DI TEMPO

$$\int_A v_n dA = Q \text{ portata che fluisce su } A$$

Moltiplicando una portata per  
una densità si ottiene una  
massa che fluisce per unità  
di tempo e moltiplicando la  
velocità si ottiene una portata

consideriamo una condotta in cui fluisce una portata  $\vec{Q}$  delimitata da due superfici.  
 La superficie  $A$  si compone di 3 superfici (1-1, 2-2, sup. laterale)



$$\int_A \rho v_m \vec{v} dA = \int_{A_1} \rho v_m \vec{v} dA - \int_{A_2} \rho v_m \vec{v} dA + \int_{A_e} \rho v_m \vec{v} dA$$

La velocità ha il verso opposto alla normale alla superficie  
 $v_m$  è molto piccolo non c'è flusso laterale

Per cui:

$$\vec{M} = \int_A \rho v_m \vec{v} dA = \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

flusso della quantità di moto in ingresso (è una forza) → flusso della quantità di moto in uscita (opposto alla direzione del moto)

Analizziamo ②

Per il teorema di Green

$$\int_W \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) dV = - \int_A (\Phi_x \cos \vec{m}_x + \Phi_y \cos \vec{m}_y + \Phi_z \cos \vec{m}_z) dA =$$

$$= - \int_A \vec{\Phi}_m dA = \vec{\Pi}$$

RESULTANTE DELLE FORZE CHE VENGONO ESERCITATE SUL VOLUME DI CONTROLLO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE A

Si ottiene così una relazione di equilibrio

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{\Pi} = \vec{0}$$

Per un volume di controllo in movimento vale la relazione

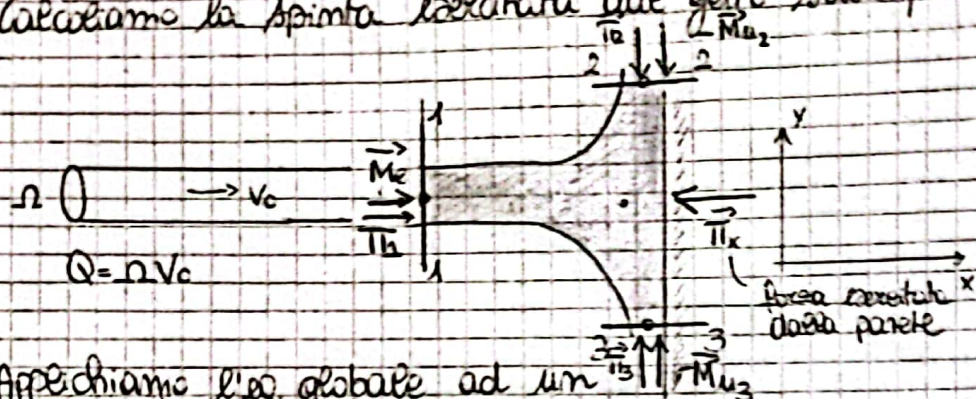
EQUILIBRIO GLOBALE DI UN FLUIDO IN MOVIMENTO

\* la relazione si può utilizzare quando la dissipazione di attrito avviene lungo la massa fluida

\* Si trascura l'attrito tra fluido e superficie laterale

# APPLICAZIONE

Immaginiamo di avere un getto orizzontale cilindrico di superficie  $\Omega$  con velocità  $v_0$  che investe una parete verticale. Calcoliamo la spinta esercitata dal getto sulla parete verticale.



Approchiamo l'eq. globale ad un volume di controllo

Si sceglie inizialmente il volume di controllo delimitato da 3 superfici

$$\vec{Q} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_{u1} + \vec{\Pi} = \vec{0}$$

- La forza peso è applicata nel punto e ed è diretta verso il basso
- $\vec{I} = 0$  moto permanente, cioè non c'è variazione delle velocità nel tempo
- $\vec{M} = \int_{\Omega} \rho \vec{u}_m \vec{v} d\Omega = \rho V \int_{\Omega} v_m dz = \rho V Q = \rho V^2 \Omega$  poiché  $Q = V \cdot \Omega$

$$\vec{M}_e = \rho V v_0^2 \Omega$$

$$-\vec{M}_{u2} = \rho Q_2 v_2 = \rho V_2^2 \Omega_2$$

$$-\vec{M}_{u3} = \rho Q_3 v_3 = \rho V_3^2 \Omega_3$$

Complessivamente si ottiene:

$$\vec{Q} + \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \vec{\Pi}_x + \vec{M}_e - \vec{M}_{u2} - \vec{M}_{u3} = \vec{0}$$

La forza peso non ha componenti lungo x. Forze muove perché il getto è in aria.

La spinta esercitata dal liquido sulla parete sarà:

$$\vec{S} = -\vec{\Pi}_x = \vec{M}_e - \vec{M}_{u2} - \vec{M}_{u3} \quad \text{con } \vec{M}_e = \rho V v_0^2 \Omega$$

Non conosciamo  $v_2, v_3, \Omega_2, \Omega_3$

$$-\vec{M}_{u2} = \rho V_2^2 \Omega_2$$

$$-\vec{M}_{u3} = \rho V_3^2 \Omega_3$$

Approchiamo Bernoulli ai baricentri delle sezioni (si trovano alla stessa quota) per calcolare le velocità

$$\frac{z_1}{\gamma} + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{z_2}{\gamma} + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_0 = v_2 = v_3$$

$$-Mu_2 = \rho V_2^2 \Omega_2 = \rho V_0^2 \Omega_2$$

$$-Mu_3 = \rho V_3^2 \Omega_3 = \rho V_0^2 \Omega_3$$

Applichiamo l'equazione di continuità per calcolare le aree

$$Q = Q_2 + Q_3$$

$$S_1 = (-\vec{M}u_3) - (-\vec{M}u_2) = 0 \quad \rightarrow \text{caso di fluido ideale in assenza di attrito}$$

Risultante delle forze lungo y

$$-\vec{M}u_3 = -\vec{M}u_2 \rightarrow \rho V_0^2 \Omega_2 = \rho V_0^2 \Omega_3 \rightarrow \Omega_2 = \Omega_3$$

$$Q = Q_2 + Q_3 = V_0 \Omega_2 + V_0 \Omega_3$$

$$V_0 \Omega = V_0 \Omega_2 + V_0 \Omega_3 \rightarrow \Omega = \Omega_2 + \Omega_3 \rightarrow \Omega = 2\Omega_3$$

$$\Omega_2 = \Omega_3 = \frac{\Omega}{2}$$

$$-\vec{M}u_3 = -\vec{M}u_2 = \rho V_0 \frac{\Omega}{2}$$

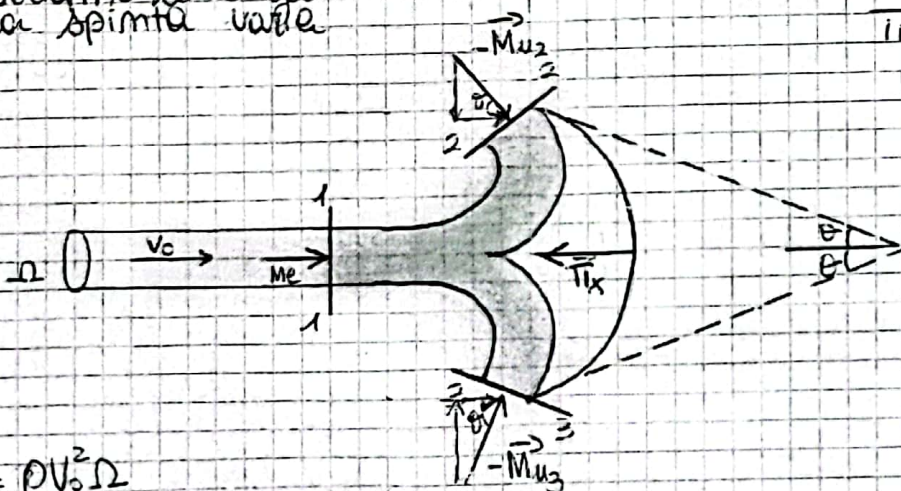
Pertanto

$$\vec{S} = \vec{M}e - \vec{M}u_2 - \vec{M}u_3 \rightarrow \vec{S} = \rho V_0^2 \Omega$$

SPINTA CHE IL GETTO  
IN ARIA ESERCITA SU  
UNA PARETE

## APPLICAZIONE 2

Consideriamo una geometria diversa. Lo scopo è quello di valutare se la spinta vale.



tipica sezione della  
pala di una  
turbina Pelton

il getto colpisce  
la pala a doppio  
archiata e il  
flusso viene  
deviato

$$\vec{M}e = \rho V_0^2 \Omega$$

- la forza  $\vec{S}$  non ha componenti

- Le forze  $T_1, T_2, T_3$  sono nulle perché il getto è in aria

$$\vec{S} = -T_x = \vec{M}e - \vec{M}u_2 - \vec{M}u_3$$

Proiettiamo le forze lungo l'asse x

$$S_x = -T_x = M_{ex} - M_{ux_2} - M_{ux_3}$$

$\vec{M}_{ux_2}$  e  $\vec{M}_{ux_3}$  hanno due componenti (orizzontali e verticali).  
Le componenti verticali si elidono poiché sono uguali e contrarie.  
Quelle orizzontali si sommano.

$$S_x = \rho V_0^2 \Omega + \rho V_0^2 \frac{\Omega}{2} \cos \theta + \rho V_0^2 \frac{\Omega}{2} \cos \theta$$

$$S_x = \rho V_0^2 \Omega + 2 \rho V_0^2 \frac{\Omega}{2} \cos \theta = \rho V_0^2 \Omega (1 + \cos \theta) \rightarrow S = \rho V_0^2 \Omega (1 + \cos \theta)$$

Questo è il motivo per cui le pale hanno la forma a doppio archiaio e flessa in uscita ha più o meno direzione uguale a quello in entrata. La spinta è aumentata rispetto al caso precedente.

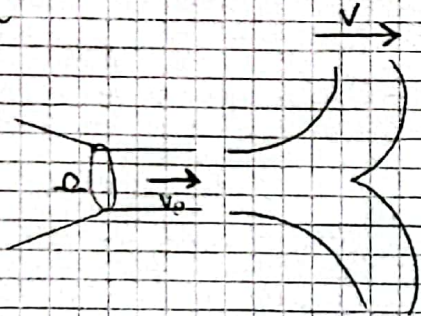
Se la pala è ferma, il lavoro è nullo. La potenza del getto è:

$$P_0 = \gamma Q H = \gamma Q \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} \right) = \gamma Q \frac{V_0^2}{2g} = \gamma \Omega V_0 \frac{V_0^2}{2g} = \rho \frac{V_0^3}{2} \Omega$$

↓  
POTENZA DISPONIBILE

Supponiamo che la pala si possa muovere con velocità pari a  $v$  compiendo un arco.

Ovviamente  $v < V_0$  altrimenti il flusso non raggiungerebbe mai la pala.



In questo caso la spinta diminuisce poiché la velocità relativa è  $V_0 - v$ .

$$S = \rho (V_0 - v)^2 \Omega (1 + \cos \theta)$$

Perché la pala si muove, il getto deve inseguire la pala con un getto aggiuntivo all'entrata:

$$Q_v = v \Omega$$

È possibile recuperare la portata montando le pale su una ruota poiché il getto colpisce la pala successiva e non serve allungare il getto.

In questo caso la spinta aumenta.

$$S = \rho (V_0 - v)(V_0 - v) \Omega (1 + \cos \theta)$$

$$S = \rho \Omega (V_0 - v) V_0 (1 + \cos \theta)$$

SPINTA ESERCITATA SULLE PALE MONTATE SU UNA RUOTA

Introduciamo la POTENZA UTILE ovvero la potenza ceduta dal getto alla ruota

Per definizione la potenza è il lavoro fatto nel tempo

$$P_u = S \cdot V$$

Spinta  $\wedge$  velocità di rotazione della ruota

$$P_u = \rho \Omega V_0 (V_0 V - V^2) (1 + \cos \theta)$$

Qual'è la velocità di rotazione della ruota affinché la potenza utile sia massima?

$$\frac{\partial P_u}{\partial V} = 0 \quad P_u = \rho \Omega V_0 (V_0 V - V^2) (1 + \cos \theta)$$

$$\frac{\partial P_u}{\partial V} = \rho \Omega V_0 (V_0 - 2V) (1 + \cos \theta) = 0 \quad \rightarrow \quad V = \frac{V_0}{2}$$

$$P_{u \max} = \rho \Omega V_0 \left( V_0 \cdot \frac{V_0}{2} - \frac{V_0^2}{4} \right) (1 + \cos \theta)$$

$$P_{u \max} = \rho \Omega \frac{V_0^3}{4} (1 + \cos \theta) \quad \text{POTENZA UTILE MASSIMA}$$

$$P_D = \rho \Omega \frac{V_0^3}{2} \quad \text{POTENZA DISPONIBILE}$$

RENDIMENTO TURBINA PELTON

$$\eta = \frac{P_{u \max}}{P_D} = \frac{\rho \Omega \frac{V_0^3}{4} (1 + \cos \theta)}{\rho \Omega \frac{V_0^3}{2}}$$

$$\eta = \frac{1 + \cos \theta}{2} \approx 0,95 - 0,97 \quad \text{Rendimento molto alto}$$

Per  $\theta = 0 \rightarrow \eta = 1$

Cio' non può accadere poiché il flusso in uscita deve essere inclinato per non interferire le pale successive



# EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

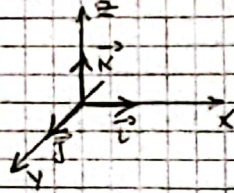
Per ricavare l'eq. di Navier-Stokes si parte dall'equazione di equilibrio globale per un fluido in movimento reale

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

poiché il fluido è reale,  $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$  non sono ortogonali alla superficie

Consideriamo un sistema di riferimento e proiettiamo l'equazione sui 3 assi di vertice  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Scomponiamo i vettori



$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}_x = \Phi_{xx}\vec{i} + \Phi_{xy}\vec{j} + \Phi_{xz}\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}_y = \Phi_{yx}\vec{i} + \Phi_{yy}\vec{j} + \Phi_{yz}\vec{k}$$

$$\vec{\Phi}_z = \Phi_{zx}\vec{i} + \Phi_{zy}\vec{j} + \Phi_{zz}\vec{k}$$

Proiettiamo l'eq. lungo x, y, z

$$\rho(X - A_x) = \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho(Y - A_y) = \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho(Z - A_z) = \frac{\partial \Phi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial z}$$

Valgono le relazioni di simmetria

$$\Phi_{xy} = \Phi_{yx} \quad \Phi_{zx} = \Phi_{xz} \quad \Phi_{yz} = \Phi_{zy}$$

→ Basta conoscere 6 componenti

Gli sforzi ortogonali alla superficie sono

$$\Phi_{xx} \quad \Phi_{yy} \quad \Phi_{zz}$$

Nel caso idrostatico  $\rightarrow \Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{zz} = P$  (pressione non dipende dalla direzione ma solo dal punto)

Nel caso di fluidodinamica  $\rightarrow \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \text{invariante}$

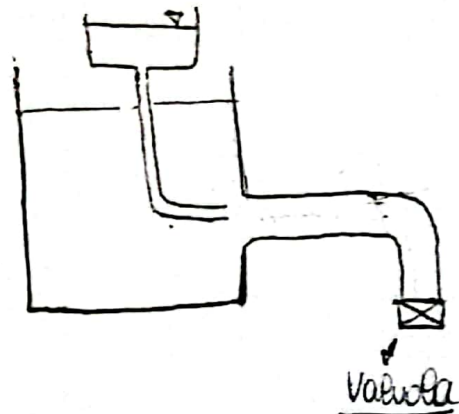
$$P = \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}}{3}$$

Stabiliamo una relazione tra sforzi normali e tangenziali mediante le proprietà fisiche del fluido:

$\mu$  VISCOSITÀ DINAMICA

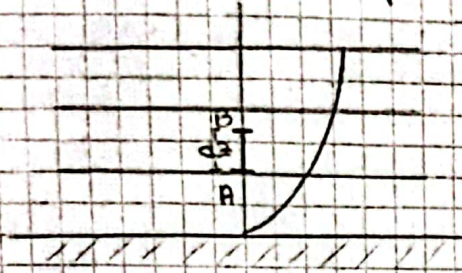
$\vec{v}$   $\mu, \nu, \omega$  COMPONENTI VETTORE VELOCITÀ

L'esperimento di Reynolds dimostra molte osservazioni visive dei moti turbolenti



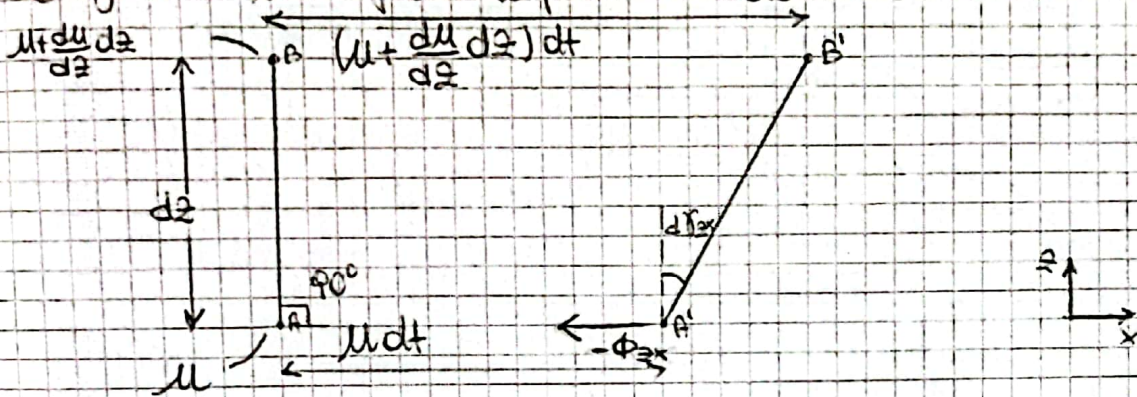
Considerando l'angolo...

Consideriamo un canale con moto uniforme. Livello parallelo al fondo. Traiettorie parallele e rettilinee. E' un regime di moto laminare (scorrimento di piani) il vettore velocità è indipendente dallo spazio e dal tempo. La velocità ha solo la componente  $u$  diversa da 0.



$$u = u(z)$$

Scegliamo una fila di particelle delimitate da A e B



Dopo un certo intervallo di tempo i due punti si spostano e lo spostamento di B è maggiore poiché possiede una maggiore velocità.

L'angolo che BA forma con l'orizzontale è  $90^\circ$  inizialmente ma poi diminuisce di una quantità infinitesimale:

$$d\gamma_{zx} \approx \tan \gamma_{zx}$$

$$-d\gamma_{zx} = \frac{BB' - AA'}{AB} = \frac{(u + \frac{du}{dz} dz) dt - u dt}{dz} = \frac{du}{dz} dt$$

diminuzione

$$-\frac{d\gamma_{zx}}{dt} = \frac{du}{dz}$$

VELOCITA' DI DEFORMAZIONE ANGOLARE

VARIAZIONE DELLA VELOCITA' LUNGO Z

Nel momento in cui si ha una variazione della velocità lungo la normale al moto nascono sforzi tangenziali.

$$\tau = \mu \frac{d\sigma}{d\mu}$$

↓  
VISCOSITA' DINAMICA

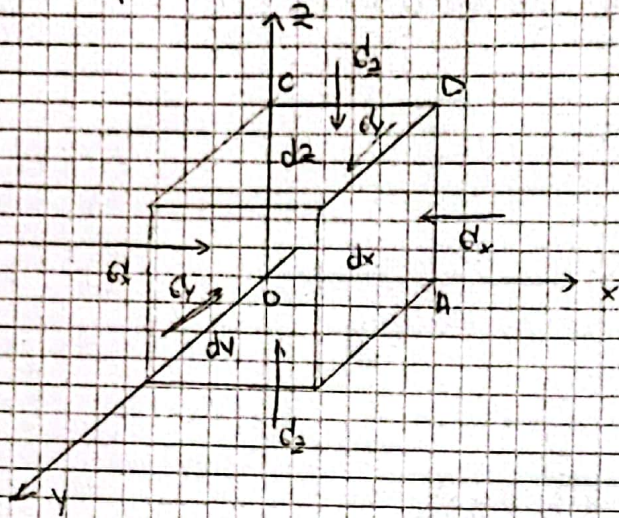
In questo caso nasce lo sforzo  $\phi_{zx}$  (si mette il segno - poiché è opposto alla direzione del moto)

$$\phi_{zx} = \mu \frac{du}{dz}$$

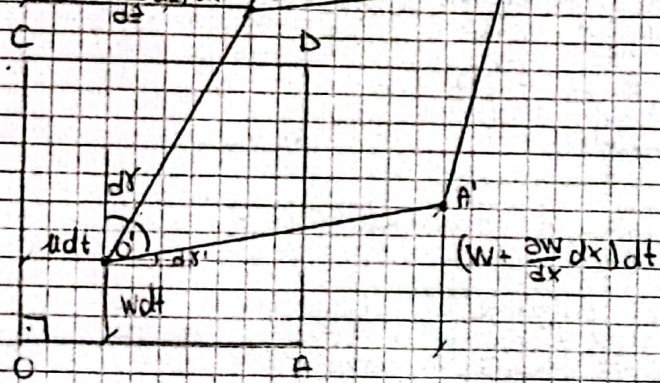
$$\phi_{2x} = -\mu \frac{du}{dz} = \mu \frac{d\gamma_{2x}}{dt}$$

Relazione tra sforzo tang. e velocità di deformazione angolare

In generale il vettore velocità ha 3 componenti  $u, v, w$ .  
Costruiamo un cubo infinitesimo e vediamo cosa succede alla generica faccia del cubo.



Vediamo cosa succede alla faccia in esame



Componenti di velocità all'istante iniziale

- O  $u, v, w$
- A  $u + \frac{du}{dx} dx, v + \frac{dv}{dx} dx, w + \frac{dw}{dx} dx$
- C  $u + \frac{du}{dz} dz, v + \frac{dv}{dz} dz, w + \frac{dw}{dz} dz$
- D  $u + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dz} dz, v + \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dz} dz, w + \frac{dw}{dz} dz + \frac{dw}{dx} dx$

La faccia spostandosi si deforma

$$\angle O'A = 90^\circ$$

$$\angle C'O'A < 90^\circ$$

$$d\gamma_{2x} = d\gamma + d\gamma'$$

$$-d\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial z} dt$$

Si ottiene come rapporto tra  
caletti

$$-\frac{d\gamma_{zx}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{d\gamma_{zx}}{dt} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Analogamente si può ragionare per le altre facce:

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d\gamma_{yz}}{dt} = -\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Per il caso di esistenza della relazione tra sforzo e velocità di deformazione angolare

$$\phi_{zx} = \mu \frac{d\gamma_{zx}}{dt}$$

$$\phi_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = +\mu \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$$

$$\phi_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \mu \frac{d\gamma_{xz}}{dt}$$

$$\phi_{yz} = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \mu \frac{d\gamma_{yz}}{dt}$$

Per gli sforzi normali  $\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}$  bisogna trovare delle relazioni simili:

Mentre gli sforzi tangenziali tendono a deformare la faccia, gli sforzi normali tendono a comprimere il volume se sono positivi altrimenti tendono ad allungare il volume.

In assenza delle costruzioni valgono le relazioni:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left( \phi_{xx} - \frac{\phi_{yy} + \phi_{zz}}{m} \right)$$

$\uparrow$  allungamento unitario lungo l'asse delle x  
 $\downarrow$  modulo di Young  
 $\downarrow$  coeff. di contrazione

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left( \phi_{xx} + \frac{\phi_{xx}}{m} - \frac{\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}}{m} \right)$$

Per i fluidi  $m=2$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left( \phi_{xx} + \frac{\phi_{xx}}{2} - \frac{3p}{2} \right) \rightarrow \epsilon_x = \frac{3}{2} \frac{1}{E} (\phi_{xx} - p)$$

Anche in questo caso esiste una relazione tra sforzi normali e velocità di dilatazione



Il punto A si sposta di una quantità maggiore poiché la sua velocità è maggiore

$$d\epsilon_x = \frac{1}{dx} \left( \mu + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt - \mu dt = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} dt \quad \text{DEFORMAZIONE UNITARIA}$$

$$\frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{3}{2E} (\phi_{xx} - P) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

Se il lato si allunga  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$   
e quindi  $(\phi_{xx} - P) < 0$

$$\lambda = \frac{2(m+1)\mu}{m}$$

$$E = \frac{2(m+1)}{m} G \quad \leftarrow \text{modulo di elasticità tangenziale}$$

Per fluidi incomprimibili:  $m=2 \rightarrow \lambda=3\mu$

$$\frac{3}{2} (\phi_{xx} - P) = -3\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

Relazioni ottenute applicando la teoria di elasticità

$$\phi_{xx} = P - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\phi_{yy} = P - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\phi_{zz} = P - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\phi_{xy} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\phi_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\phi_{yz} = -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

prechiamo le predette notazioni alle relazioni scalari ottenute dalla proiezione delle eq. generali del moto

$$\rho(x-A_x) = \frac{\partial \phi_{vx}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{vy}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{vz}}{\partial z}$$

$$\rho(x-A_x) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) - \mu \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) - \mu \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})$$

$$\rho(x-A_x) = \frac{\partial \rho}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\rho(x-A_x) = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) - \mu \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})$$

$$\rho(x-A_x) = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \underbrace{\mu \Delta_2 U}_{\text{Laplaciano}} - \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{V})}_{\text{Divergenza}}$$

L'equazione può essere semplificata poiché vale la relazione:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{V} = 0$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Nei casi di fluido incomprimibile, la densità non varia nel tempo

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

Pertanto:

$$\rho(x-A_x) = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \mu \Delta_2 U$$

EQUAZIONE DI NAVIER IN FORMA SCALARE

$$\rho(y-A_y) = \frac{\partial \rho}{\partial y} - \mu \Delta_2 v$$

LAPLACIANO

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$$\rho(x-A_x) \vec{i} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} - \mu \Delta_2 U \vec{i}$$

$$\rho(y-A_y) \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} - \mu \Delta_2 v \vec{j}$$

$$\rho(z-A_z) \vec{k} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k} - \mu \Delta_2 w \vec{k}$$

$$\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \text{grad } P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES IN FORMA VETTORIALE

↳ costante per unità di volume delle forze originali dovute viscosità in ogni punto della massa fluida

È un'equazione indefinita poiché vale per un volume infinitesimo

Integriamo l'equazione affinché sia valida per un volume  $\mathcal{V}$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{R} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{A} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \text{grad } P d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mu \Delta_2 \vec{V} d\mathcal{V}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{R} d\mathcal{V} = \vec{G}$$

$$-\rho \int_{\mathcal{V}} \vec{A} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \underbrace{\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}}_{\text{INERZIE LOCALI}} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{A}} \rho \vec{v}_n \vec{V} dA = \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

$$\int_{\mathcal{V}} \text{grad } P d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{A}} P \cdot \vec{m} dA$$

RISULTANTE FORZE DI SUPERFICIE

$$-\mu \int_{\mathcal{V}} \Delta_2 \vec{V} d\mathcal{V} = -\mu \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right) d\mathcal{V} =$$

$$= \mu \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cos \hat{m}_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cos \hat{m}_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cos \hat{m}_z \right) dA =$$

$$\text{grad } \vec{V} \cdot \vec{m} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial m}$$

$$= \mu \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial m} dA$$

$$\vec{G} + \int_{\mathcal{A}} P \cdot \vec{m} dA + \int_{\mathcal{A}} \vec{v}_n \vec{V} dA - \rho \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} d\mathcal{V} - \mu \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial m} dA = 0$$

$$\vec{G} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{I} - \mu \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial m} dA = 0$$

EQUAZIONE GLOBALE  
DELL'EQUILIBRIO  
DINAMICO PER UN  
FLUIDO REALE IN  
MOVIMENTO  
(viscoso e incompressibile)

è una forza che si oppone  
al movimento del fluido  
tiene conto degli sforzi che nascono  
sulla superficie  $\mathcal{A}$  che delimita il volume

# APPLICAZIONI DI NAVIER-STOKES - Moto laminare -

$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad } P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

Consideriamo un moto laminare in cui la velocità è invariabile nello spazio e nel tempo (MOTO UNIFORME)

$$\vec{A} = \vec{0} \text{ accelerazione nulla}$$

$$\rho \vec{R} = \text{grad } P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

$$\text{con } \vec{R} = -g \text{ grad } z$$

$$-\rho g \text{ grad } z = \text{grad } P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

Nelle ipotesi in cui  $\rho = \text{cost.}$

$$\text{grad}(gz + P) = \mu \Delta_2 \vec{V}$$

$$\text{grad}\left(z + \frac{P}{\rho g}\right) = \frac{\mu}{\rho g} \Delta_2 \vec{V}$$

Se il moto è uniforme l'unica componente di  $\vec{V}$  è lungo  $x$

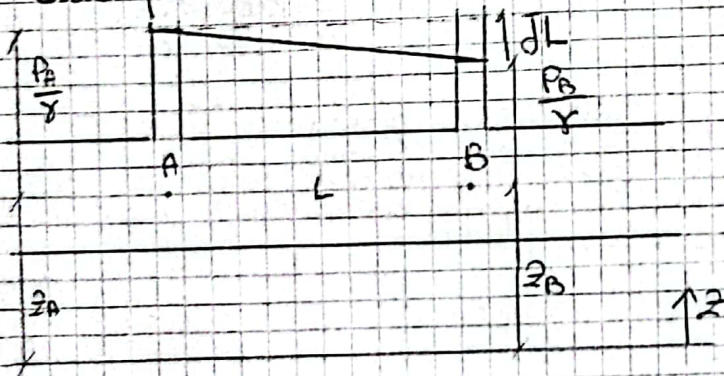
Proiettiamo l'eq lungo  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{P}{\rho g}\right) = \frac{\mu}{\rho g} \Delta_2 u$$

$$h = z + \frac{P}{\rho g} \text{ CARICO PIEZOMETRICO} \rightarrow \text{costante nei fluidi ideali}$$

In questo caso il fluido è reale

Immaginiamo di avere una condotta che buchiamo per inserire due piezometri.



Vi è una variazione lungo  $x$  del carico piezometrico

La pressione in B è più piccola di A

È possibile introdurre la CADENTE PIEZOMETRICA

VARIATIONE DEL CARICO PIEZOMETRICO

$$J = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

C'è una variazione negativa

$$J = -\frac{h_B - h_A}{L}$$



$$J = -\frac{\mu}{\gamma} \Delta_2 u$$

$$\Delta_2 u = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

EQUAZIONE CHE CI PERMETTERA' DI  
RICAVARE LA DISTRIBUZIONE  
DELLA VELOCITA' PER UN MOTO  
LAMINARE UNIFORME

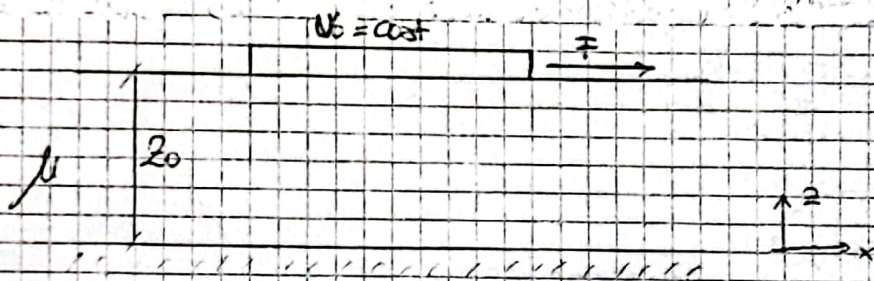
Lo scopo della trattazione dei fluidi reali e' quello di quantificare  
la costante piezometrica  $J$

Sfruttiamo la legge sopra per ricavare la distribuzione  
della velocita'

### MOTO RANG

1. Canale con un liquido in quiete messo in movimento da  
una lamina che viene trascinata attraverso una forza esterna  $F$

Andre gli strati inferiori di liquido iniziano a muoversi. Lo scopo e'  
valutare la velocita' delle particelle



Applichiamo la legge:

$$\Delta_2 u = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

Ipotesi di moto uniforme: la velocita' non varia nello spazio e  
nel tempo quindi ① e ② nulli.  
Il termine ③ e' nullo poiche'  $J$  e' la variazione del carico  
piezometrico lungo  $x$  ma in questo caso non ci sono perdite  
di energia e il moto delle particelle avviene a spinta della  
lamina.

Si puo' sostituire la derivata parziale con quella totale

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$

Integriamo l'espressione:

$$\frac{du}{dz} = A$$

$$u = Az + B$$

V. Sono due costanti di integrazione da determinare. Impostiamo  
le condizioni al contorno  
le particelle su fondo sono ferme ed in superficie  $u = U_0$

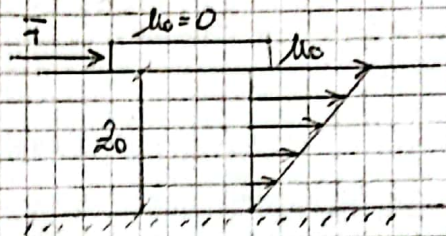
$$\begin{cases} u=0 & z=0 \\ u=U_0 & z=z_0 \end{cases}$$

$$0 = A \cdot 0 + B \rightarrow B = 0$$

$$U_0 = A z_0 \rightarrow A = \frac{U_0}{z_0}$$

$$u = \frac{U_0}{z_0} z$$

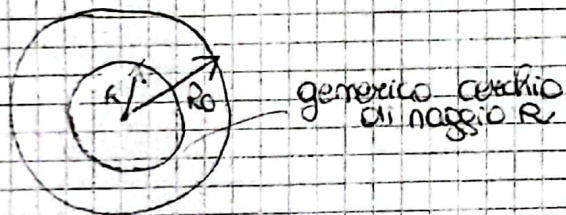
LA VELOCITÀ VARIA  
LINEARMENTE  
CON  $z$



Il moto è moto come MOTO PIANO poiché è come se i piani scorressero uno sull'altro

### MOTO IN UNA CONDOTTA CIRCOLARE

2. Condotta di raggio  $r=R_0$ . Anche in questo caso il moto è sempre ma non è piano poiché i cilindri scorrono l'uno sull'altro



$$\Delta_2 u = -\frac{\gamma \beta}{\mu}$$

Introduciamo le coordinate cilindriche

$$\Delta_2 u = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{du}{dR} \right)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{du}{dR} \right) = -\frac{\gamma \beta}{\mu}$$

Moltiplichiamo tutto per  $R$

$$\frac{d}{dR} \left( R \frac{du}{dR} \right) = -\frac{\gamma \beta R}{\mu}$$

Integriamo i due membri

$$R \frac{du}{dR} = -\frac{\gamma \beta R^2}{\mu} + A$$

$$\frac{du}{dR} = -\frac{\gamma \beta R}{\mu} + \frac{A}{R}$$

$$u = -\frac{\gamma \beta R^2}{\mu} + A \ln R + B$$

Anche in questo caso vi sono due costanti di integrazione  
introduciamo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} R=R_0 & U=0 \\ R \rightarrow 0 & \rightarrow \lim R \rightarrow -\infty \rightarrow \text{unica cosa possibile} \end{cases} \quad A=0$$

(asse condotta) (non ha senso)

$$U = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{R^2}{4} + B$$

Imponiamo la prima condizione

$$0 = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{R_0^2}{4} + B \rightarrow B = \frac{1}{4} \frac{\gamma J}{\mu} R_0^2$$

$$U = \frac{1}{4} \frac{\gamma J}{\mu} (R_0^2 - R^2)$$

LA LEGGE DI VARIAZIONE DELLA VELOCITA' E' DI TIPO PARABOLICO

Prendiamo una sezione trasversale della condotta:



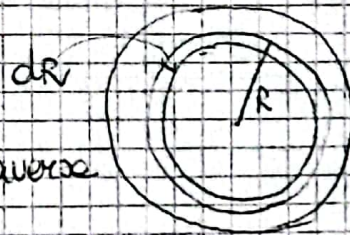
$$R=0 \rightarrow U_{\max} = \frac{1}{4} \frac{\gamma J}{\mu} R_0^2$$

Per le applicazioni si fa riferimento ad una velocità media

$$V_m = \frac{Q}{\pi R_0^2} \rightarrow \text{portata}$$

$\rightarrow \text{area}$

$dQ = U dA$  portata infinitesima che attraversa  
 $dA = 2\pi R dR$  l'anello infinitesimo



$$Q = \int_0^{R_0} U dA = \int_0^{R_0} \frac{1}{4} \frac{\gamma J}{\mu} (R_0^2 - R^2) 2\pi R dR$$

PORTATA CHE ATTRAVERSA IL CONDOTTO DI RAGGIO  $R_0$

$$V_m = \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^{R_0} \frac{1}{4} \frac{\gamma J}{\mu} (R_0^2 - R^2) 2\pi R dR =$$

$$= \frac{1}{4R_0^2} \frac{\gamma J}{\mu} R_0^2 \frac{2R_0^2}{2} - \frac{1}{4R_0^2} \frac{\gamma J}{\mu} \frac{R_0^4}{4} \frac{2}{2} = \frac{1}{4} \frac{\gamma J}{\mu} R_0^2 - \frac{1}{8} \frac{\gamma J}{\mu} R_0^2$$

$$V_m = \frac{1}{8} \frac{\gamma J}{\mu} R_0^2$$

VELOCITA' MEDIA DI UN MOTTO LAMINARE IN UNA CONDOTTA CIRCOLARE

$U_m$  è la metà di  $U_{max}$

Nota la velocità media è possibile calcolare la caduta piezometrica

$$U_m = \frac{1}{32} \frac{\gamma J}{\mu} D^2$$

$$J = \frac{32 \mu U_m}{\gamma D^2}$$

Introduciamo l'indice di resistenza  $\lambda$  o  $\lambda'$  o  $\lambda''$ :

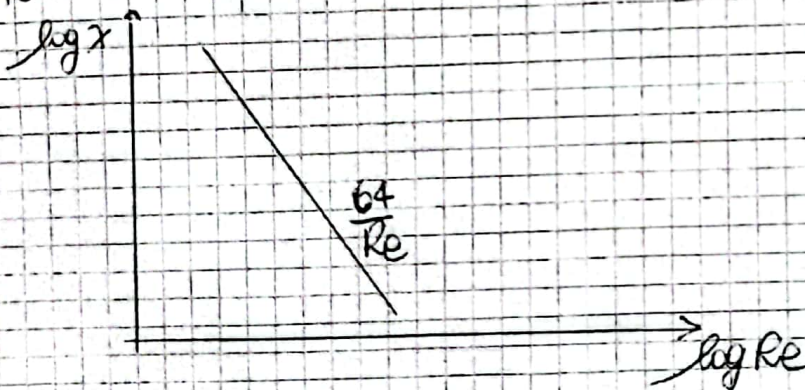
$$\lambda = \frac{D \cdot J}{\frac{U_m^3}{2g}} \rightarrow \text{perdita di energia per una condotta lunga } D$$

$\rightarrow$  carico simetrico

$$\lambda = \frac{D}{\frac{U_m^3}{2g}} \frac{32 \mu U_m}{\gamma D^2} = \frac{64 \mu}{\rho U_m D} \rightarrow \lambda = \frac{64}{Re}$$

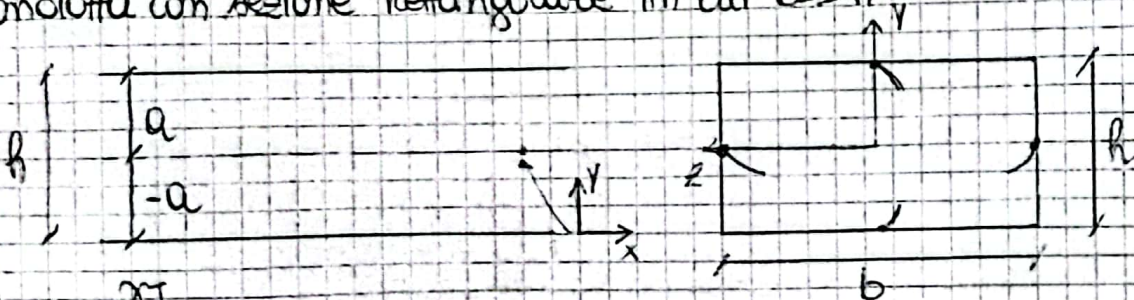
IN UN CONDOTTO CIRCOLARE L'INDICE DI RESISTENZA DIPENDE DAL NUMERO DI REYNOLDS

ABACO DI MOODY



MOTO IN SEZIONE RETTANGOLARE MOLTO LARGA

3. Condotta con sezione rettangolare in cui  $b \gg h$



$$\Delta_z u = - \frac{\gamma J}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\gamma J}{\mu}$$

Non si hanno variazioni di velocità nella direzione del moto  
Se  $b \gg h$  si trascura l'effetto di bordo

le primo termine è nullo poiché sul bordo della condotta la velocità è nulla.

Anche sulle pareti verticali le velocità sono nulle.

Se  $b \gg h$  si può approssimare costante la velocità lungo  $z$  e quindi si trascurano gli effetti di bordo.

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma_f}{\mu}$$

Integrando:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\gamma_f}{\mu} y + A$$

$$u = -\frac{\gamma_f}{\mu} \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

Condizioni al contorno:

$$\left. \begin{array}{l} y=a \\ y=-a \end{array} \right\} u=0$$

$$\left. \begin{array}{l} y=a \\ y=-a \end{array} \right\} u=0$$

Per  $y$  la funzione deve essere pari ovvero  $u(y) = u(-y)$  ciò accade se e solo se  $A=0$ .

$$u = -\frac{\gamma_f}{\mu} \frac{y^2}{2} + B$$

$$0 = -\frac{\gamma_f}{\mu} \frac{a^2}{2} + B \rightarrow B = \frac{\gamma_f a^2}{\mu 2}$$

$$u = \frac{\gamma_f}{2\mu} (a^2 - y^2)$$

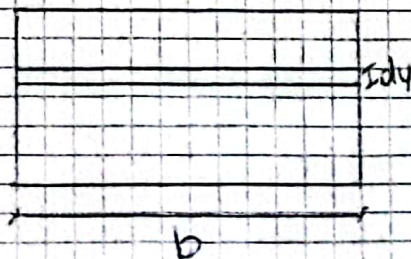
LA DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ È DI TIPO PARABOLICO

$$\text{Per } y=0 \quad u_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\gamma_f}{\mu} a^2$$

Bisogna determinare la velocità media

$$u_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2a \cdot b}$$

La portata  $Q$  è somma di portate infinitesime



$$dQ = u \, dA = u \, b \, dy$$

$$Q = \int_a^a U dA = \int_a^a \frac{1}{2} \frac{\gamma l}{\mu} (a^2 - y^2) b dy$$

$$U_m = \frac{Q}{2ab} = \frac{1}{2ab} \int_a^a \frac{1}{2} \frac{\gamma l}{\mu} (a^2 - y^2) b dy = \frac{1}{2a} \frac{1}{2\mu} \gamma l \int_a^a (a^2 - y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{4a\mu} \gamma l \int_a^a (a^2 - y^2) dy = \frac{\gamma l}{4a\mu} \left[ a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_a^a = \frac{\gamma l}{4a\mu} \left[ a^3 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right]$$

$$U_m = \frac{1}{4a} \frac{\gamma l}{\mu} \frac{2}{3} a^3 \rightarrow U_m = \frac{\gamma l}{\mu} \frac{a^2}{3} \quad a = \frac{h}{2} \rightarrow U_m = \frac{\gamma l}{\mu} \frac{h^2}{12}$$

Nota che sia la velocità media e possibile calcolare la cadente piezometrica

$$J = \frac{12 \mu U_m}{\gamma h^3}$$

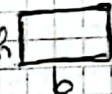
$\lambda = \frac{D J}{U_m^2 2g}$  ESPRESSIONE GENERALE  $\rightarrow$  Si introduce il raggio idraulico

$$R = \frac{A}{P}$$

Per una condotta circolare

$$R = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D} = \frac{D}{4} \rightarrow D = 4R$$

$$\lambda = \frac{4R J}{U_m^2 2g}$$

Per una sezione rettangolare  $h$  

$$R = \frac{bh}{2h+2b} = \frac{h}{2} \quad b \gg h$$

$$4R = 4 \frac{h}{2} = 2h$$

Analogamente

$$Re = \frac{\rho U_m 4R}{\mu}$$

Nel caso rettangolare

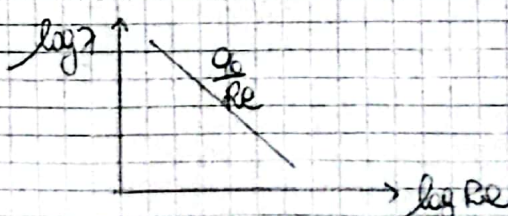
$$\lambda = \frac{2h J}{U_m^2 2g} \quad \text{con } J = \frac{12 \mu U_m}{\gamma h^3}$$

$$\lambda = \frac{2h}{U_m^2} \frac{2g}{2g} \frac{12 \mu U_m}{\rho \gamma h^3} = \frac{48 \mu}{U_m \rho h} = \frac{2 \cdot 48 \mu}{U_m \rho 2h}$$

$$\lambda = \frac{96 \mu}{U_m \rho 4R}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{96}{Re}$$

INDICE DI RESISTENZA PER CONDOTTO RETTANGOLARE



# MOTO TURBOLENTO

1883

Quasiamente il moto nelle condotte e TURBOLENTO

Questa tipologia di moto fu studiata da Reynolds che fece un esperimento per l'interno di un serbatoio immerso dell'acqua e da una parete andò a derivare un tubo di vetro dotato di rubinetto per regolare la velocità. In corrispondenza dell'imboccatura del tubo di vetro pose un tubicino collegato con un serbatoio all'interno del quale vi era un liquido con le stesse caratteristiche del liquido contenuto nel serbatoio grande ma diversa colorazione.

Fu aperto il rubinetto nel tubo di vetro in modo tale che le velocità erano piccole. Ciò che osservò che tutte le traccie risultavano ben distinte cioè senza scambio di masse.

(MOTO REGOLARE o LAMINARE)

Aprendo ulteriormente il rubinetto le velocità aumentano e il fluido inizia ad avere un andamento fluttuante (REGIME DI MOTO TRANSITORIO)

Successivamente, aprendo ulteriormente il rubinetto, il fluido colorato si disperde e vi è scambio di massa da zona a zona.

$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$  La velocità è funzione dello spazio e del tempo (MOTO IRREGOLARE o TURBOLENTO)

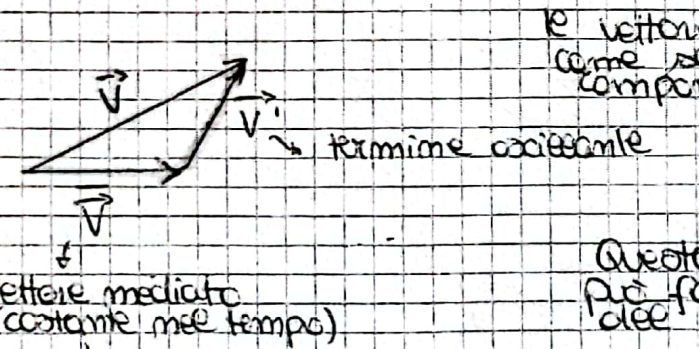
Il passaggio da MOTO LAMINARE a TURBOLENTO, dipende dal numero di Reynolds

$Re < 2000 - 2400$	MOTO LAMINARE	$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$
$Re > 4000$	MOTO TURBOLENTO	
$2000 - 2400 < Re < 4000$	MOTO TRANSITORIO	

→ a rigore andrebbe studiata come un moto vario

Il moto turbolento può essere studiato come un moto uniforme mediato nel tempo.

Consideriamo un punto all'interno del tubo all'istante di tempo fissato. Cambiando istante di tempo le vettorie sono diverse.



Il vettore si può vedere come somma di una componente costante ed una oscillante.

$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_o$

Calcola il trasporto della massa fluida

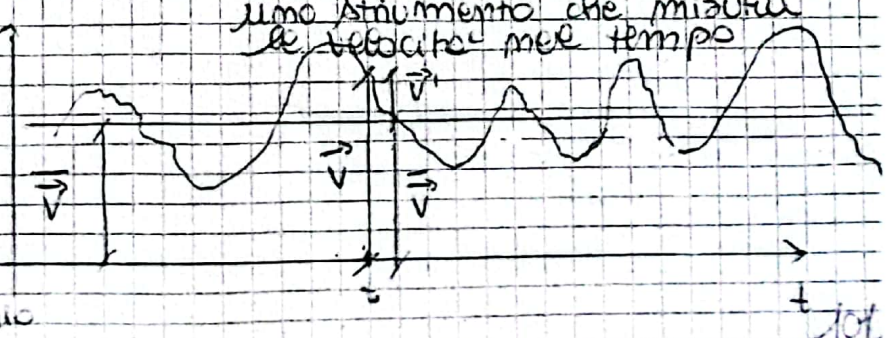
$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{V} dt$$

Tempo caratteristico della turbolenza

In un qualsiasi punto la velocità è somma di un termine costante ed uno fluttuante aleatorio e che varia nel tempo.

Questa composizione si può fare per ogni grandezza del moto permanentemente.

Immaginiamo che in un punto della massa fluida vi sia uno strumento che misura le velocità nel tempo.



In fluidodinamica il moto  
è laminare quando  
avviene con accostamento  
di strati gli uni sugli  
altri senza alcun tipo di  
rimiscelamento di fluido.  
Ma solitamente il moto  
nelle condotte è turbolento  
ovvero un moto in cui  
le particelle non seguono  
dette traiettorie ordinate.  
(forze viscosive non sono sufficienti  
a mantenere queste particelle d'ordine)



$$\vec{v} = u\vec{i} + \bar{v}\vec{j} + w\vec{k}$$

$$u = \bar{u} + u'$$

$$\bar{v} = \bar{v} + \bar{v}'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

Per le componenti  
si fa lo stesso  
ragionamento

La media dei termini oscillatori è nulla

$$\frac{1}{T} \int_0^T \vec{v}' dt = 0$$

Dimostrazione prendendo come esempio  $\bar{u}'$  ma vale anche per le altre componenti

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

# EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES NEL CASO DI MOTI TURBOLENTI

È stata ricavata precedentemente l'eq. di Navier-Stokes

$$\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \text{grad} P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

Non è stata fatta nessuna ipotesi sul regime di moto perciò l'equazione è valida in tutti i casi.

L'eq. integrata ad un volume finito e costante di ricavare l'eq. globale deve equilibrio dinamico

$$\vec{G} - \int_w \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dW = \int_A \underbrace{P \vec{n}}_{\vec{\Pi}} dA + \int_A \rho \vec{V}_n \vec{V} dA - \mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} dA = 0$$

Nel caso di moti turbolenti si fa riferimento alle grandezze medie. Ad esempio

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{T} \int_T \int_A P \vec{n} dA dt = \frac{1}{T} \int_T \int_A (\bar{P} + P') \vec{n} dA dt$$

T e A sono costanti → invertiamo gli operatori

$$\vec{\Pi} = \int_A \left[ \frac{1}{T} \int_T \bar{P} \vec{n} dt + \frac{1}{T} \int_T P' \vec{n} dt \right] dA$$

media dei termini aleatori è nulla

$$\vec{\Pi} = \int_A \bar{P} \vec{n} dt$$

Il termine  $\vec{G}$  non cambia rispetto al moto uniforme

$$\vec{M} = \frac{1}{T} \int_T \int_A \rho \vec{V}_n \vec{V} dA dt$$

$$\vec{M} = \rho \int_A \overline{V_n \vec{V}} + \vec{V}_n \vec{V} dA$$

mettiamo la dimostrazione

la media del singolo termine aleatorio è uguale a zero ma la media del prodotto non è nulla

Nel caso di moti turbolenti:

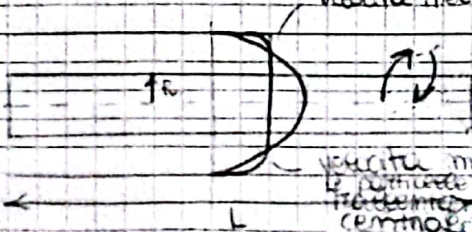
$$\vec{G} + \int_A \bar{P} \vec{n} dA - \mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} dA + \int_A \rho \vec{V}_n \vec{V} dA + \int_A \rho \overline{V_n \vec{V}'} dA - \rho \int_w \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dW = 0$$

$$\vec{M}' = \rho \int_A \overline{V_n \vec{V}'} dA$$

TERMINI AGGIUNTIVI

provata delle quantità di moto associate ai termini aleatori che esprime lo scambio della quantità di moto attraverso l'area A

Nel regime di moti turbolenti questo termine è diverso da zero. Consideriamo una condotta ed indichiamo un volume di raggio R. Veduta nel moto laminare



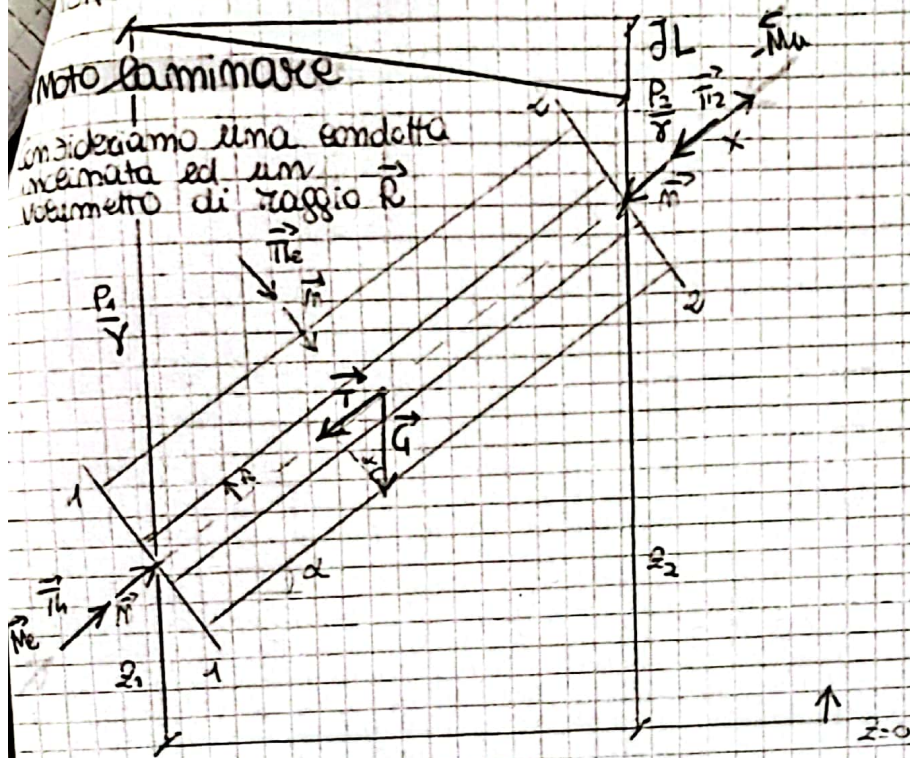
particelle moto turbolento le particelle percorrono percorsi irregolari

Le particelle si muovono in maniera caotica. Ci sono particelle che si muovono verso le pareti ed altre tendono a spostarsi verso l'interno. Le particelle più interne hanno velocità maggiore. Il bilancio delle quantità di moto non può essere nullo.

# DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

Moto laminare

consideriamo una condotta inclinata ed un volume di raggio  $R$



Vale la relazione

$$\vec{G} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{M}_e - \vec{M}_u - \mu \int \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = 0$$

Il fluido è reale perciò vi è una variazione del carico piezometrico

$$J = - \frac{\partial h}{\partial x}$$

Rappresentiamo tutte le forze

$\vec{G}$  peso del volume di controllo

$$\vec{T}_1 = \int_A P \cdot \vec{n} dA = \int_{A_1} P \cdot \vec{n} dA + \int_{A_2} P \cdot \vec{n} dA + \int_{A_m} P \cdot \vec{n} dA$$

$$\vec{I} = - \int_W \frac{\partial p v}{\partial t} dW = 0 \quad \text{in regime di moto laminare non ci sono variazioni di velocità nel tempo}$$

$$\vec{M} = \int_A \rho v_m \vec{v} dA = \int_{A_1} \rho v_m \vec{v} dA + \int_{A_2} \rho v_m \vec{v} dA + \int_{A_e} \rho v_m \vec{v} dA$$

Flusso quantità di moto in ingresso

Flusso quantità di moto in uscita

Flusso quantità di moto attraverso la superficie laterale

$$\mu \int_A \frac{\partial v}{\partial n} dA = - \mu \int_{A_1} \frac{\partial v}{\partial n} dA - \mu \int_{A_2} \frac{\partial v}{\partial n} dA - \mu \int_{A_e} \frac{\partial v}{\partial n} dA$$

Il moto è uniforme e non ci sono variazioni di velocità

$$\vec{T} = - \mu \int_{A_e} \frac{\partial v}{\partial n} dA$$

RESISTENZA AL MOTO (si oppone al moto)

→ dipende dalla superficie laterale

partanto si ottiene

$$\vec{G} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_L + \vec{M}_e - \vec{M}_u + \vec{T} = \vec{0}$$

Proiettiamo le forze lungo l'asse x

$$-G \cos \alpha + T_1 - T_2 + M_e - (-M_u) - T = 0$$

lo scopo è quantificare T

$M = \rho g V$  sono uguali e opposte

$$G = \gamma L A$$

$$T = -G \cos \alpha + T_1 - T_2$$

$$T = -\gamma L A \cos \alpha + P_1 A_1 - P_2 A_2$$

$$L \cos \alpha = z_2 - z_1$$

$$T = \gamma A (z_2 - z_1) + P_1 A_1 - P_2 A_2$$

$$T = \gamma A \left[ (z_2 + \frac{P_2}{\gamma}) - (z_1 + \frac{P_1}{\gamma}) \right]$$

carico piezometrico sez. 1-1

carico piezometrico sez. 2-2

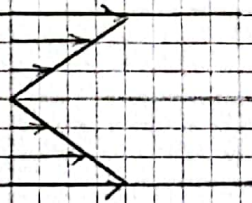
$$T = \gamma A J L$$

lo sforzo sarà:

$$\tau = \frac{T}{L P} = \frac{\gamma A J L}{L P} = \frac{\gamma A}{P} J = \gamma R J = \gamma \frac{D}{4} J$$

perimetro bagnato

Ripartiamo la distribuzione degli sforzi



Lo sforzo tang. è massima alla parete ed è costante di tutta la circonferenza (dipende da  $\mu$ )

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr}$$

Moto turbolento

$$\vec{G} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_L + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}' + \vec{T} = \vec{0}$$

Ripetiamo l'eq. globale

$$\vec{G} + \int_A \vec{P} \vec{m} dA + \int_A \rho \vec{v}_m \vec{v} dA + \int_A \rho \vec{v}_m' \vec{v}' dA - \int_V \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = \vec{0}$$

Dalla equazione bisogna ricavare lo sforzo tangenziale

$$\vec{M}' = \rho \int_A \vec{v}_m \vec{v}' dA = \int_{A_1} \rho \vec{v}_m \vec{v}' dA + \int_{A_2} \rho \vec{v}_m \vec{v}' dA + \int_{A_2} \rho \vec{v}_m \vec{v}' dA =$$

$$= \vec{M}'_e - \vec{M}'_u + \vec{M}'_e$$

termini uguali e opposti

rispetto al caso precedente questo termine non è nullo

Proiettiamo l'eq. lungo l'asse delle x

$$-G \sin \alpha + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \bar{T} + (\bar{M}_z)_x = 0$$

$$\bar{M}_z = \rho \int_A \bar{v}_m \bar{v}' dA = \rho \bar{v}_m \bar{v}' A_e$$

$$(\bar{M}_z)_x = \rho \bar{v}_m u' A_e$$

↳ proiezione di  $\bar{v}'$  lungo x

$$(\bar{M}_z)_x = -\rho \bar{u}' \bar{v}' A_e$$

$$-G \sin \alpha + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \bar{T} - (\bar{M}_z)_x$$

↳ Forza di trascinamento

$$\bar{T} = \mu \int_{A_e} \frac{\partial \bar{u}}{\partial m} dA$$

↳ è una variazione di velocità mediata perciò al posto fuori dal simbolo deve integrare e poiché la velocità varia solo lungo m la derivata totale coincide con quella parziale

$$\bar{T} = \mu \frac{d\bar{u}}{dm} A_e$$

$$\bar{T} = \mu \frac{d\bar{u}}{dr} A_e$$

proiezione lungo il raggio di curvatura

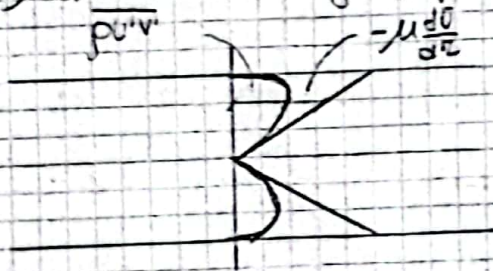
Sostituendo i termini si ottiene:  $-G \sin \alpha - \bar{p}_1 A + \bar{p}_2 A + (\bar{M}_z)_x - \bar{T} = 0$

$$\gamma L A \gamma = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} A_e + \rho \bar{u}' \bar{v}' A_e \quad \text{ma } \gamma L A \gamma = T = \gamma A_e$$

$$\gamma A_e = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} A_e + \rho \bar{u}' \bar{v}' A_e$$

↳ sforzo di natura viscosa      ↳ sforzo di natura turbolenta

Rappresentiamo l'andamento degli sforzi

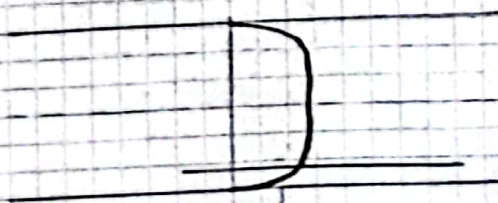


$$\gamma = \gamma D$$

La componente di natura turbolenta si annulla sulla parete.

In prossimità della parete predominano gli sforzi di natura viscosa

Diagramma velocità



$\delta_g \rightarrow$  Strato limite viscoso dove predominano gli effetti viscosi

velocità base  
andamento simile a quello laminare

Dopo la trattazione analitica si deduce che la distribuzione degli sforzi è sempre lineare

$$\tau = \frac{\gamma D}{4} j$$

In regime di moto turbolento:

$$\tau = \rho \overline{u'v'} - \mu \frac{d\bar{u}}{dr}$$

$$\frac{\gamma D}{4} j = \rho \overline{u'v'} - \mu \frac{d\bar{u}}{dr}$$

Calcoliamo la caduta piezometrica  $J$  nel regime di moto turbolento bisognerebbe risolvere l'eq. differenziale

Nel caso di moto laminare  $J$  è stata ricavata a partire da  $V_m$

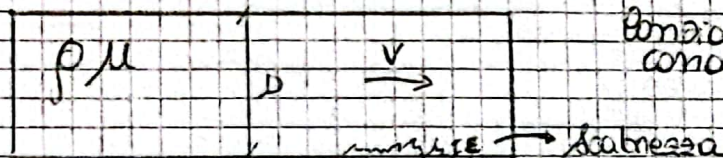
$$V_m = \frac{1}{32} \frac{\gamma D}{\mu} D^2 \quad J = \frac{32 \mu V_m}{\gamma D^2} \quad \tau = \mu \frac{du}{dr}$$

Nelle condotte il regime di moto laminare non si ha mai.

$Re > 4000$  moto turbolento

$Re < 2000$  moto laminare

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$



Consideriamo una condotta di raggio  $D$

Esempio numerico

$$V = 0,1 \text{ m/s}$$

$$D = 0,1 \text{ m}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = 10.000$$

$\nu \downarrow 10^{-6}$

Anche se  $V$  è molto bassa e anche il diametro è piccolo, il moto è turbolento perché nelle condotte il moto è SEMPRE TURBOLENTO

Per il calcolo di  $J$  si può utilizzare il TEOREMA DI REICH

Immaginiamo che la condotta sia scabra con asperità  $\epsilon$

$$\tau = f(\rho, V, D, \mu, \epsilon)$$

Scegliamo 3 grandezze fondamentali  $\rho, V, D$

$$\frac{\tau}{\rho^a V^b D^c} = G \left( \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\delta_1}}, \frac{\epsilon}{\rho^{\alpha_2} V^{\beta_2} D^{\delta_2}} \right)$$

$$\tau = \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^2} = \text{Kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{Dimensioni di una pressione}$$

$$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = (\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3})^a \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^b \cdot \text{m}^c$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

Rimane da individuare  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

$$m = (\text{Ng} \cdot \text{m}^{-3})^{\alpha_2} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^{\beta_2} \cdot \text{m}^{\gamma_2}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori ottenuti:

$$g \cdot \frac{D}{4} J = G \left( \frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\frac{DJ}{4 \frac{v}{g}} = G \left( \text{Re}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\frac{2DJ}{8 \frac{v}{g}} = G \left( \text{Re}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\lambda = \frac{DJ}{\frac{v^2}{2g}} = 8G \left( \text{Re}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

$$\lambda = \lambda \left( \text{Re}, \frac{\epsilon}{D} \right)$$

funzione

scabrezza relativa

RELAZIONE  
TRA NUMERI  
PURI

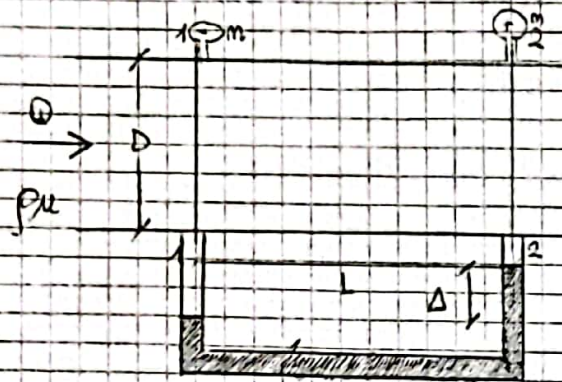
indice di resistenza

Per ricavare le relazioni tra questi numeri puri è necessario fare degli esperimenti di laboratorio

$$\lambda = \lambda(\text{Re}) \quad \text{TUBI LISCI}$$

## INDICE DI RESISTENZA PER TUBI LISCI

Per determinare la cadente piezometrica esistono diversi metodi.  
Consideriamo un tubo ed un fluido che scorre al suo interno



Scegliamo due sezioni ed installiamo 2 manometri che misurano la pressione

$$J = - \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$J = \frac{P_1 - P_2}{\rho L} \rightarrow \text{differenza tra altezze}$$

Afferimenti è possibile usare un manometro differenziale con del mercurio

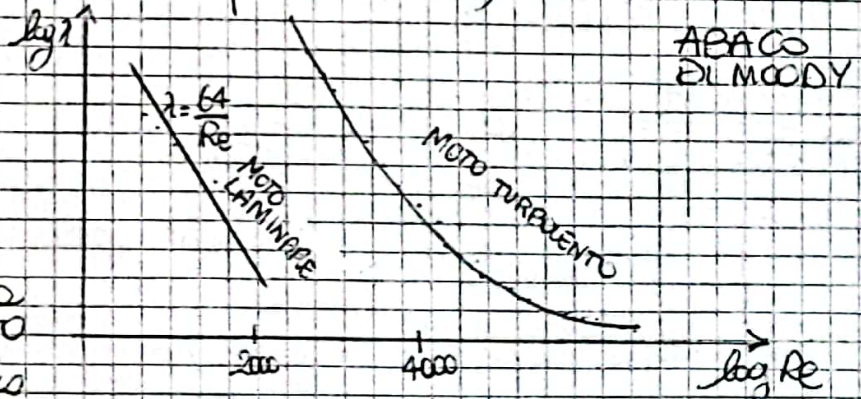
La differenza di quota ci permette di risalire alla differenza del costo

$$S = J \cdot L = \Delta \frac{\rho_m - \rho}{\rho} \rightarrow J = \frac{S}{L}$$

→ Oppure  $J$  si può calcolare a partire dall'indice di resistenza. L'indice di resistenza si può determinare al variare del numero di Reynolds (per tubi lisci)

$$\lambda = \lambda(Re)$$

$$\lambda = \frac{DJ}{\frac{v^2}{2g}}$$



Si fa variare la portata mediante un rubinetto e basta quella per far variare il numero di Reynolds

Per bassi valori di  $Re$  il legame è lineare (netto)

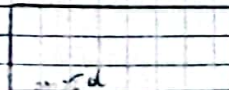
All'aumentare del numero di Reynolds aumentano le resistenze ed il legame non è più lineare

## INDICE DI RESISTENZA PER TUBI SEABRU

Nella realtà i tubi non sono lisci, bisogna tenere conto delle asperità

$$\lambda = \lambda(Re, E/D)$$

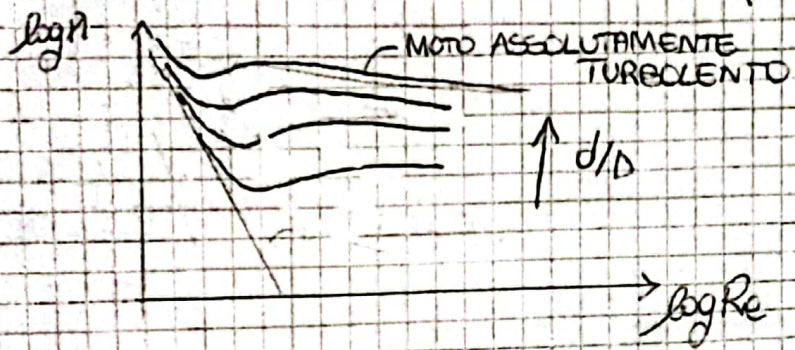
Ni konadze fare l'esperienza con molte condotte e simula la asperità con la sabbia





accorre che finché il moto è laminare vale la formula  
lineare

Per aumentare della scabrezza le curve tendono a disporre  
orizzontalmente fin tanto che si raggiunge una condizione  
tale per cui l'indice di resistenza è indipendente da Re



L'andamento della curva può essere giustificato dallo strato  
limite viscoso. In prossimità delle pareti le velocità si annullano  
e gli strati sono soltanto di natura viscosa

Se  $\delta > d \rightarrow$  caso  
liscio

SUBSTRATO LIMITE  
VISCOSO  
moto laminare

caso

Da risultati sperimentali si è visto che  $\delta$  è inv. prop. a Re

$$\delta = \frac{11,6 D}{Re} \sqrt{178}$$

Per aumentare del numero di Reynolds  $\delta$  si accortiglia e le  
asperità emergono e si ha un'evoluzione dei fenomeni di  
turbolenza e quindi un'impennata dell'indice di resistenza.

Nel caso di tubi commerciali il distacco risulterà essere più  
dolce poiché le asperità non emergono contemporaneamente

$\frac{\delta}{d} = \frac{1}{Re} = \lambda \rightarrow$  Valore medio

Vi sono delle formule che sostituiscono l'abaco di Moody

$Re < 10^5 \quad \lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}} \quad$  Blasius

$10^5 < Re < 10^7 \quad \lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}$

$Re > 10^7 \quad \frac{1}{\lambda} = -2 \log \left( \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$

Nel caso di moto assolutamente turbolento

$\frac{1}{\lambda} = -2 \log \left( \frac{1}{3,71} \frac{\epsilon}{D} \right)$

$\lambda = \lambda(\epsilon/D)$

Oppure per gestire l'intero diagramma di Moody

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2.57}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\epsilon}{D} \right) \quad \text{FORMULA DI COLEBROCKE}$$

### APPLICAZIONI

- ① Consideriamo un condotto con portata, diametro e scabrezza noti. Lo scopo è calcolare  $J$  per quantificare le perdite di energia.

Nota ① si calcola la velocità e quindi il numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Noti  $Re$  e  $\frac{\epsilon}{D}$  si utilizza l'abaco di Moody per ricavare  $\lambda$

$$\lambda = \frac{D J}{\frac{V^2}{2g}} \rightarrow J = \lambda \frac{V^2}{2g D}$$

- ② Supponiamo che siano noti:

①  $D$   $J$   $\rightarrow \epsilon$  bisogna determinare la scabrezza

per un certo tratto

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \rightarrow \lambda = \frac{D J}{\frac{V^2}{2g}}$$

Noti  $Re$  e  $\lambda$  si traccia il punto corrispondente nell'abaco di Moody e si legge  $\epsilon/D$

- ③ Supponiamo che per un tubo siano noti:

$D$   $L$   $J$   $\epsilon \rightarrow Q$  bisogna determinare la portata

$$J = \frac{\lambda V^2}{2g D} \rightarrow \text{ma non conosciamo } Re$$

$$J = \frac{\lambda Q^2}{A^2 2g D} \rightarrow Q = A \sqrt{\frac{2g D J}{\lambda}}$$

Si fa l'ipotesi di moto assolutamente turbolento  $\rightarrow \lambda(\frac{\epsilon}{D})$   
 $\lambda$  è un valore di primo tentativo

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{1}{3.71} \frac{\epsilon}{D} \right)$$

Nota  $\lambda$  di primo tentativo si calcola  $Q_1$

Nota  $Q_1$  si calcola  $V_1 \Rightarrow Re_1$  e si verifica che il moto è assolutamente turbolento

Nel caso di moto non assolutamente turbolento si calcola  $\lambda_2$

$$Q_2 = A \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda_2}}$$

Se  $Q_2 \approx Q_1$  il processo si arresta

Altrimenti moto  $Q_2$  si calcola  $V_2 \Rightarrow Re_2$

Nel caso di correnti a pelo libero vale la formula di Chézy

$$\lambda = \frac{DJ}{V^2} \quad \lambda = \frac{DJ}{V^2} 2g \quad R = \frac{D}{4}$$

$$\lambda = \frac{4R}{V^2} 2g \rightarrow V^2 = \frac{8g}{\lambda} RJ$$

$$V = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{RJ}$$

$$\Rightarrow V = C \sqrt{RJ}$$

FORMULA  
DI CHÉZY

↓  
Coeff. di  
resistenza

↓  
Si deduce con abaco  
di Moody o altre formule

Formule empiriche

$$C = K_s R^{1/6} \quad \text{STRIKLER}$$

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}} \quad \text{BAZIN}$$

$$C = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}} \quad \text{KUTTER}$$

→  $K_s, \gamma, m$  tabellati  
(dipendono dalla  
condotta o dalle  
tipologie di canale)