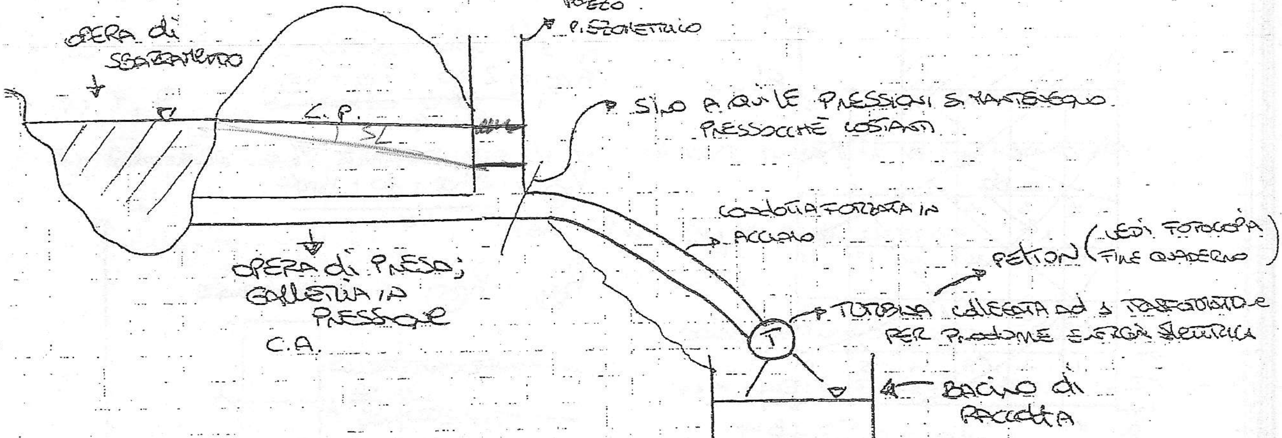
## Lezione n° 18

### Colpo d'ariete (trattazione qualitativa)

Considerato un impianto idroelettrico per piccola portata ed alte cadute, esso sfrutta l'energia potenziale di una massa d'acqua immagazzinata in un bacino di raccolta dove viene realizzata un'opera di sbarramento per immagazzinare acqua. *



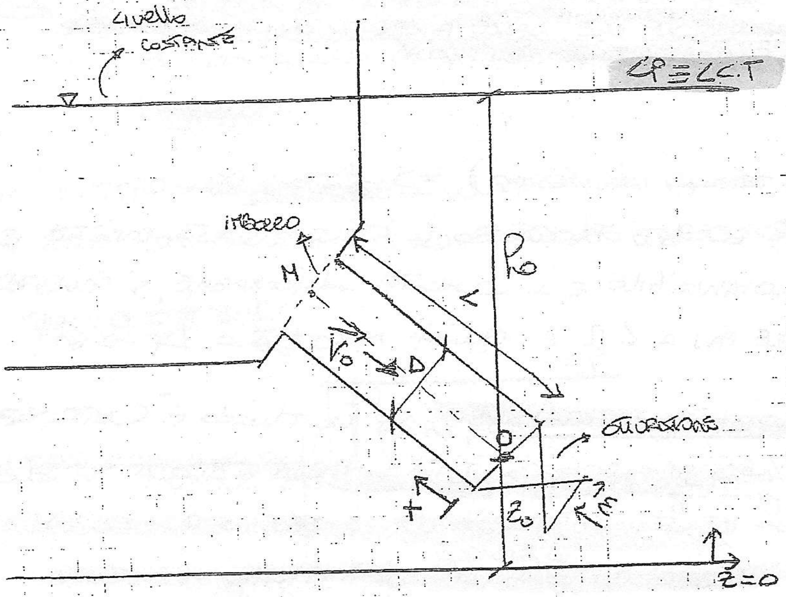

Una delle funzioni fondamentali del pozzo piezometrico è che le sovrapressioni, le onde di pressioni che si generano in seguito ad una manovra brusca di chiusura, risalendo la condotta forzata possano danneggiare la galleria in pressione in C.A.; dobbiamo, quindi, andare a vedere quali sono le condizioni più pericolose per la stabilità della condotta forzata e quali sono le massime sovrapressioni che si generano in seguito alla manovra di chiusura.

* Il bacino di raccolta serve a raccogliere l'acqua in modo tale che di notte, quando il fabbisogno energetico di una città è minore, il surplus di energia prodotta dalle centrali termoelettriche (le centrali idroelettriche possono essere attivate e disattivate velocemente, quelle termoelettriche no), viene mandata alle centrali idroelettriche per pompare acqua dal bacino (di valle) al serbatoio di monte.

① Facciamo qualche considerazione di carattere qualitativo, ovvero andiamo a vedere che succede quando arrestiamo la portata bruscamente ovvero si passa da un certo valore di Q a zero nel caso di fluido incomprimibile e in un condotto indeformabile.

Consideriamo un grande serbatoio il cui livello rimane costante da

QUESTO SERBATOIO VIENE DERIVATA UNA CONDOTTA CHE ALL'ESTREMITÀ HA UNA VALVOLA DI REGOLAZIONE DELLA PORTATA:




$H_p$ = FLUIDO IDEALE → SI TRASCURANO LE PERDITE DI CARICO: LCT ORIZZONTALE

$\vec{V_0}$ = VELOCITÀ DI MOTO PERMANENTE

$H_p = \frac{V^2}{2g}$ MOLTO PICCOLO PERCHÉ Q MOLTO PICCOLO QUINDI $LCT \equiv LP$.

Al tempo $t=0$ abbiamo chiuso l'otturatore quindi la velocità passa dal valore $V_0$ di moto permanente a zero:

$V = V_0 = 0$

Quindi l'energia cinetica si trasforma in energia di pressione per cui nascono delle sovrapressioni che si propagano lungo la condotta forzata ($\Delta p$) che possono essere determinate attraverso il teorema degli impulsi ricavato dalla 2ª legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

con $m = \rho\,\Omega\,L$

$\Omega$ = sezione della condotta di diametro D

TEOREMA DEGLI IMPULSI → $\vec{F}\cdot dt = m\,d\vec{V}$ → VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO RELATIVA ALLA MASSA m.

$\vec{F}\cdot dt$: FORZA APPLICATA IN UN TEMPO INFINITESIMO dt

MA $F = \Delta p\cdot\Omega\cdot\vec{m}$ QUINDI

$V_f$ = VELOCITÀ FINALE $= 0$

$V_i$ = VELOCITÀ INIZIALE $= V_0$

$$\Delta p\cdot\cancel{\Omega}\,\vec{m}\,dt = \rho\,\cancel{\Omega}\,L(\vec{V_f} - \vec{V_i})$$

SOSTITUENDO SI HA: — con $L\cdot\Omega$ = Volume

$$\Delta p\,\vec{m}\,dt = \rho L(0 - V_0)$$

E ANCORA:

$$\Delta p \cancel{\vec{m}}\, dt = \rho L V_0 \cancel{\vec{m}}$$ con $\vec{V_0}$ opposto a $\vec{m}$ quindi $-\vec{V_0} = V_0 \cdot \vec{m}$

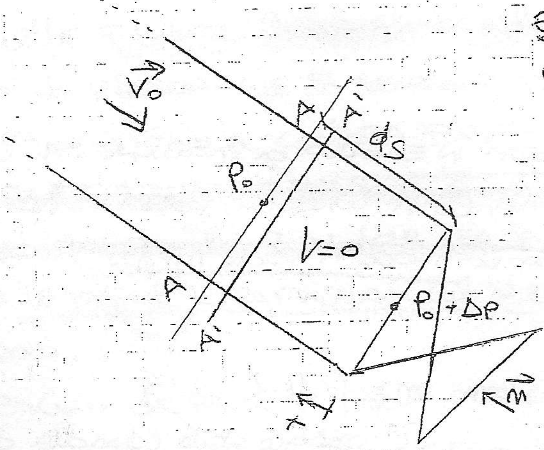
per cui

$$\Delta p = \frac{\rho L V_0}{dt}$$ ← sovrapressione che nasce a seguito di una negazione istantanea del flusso dell'acqua.

se $dt \to 0$ (ovvero è un termine infinitesimo) $\Rightarrow \Delta p \to \infty$

quindi se $dt \Rightarrow 0$ vuol dire che sto bloccando il flusso istantaneamente e quindi se il fluido è incomprimibile e il condotto indeformabile, si arresterà l'intera massa d'acqua di volume pari a $L\Omega$ e quindi nasceranno $\Delta p \to \infty$!

② Fluido comprimibile in condotto deformabile, se il fluido è comprimibile (come per fortuna lo è) non si arresterà tutta la massa d'acqua ma solo un volumetto, per cui in un istante di tempo $dt$ successivo a $t=0$ in prossimità dell'otturatore si arresterà un volumetto di ampiezza infinitesima pari a $dS$:




E la restante massa d'acqua che fa? Continua a scendere perché il fluido è comprimibile (si immagini una molla che si comprime), per cui la sezione AA si sposta nella sezione A'A' e la restante massa continuerà a muoversi perché andrà ad occupare il volume compreso tra le due sezioni. Quello che dobbiamo determinare è la sovrapressione $\Delta p$ che nasce a seguito della chiusura nell'istante $dt$; applichiamo a tal proposito il teorema degli impulsi tenendo presente che nella sezione che dista $dS$ dall'otturatore abbiamo una pressione pari a $P_0$ che all'otturatore si incrementa di una quantità $\Delta p$.

$$\overbrace{(P_0+\Delta p)\vec{m}\,\Omega\, dt - P_0\vec{m}\,\Omega\, dt}^{\text{forza risultante}} = m\, d\vec{V}$$ con $m = \rho\Omega dS$

$$\Delta p\, \vec{m}\,\Omega\, dt = \rho\Omega dS(\cancel{\vec{V_f}} - \vec{V_i})$$
$\vec{V_f} = 0$, $\vec{V_i} = \vec{V_0} = -V_0\vec{m}$

ovvero:

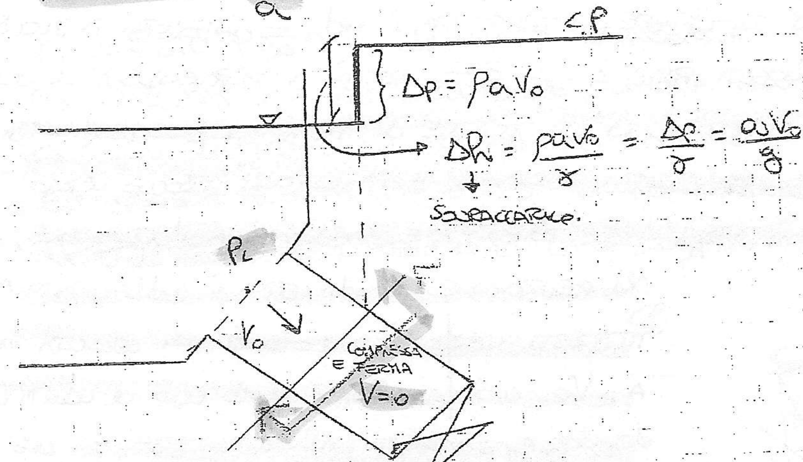
$$\Delta p \cancel{\vec{m}}\,\cancel{\Omega}\, dt = \rho \cancel{\Omega} dS\, V_0 \cancel{\vec{m}}$$

quindi: $\Delta p = \rho \frac{ds}{dt} V_0$ → $a \cong 1000 m/s = \frac{ds}{dt}$   $\Delta p = \rho \cdot a \cdot V_0$ 73

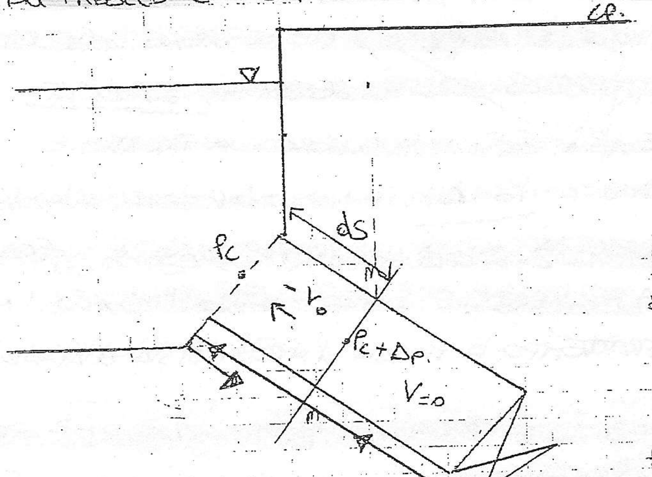
con $a$ = velocità di propagazione delle onde (le perturbazioni) a seguito di una manovra di chiusura e si propagano dall'otturatore verso l'imbocco.

In un tempo pari a $dt$ il volumetto di fluido si ferma, ma in un tempo pari a $2dt$, che succede? (vedi fotocopie fine quaderno). Si fermerà anche il volumetto che sta sopra per cui si ha una perturbazione che si propaga dall'otturatore verso l'imbocco e nel suo passaggio i volumetti toccati da questa perturbazione si arresteranno, si comprimeranno e la pressione crescerà di una quantità $\Delta p$.

tra $0 < t < \frac{L}{a}$




Dopo $t = \frac{L}{a}$ la perturbazione sarà arrivata all'imbocco (la pressione $p_L$ all'imbocco è costante perché il serbatoio è a livello costante). All'imbocco si ha uno squilibrio di forze in virtù del fatto che nell'imbocco vi è una pressione $p_L$ e in una generica sezione che dista $ds$ dall'imbocco si ha una pressione pari a $p_L + \Delta p$ per cui questo squilibrio farà sì che il volumetto infinitesimo di fluido inizi a muoversi di velocità $\vec{V}$ verso l'imbocco. Per calcolare la velocità applichiamo il teorema degli impulsi;




per cui:

$\vec{F} dt = m d\vec{v}$

$\Delta p \Omega \vec{n} dt = \rho \Omega ds (\vec{V_f} - \cancel{\vec{V_i}}) = \rho \Omega ds \vec{V_f}$

$\Delta p \cancel{\Omega} \cancel{\vec{n}} dt = \rho \cancel{\Omega} ds V_f \cancel{\vec{n}}$

HA: $\Delta p\, dt = \rho a V_0\, dt$

SOSTITUENDO SI HA:

$$\rho a V_0\, dt = \rho ds\, V_f$$

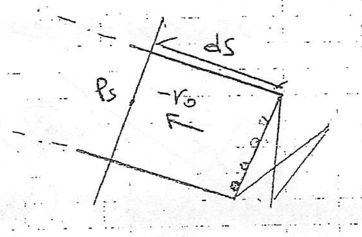
Quindi

$$V_f = \frac{\cancel{\rho}\, a V_0 \cancel{dt}}{\cancel{\rho}\, \cancel{ds}} \qquad \text{con } \frac{ds}{dt} = a$$

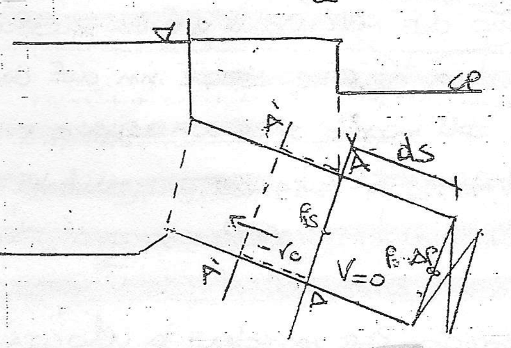
CONSEGUENTEMENTE $\boxed{V_f = V_0}$

* SI RITORNA IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE!

QUESTO VOLUMETTO, QUINDI, IN UN ISTANTE DI TEMPO PARI AD $\frac{L}{a}$ INIZIERÀ A MUOVERSI VERSO IL SERBATOIO CON UNA VELOCITÀ PARI A $-V_0$ E TENDERÀ A RIPRENDERE IL SUO VOLUME INIZIALE.* ARRIVATA ALL'IMBOCCO IN UN ISTANTE DI TEMPO $dt$ SUCCESSIVO SI HA UNA NUOVA PERTURBAZIONE CHE QUESTA VOLTA SI PROPAGA DALL'IMBOCCO VERSO L'OTTURATORE E IN UN TEMPO $t = \frac{2L}{a}$ LA PERTURBAZIONE RAGGIUNGERÀ L'OTTURATORE;

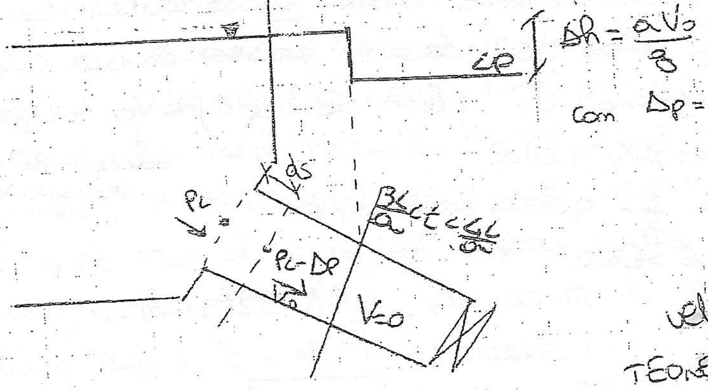



ALL'OTTURATORE IL VOLUMETTO È SOLLECITATO A MUOVERSI VERSO L'IMBOCCO CON UNA VELOCITÀ PARI A $-V_0$, CIÒ VORREBBE DIRE CHE IL VOLUMETTO DOVREBBE STACCARSI DALL'OTTURATORE, MA CIÒ NON È POSSIBILE PERCHÉ LE PARTICELLE RIMANGONO ATTACCATE ALL'OTTURATORE, QUINDI UN INFINITESIMO DOPO OVVERO ALL'ISTANTE DI TEMPO PARI A $t = \frac{2L}{a} + dt$ IL VOLUMETTO SI FERMA E, SICCOME VIENE SOLLECITATO




A MUOVERSI VERSO IL SERBATOIO, SI DILATA E NELL'OTTURATORE AVRÒ UNA PRESSIONE PARI A $P_0 - \Delta p$ CON IL $-\Delta p$ DOVUTO ALLA $-V_0$. NASCERÀ QUINDI UNA SOVRAPRESSIONE NEGATIVA. LA PERTURBAZIONE SI MUOVE VERSO L'IMBOCCO (NEL FRATTEMPO LA MASSA D'ACQUA SI STA DILATANDO) E

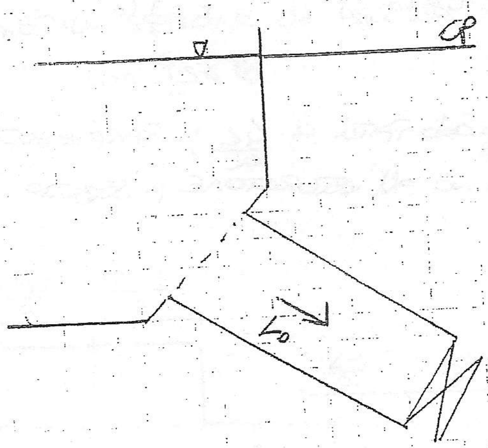
IN UN TEMPO PARI A $\frac{3L}{a}$ LA PERTURBAZIONE È ARRIVATA ALL'IMBOCCO E SI PROPAGHERÀ IN UN INFINITESIMO SUCCESSIVO, CON UNA CELERITÀ PARI AD $a$ VERSO L'OTTURATORE; TUTTA LA CONDOTTA, PRIMA DELL'INFINITESIMO $dt$ (PRIMA CHE LA MASSA D'ACQUA RICOMINCI A MUOVERSI VERSO L'OTTURATORE) È IN DEPRESSIONE. ANCHE QUESTA PERÒ NON È UNA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO PERCHÉ SE CONSIDERIAMO UNA SEZIONE CHE DISTA $ds$ DALL'IMBOCCO ABBIAMO UNA PRESSIONE PARI A $P_L - \Delta p$.




PER CUI IN UN ISTANTE di tempo pari a $t = \frac{3L}{a} + dt$, A CAUSA di questo squilibrio di forze il volumetto tenderà a muoversi dall'imbocco verso l'otturatore con una velocità, calcolata applicando il teorema degli impulsi, pari a $V_0$.

A questo punto il volumetto riprenderà il suo volume iniziale, per cui nascerà una perturbazione, questa volta discendente i cui effetti sono di riportare il fluido in condizioni di moto permanente.

Nell'istante di tempo $t = \frac{4L}{a}$ la perturbazione arriva di nuovo all'otturatore e ci troviamo come nella situazione $t = 0$ di moto permanente.




Si ha, quindi, un fenomeno ciclico di periodo pari a $\frac{4L}{a}$; per cui in un istante di tempo $t = \frac{4L}{a} + dt$ tutto ricomincia da capo, questo durerebbe all'infinito se il fluido fosse ideale; nel fluido reale ci sono le perdite ovvero delle dissipazioni di energia per cui il fenomeno si smorza col passare del tempo;

indichiamo con:

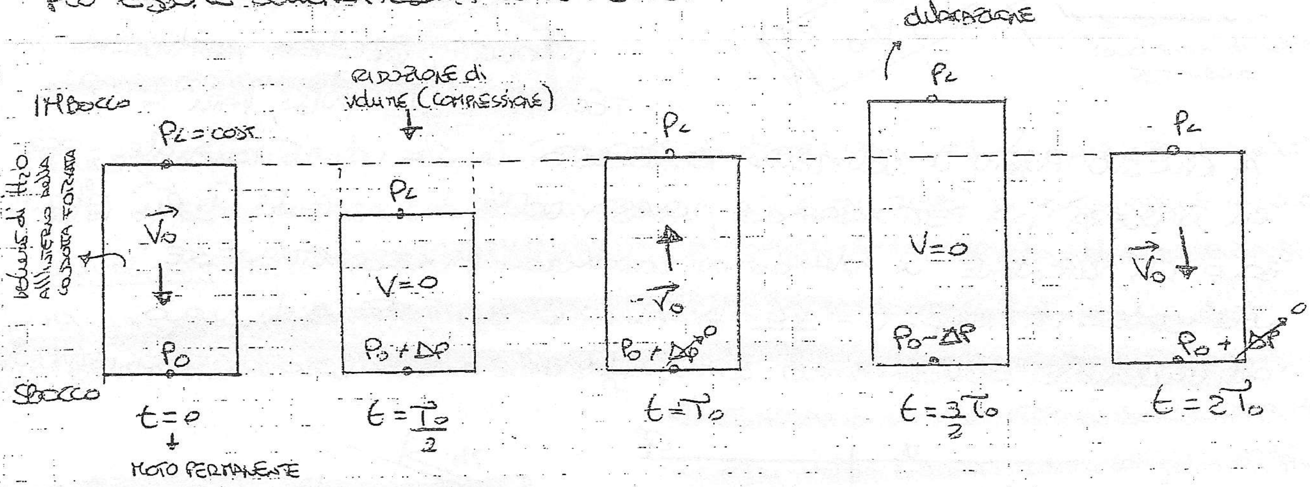
$T_0 = \frac{2L}{a}$ = tempo di fase → tempo necessario affinché la perturbazione dall'otturatore arrivi all'imbocco e torni all'otturatore

## LEZIONE N° 19 (CONTINUAZIONE...) 19/04/2011

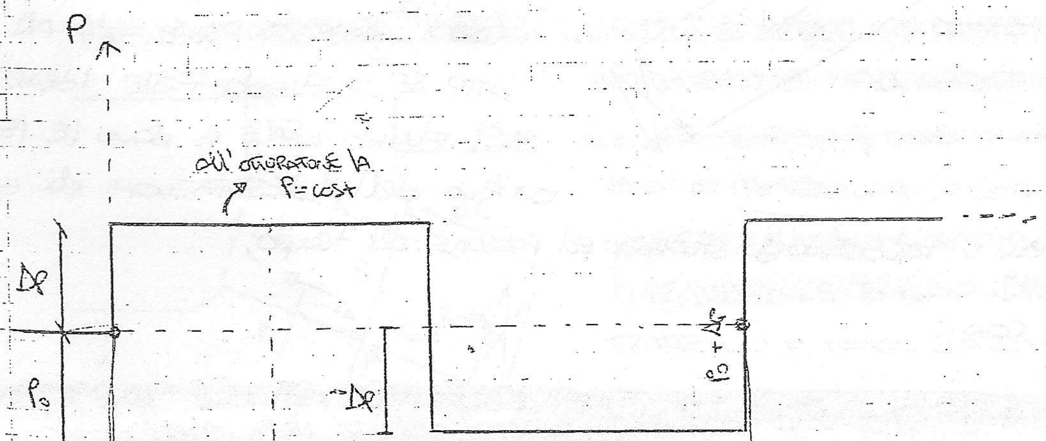
Continuiamo la trattazione qualitativa del colpo d'ariete cioè [illegible] succede quando si arresta di colpo il flusso dell'acqua [illegible] una condotta forzata; le sovrapressioni oscillano di $2\Delta p$ con $\Delta p = \rho a V_0$ in quanto si hanno sovrap. negative e sovrap. positive.

$V_0$ → velocità di moto permanente

Definito $T_0$ = tempo di fase = $\frac{2L}{a}$ questa situazione può essere schematizzata come segue:



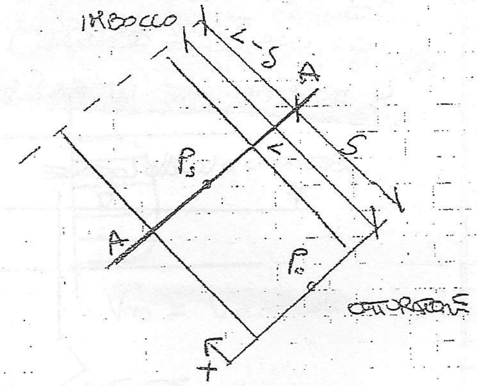

Il fenomeno è ciclico di un periodo pari a $\frac{4L}{a}$; rappresentiamo l'andamento delle sovrapressioni che nascono all'otturatore a seguito di una manovra brusca di chiusura:




Prima dell'istante $t=0$ la pressione aveva un valore costante pari a $p_0$ essendo in moto permanente; nell'istante $t=0$ si esegue la manovra di chiusura per cui si genera una sovrappressione per cui le pressioni crescono di una quantità pari a $\Delta p$, le perturbazioni in un tempo pari

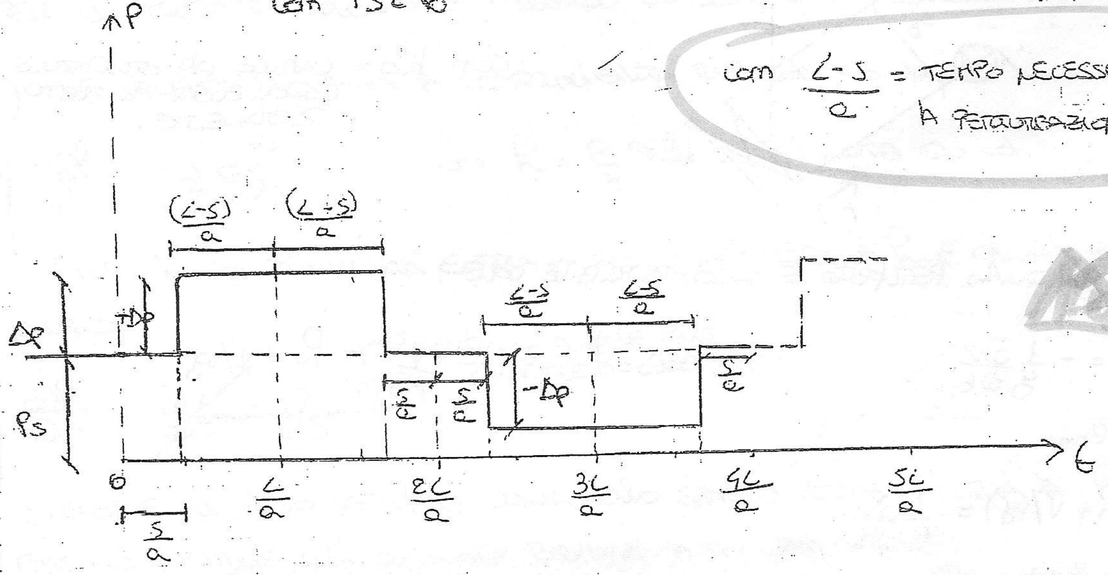
A $\frac{L}{a}$ ARRIVANO ALL'IMBOCCO MA ALL'OTTURATORE LA PRESSIONE SI MANTIENE COSTANTE; AL TEMPO $\frac{2L}{a}$ LA PERTURBAZIONE ARRIVA NUOVAMENTE ALL'OTTURATORE CON UNA PRESSIONE PARI A $P_0 + \Delta p$ E IN QUESTO ISTANTE IL LIQUIDO VIENE SOLLECITATO A MUOVERSI VERSO L'IMBOCCO PER CUI NASCERÀ UNA SOVRAPPRESSIONE NEGATIVA CHE FARÀ PASSARE LA PRESSIONE DA UN VALORE $P_0 + \Delta p$ A UN VALORE $P_0 - \Delta p$; LA PERTURBAZIONE RISALE NUOVAMENTE MA LA PRESSIONE SI MANTIENE COSTANTE FINO AL TEMPO $\frac{4L}{a}$ = TEMPO DI FASE DOVE SI RITORNA IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE COME NELL'ISTANTE DI TEMPO $t=0$ E SI RIPARTE CON UN VALORE PARI A $P_0 + \Delta p$ (CICLICAMENTE).

CONSIDERIAMO ADESSO UNA GENERICA SEZIONE $\bar{A}\bar{A}$ DISTANTE $S$ (ASCISSA DELLA SEZIONE) DALL'OTTURATORE, CON $L$ = LUNGHEZZA DELLA CONDOTTA FORZATA;
TRACCIAMO IL DIAGRAMMA DELLE SOVRAPPRESSIONI PER LA GENERICA SEZIONE DI ASCISSA $S$.




con $P_s < P_0$

con $\frac{L-S}{a}$ = TEMPO NECESSARIO AFFINCHÉ LA PERTURBAZIONE

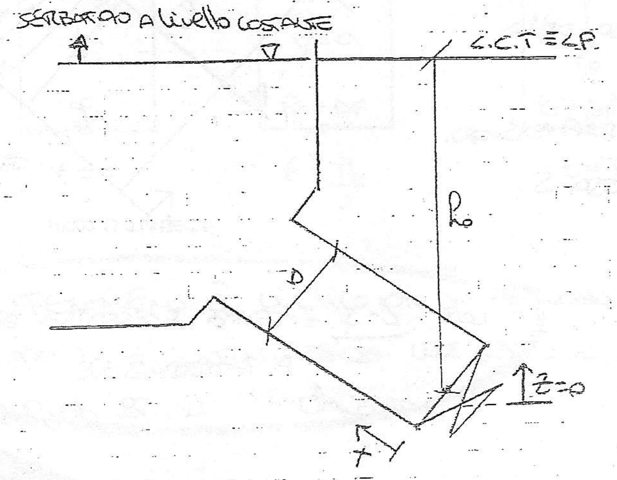



NELL'ISTANTE $t=0$ ESEGUIAMO LA MANOVRA DI CHIUSURA MA LA PERTURBAZIONE ARRIVERÀ NELLA SEZIONE CONSIDERATA DOPO UN TEMPO PARI A $S/a$, DOPO IL QUALE SI AVRÀ UNA SOVRAPPRESSIONE $\Delta p$ CHE SI MANTERRÀ COSTANTE FINO AD UN VALORE DI TEMPO PARI A $\left(\frac{2L}{a} - \frac{S}{a}\right)$ PERCHÉ IN $\frac{2L}{a}$ RAGGIUNGE DI NUOVO L'OTTURATORE, MA RAGGIUNGE LA SEZIONE AA UN ISTANTE DI TEMPO $\frac{S}{a}$ PRIMA; A QUESTO PUNTO IL FLUIDO RIPRENDE IL SUO VOLUME INIZIALE E AVREMO UNA PRESSIONE PARI A $P_s$; ALL'ISTANTE DI TEMPO $\frac{2L}{a}$ LA PERTURBAZIONE È RITORNATA ALL'OTTURATORE E TORNA INDIETRO E RAGGIUNGE LA SEZIONE DOPO UN TEMPO $S/a$ DOVE NASCE UNA SOVRAPPRESSIONE NEGATIVA PARI A $P_s - \Delta p$ E RIMANE COSTANTE FINO

A quando la perturbazione arriva all'imbocco, torna indietro e incontra di nuovo la sezione AA in un tempo pari a $\left(\frac{4L}{a}-\frac{s}{a}\right)$ in cui si avrà una pressione pari a $p_s$ ripristinando le condizioni di moto permanente e poi il diagramma si riproduce identico.

## Trattazione analitica del colpo d'ariete

Si tratta di cercare delle equazioni differenziali che legano la velocità e il carico in quanto essendo in presenza di moto vario si hanno sia variazioni del carico che della velocità; trattiamo chiusure reali (che possono variare con una legge qualsiasi) non istantanee e consideriamo il fluido elastico e deformabile attraverso lo schema seguente:




Con $\Omega$ sezione condotta forzata di diametro D.

Hp: si trascurano le perdite di carico, con piccole portate, piccole velocità per cui L.C.T ≡ L.C.P.

Con $h_0$ = carico all'otturatore in condizioni di moto permanente.

Per un liquido perfetto e incomprimibile vale:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{con } H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = h + V^2/2g$$

Sostituendo:

$$\frac{\partial (h + V^2/2g)}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{2V}{2g}\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

Ci interessa sapere come varia il carico piezometrico nello spazio, per cui:

$$(*) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g}\underbrace{\left(\overset{\text{variaz. temporale}}{\frac{\partial V}{\partial t}} + \overset{\text{variazione spaziale}}{V\frac{\partial V}{\partial s}}\right)}_{\text{derivata totale o derivata euleriana}} = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$$

→ vale per un fluido ideale e incomprimibile lungo una traiettoria

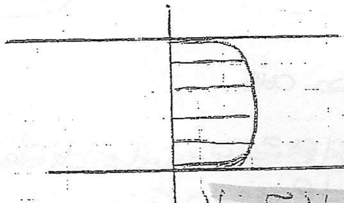
MA LA LEGGE (*) HA DUE PROBLEMI:

1) VALE LUNGO UNA TRAIETTORIA E NOI DOBBIAMO APPLICARLA AD UNA CORRENTE ALL'INTERNO DELLA CONDOTTA FORZATA;

2) VALE PER UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE MENTRE NOI ABBIAMO UN LIQUIDO COMPRIMIBILE;

VEDIAMO QUINDI COME POSSIAMO ESTENDERE TALE LEGGE AD UNA CORRENTE E AD UN FLUIDO COMPRIMIBILE; ANALIZZIAMO SINGOLARMENTE I DUE PROBLEMI:

1) LA (*) CHE LEGA LA $h$ ALLA $V$; SE $V = V_{media}$ DELLA CORRENTE ABBIAMO UN LEGAME TRA $h$ e $V_{media}$ IL CHE È UN VANTAGGIO IN QUANTO LA $V$ È UNA VELOCITÀ PUNTUALE (LUNGO LA TRAIETTORIA);



$V_m \cong V_{puntuale}$

NEL MOTO TURBOLENTO IL DIAGRAMMA DELLE VELOCITÀ È APPIATTITO PER CUI SI PUÒ "CONFONDERE" LA VELOCITÀ MEDIA CON LA VELOCITÀ PUNTUALE, PER CUI QUESTA LEGGE PER UN MOTO TURBOLENTO LA POSSIAMO ESTENDERE ALLA CORRENTE.

2) PER QUANTO RIGUARDA LA COMPRIMIBILITÀ RIPRENDIAMO LA (*)

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \text{con } h = \frac{p}{\gamma} + z$$

SI NOTA QUINDI CHE LA COMPRIMIBILITÀ ENTRA IN GIOCO NEL TERMINE $h$ E QUINDI IN $\frac{\partial h}{\partial s}$

OVVERO:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \cancel{\frac{\partial z}{\partial s}}^{\,0} + \frac{\partial}{\partial s}(p/\gamma)$$

DERIVATA SPAZIALE DELLE ALTEZZE PIEZOMETRICHE

SICCOME IL PESO SPECIFICO VARIA NELLO SPAZIO PERCHÈ VARIA LA PRESSIONE POSSIAMO SOSTITUIRE ALLA DERIVATA PARZIALE LA DERIVATA TOTALE:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{d(p/\gamma)}{ds}$$

PERCHÈ $\gamma = \rho g$ con $\rho = m \cdot W$ (PESO, VOLUME)

PERCHÈ $\rho$ VARIA PERCHÈ VARIA $W$ E $W$ VARIA PERCHÈ VARIA LA PRESSIONE QUINDI IN GENERALE LA LEGGE DI VARIAZIONE DIPENDE SOLO DALLA PRESSIONE.

SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} \quad \circ$$

ESSENDO IL FLUIDO COMPRIMIBILE:

$$\frac{\partial h'}{\partial s} = \frac{\partial (P/\gamma)}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{P\,\partial \gamma}{\partial s}$$

IL $\gamma$ VARIA LUNGO S PERCHÉ VARIA LA PRESSIONE; IL $\frac{\partial h}{\partial s}$ POSSIAMO SCRIVERLO ANCHE COME:

moltiplico e divido per dP

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds} - \frac{P}{\gamma^2}\frac{d\gamma}{dP}\cdot\frac{dP}{ds} = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds}\left(1 - \frac{P}{\gamma}\frac{d\gamma}{dP}\right)$$

Quindi:

È UNA COSTANTE, SI PUÒ SEMPLIFICARE

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds}\left(1 - \underbrace{\frac{P}{\rho g}\frac{d(\rho g)}{dP}}_{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$$

RICORDANDO CHE:

$$\varepsilon = \rho\frac{dP}{d\rho} = \text{modulo di elasticità a compressione cubica}$$

SI HA:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds}\left(1 - \cancel{\frac{P}{\varepsilon}}^{\simeq 0}\right)$$

$\varepsilon_{H_2O} = 2\cdot 10^8\ kg/m^2$

$P_{\text{massima di esercizio in genere}} = 100\ kg/cm^2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P}{\varepsilon} = \frac{100}{2\cdot 10^8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}005$$

Quindi il rapporto $\frac{P}{\varepsilon}$ essendo molto minore di 1 si può trascurare per cui:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{d}{ds}(P/\gamma) = \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds}$$

← VALE QUINDI LA STESSA RELAZIONE UTILIZZATA PER I FLUIDI COMPRIMIBILI.

Quindi la:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right)}$$

→ PUÒ ESSERE UTILIZZATA NEL CASO DI CORRENTI E DI FLUIDO COMPRIMIBILE!

SIAMO IN PRESENZA DI MOTO VARIO QUANDO GLI ARGOMENTI DELLA DERIVATA VARIANO SIA NELLO SPAZIO CHE NEL TEMPO; L'ARGOMENTO PUÒ ESSERE DEL TIPO:

$\left(t \pm \frac{x}{a}\right)$ E TIENE CONTO DEL FATTORE TEMPORALE $(t)$ E DEL FATTORE SPAZIALE $(x)$ CON

$a$ = CELERITÀ DELLA PERTURBAZIONE

DOVUTO AL FATTO CHE ABBIAMO UNA PERTURBAZIONE CHE SALE E CHE SCENDE

Riferendoci sempre al nostro impianto per piccole portate e alte cadute il termine $V\frac{\partial V}{\partial s}$ può essere trascurato rispetto ai termini che variano nel tempo perché:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V' \qquad \text{con } \left(t \pm \frac{x}{a}\right) \text{ argomento di } V$$

quindi se faccio la derivata spaziale dell'argomento di V si ha:

$$* \quad V\frac{\partial V}{\partial s} = V \cdot V'\left(\pm\frac{1}{a}\right)$$

con $a \cong 1000\,m/s$
$V = 3-4\,m/s$ $\Rightarrow$ $\frac{V}{a}$ è molto piccolo
velocità di esercizio, piccole portate, piccole V

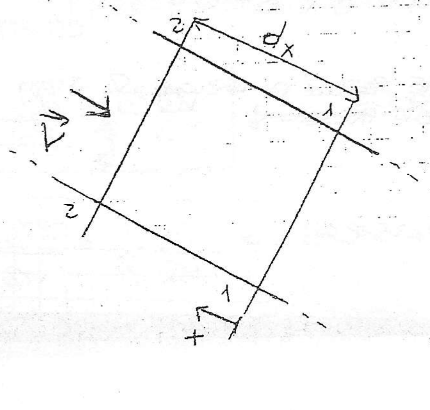
Per cui quando moltiplichiamo $\frac{V}{a}$ per la derivata di V si ottiene un numero molto piccolo che può essere trascurato in confronto a $\frac{\partial V}{\partial t}$, per cui rimane:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

visto che le ascisse le contiamo dall'otturatore verso l'imbocco e che la velocità ha direzione opposta a x si può scrivere:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}} \Rightarrow \text{Equazione del moto per il fenomeno del colpo d'ariete}$$

l'obiettivo è vedere come varia il carico nel tempo in corrispondenza di una determinata sezione; per cui all'equazione del moto dobbiamo associare l'equazione di continuità nel caso di moto vario; la densità $\rho$ è variabile perché il fluido è comprimibile per cui dobbiamo fare un bilancio di massa, consideriamo, quindi, un volumetto di fluido, in una condotta, di ampiezza dx compreso tra le sezioni 1-1 e 2-2;




nel tempo dt infinitesimo la massa che entra dalla sezione 2-2 meno quella che esce attraverso la sezione 1-1 deve uguagliare la variazione di massa (sempre nel tempo dt infinitesimo) dovuta alla variazione della densità

PER CUI:

$$M_{u\,1-1} = \rho Q\,dt \qquad \rho Q\,dt = [Kg/m^3 \cdot m^3/s \cdot s] = Kg$$

$$M_{e\,2-2} = \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial x}dx\right)dt \qquad \Omega = \text{SEZIONE CONDOTTA}$$

QUINDI

$$\left(\cancel{\rho Q} + \frac{\partial \rho Q}{\partial x}dx\right)\cancel{dt} - \cancel{\rho Q\,dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\overbrace{\Omega\,dx}^{\text{Vdute}}\cancel{dt}$$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial x}\cancel{dx} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Omega\,\cancel{dx} \qquad \text{con } Q = V \cdot \Omega$$

QUINDI:

$$\frac{\partial(\rho V \Omega)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} \qquad \text{con } \rho, V, \Omega \Rightarrow \text{VARIABILI}$$

ESPLICITIAMO LE DERIVATE:

TRASCURABILE RISPETTO A LA VARIAZIONE NELLO SPAZIO

$$\rho\Omega\frac{\partial V}{\partial x} + \cancel{\rho V\frac{\partial \Omega}{\partial x}} + V\cancel{\Omega\frac{\partial \rho}{\partial x}} = \frac{\rho\,\partial\Omega}{\partial t} + \Omega\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

TRASCURABILE RISPETTO A LA VARIAZIONE NELLO SPAZIO PER LA TIPOLOGIA DI IMPIANTO CONSIDERATO *

PER CUI SI HA:

$$\rho\Omega\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\rho\,\partial\Omega}{\partial t} + \frac{\Omega\,\partial\rho}{\partial t} \qquad \text{DIVIDIAMO PER } \rho\Omega$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

CON $\Omega$ E $\rho$ CHE VARIANO PERCHÉ VARIA LA PRESSIONE PER CUI POSSO SCRIVERE:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \text{RACCOGLIAMO IL } \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \text{modulo di elasticità a compressione cubica}$$

PER CUI:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{ESSENDO } h = z + \frac{p}{\gamma}$$

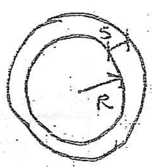
$$p = \gamma(h - z)$$

PER CUI SOSTITUENDO SI HA:

POSSIAMO CONSIDERARE LA DERIVATA TOTALE PERCHÉ LA SEZIONE $\Omega$ VARIA SOLO IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma\frac{\partial h}{\partial t}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dp} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

LA NOSTRA SEZIONE È UNA SEZIONE CIRCOLARE




PER CUI: $\Omega = \pi R^2$

$d\Omega = 2\pi R\, dR$

SOSTITUENDO SI HA:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t}\left(\frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{2\pi R\, dR}{dP} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h}{\partial t}\left(\frac{2}{R}\frac{dR}{dP} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

→ RAPPRESENTA COME VARIA IL RAGGIO QUANDO VARIA LA PRESSIONE

↳ QUESTA VOLTA SI DEVE TENERE CONTO

IN PRECEDENZA ABBIAMO DIMOSTRATO CHE LO SPESSORE $S = \frac{P\cdot D}{2\sigma} = \frac{PR}{\sigma}$ con $\frac{D}{2} = R$

PRESSIONE DI ESERCIZIO ($P$)

CARICO DI SICUREZZA A TRAZIONE ($\sigma$)

DEFINENDO L'ALLUNGAMENTO UNITARIO PER UN INCREMENTO DI PRESSIONE $dP$ COME: $d\delta = \frac{d\sigma}{E} = \frac{dP\cdot R}{S\cdot E}$ con $\sigma = \frac{PR}{S}$

modulo di elasticità ($E$)

QUINDI L'ALLUNGAMENTO EFFETTIVO:

$dR = R\cdot d\delta = \frac{dP\cdot R^2}{SE}$ SEPARIAMO LE VARIABILI:

$\frac{dR}{dP} = \frac{R^2}{SE}$ SOSTITUENDO SOPRA SI HA:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \gamma\frac{\partial h}{\partial t}\left(\frac{\overset{\to D}{2}}{\cancel{R}}\cdot\frac{R^{\cancel{2}}}{SE} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \gamma\frac{\partial h}{\partial t}\left(\frac{D}{SE} + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$ RICAVIAMO LA $\frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\frac{D}{SE} + \frac{1}{\varepsilon}}\right)$$ ESPLICITIAMO $\gamma = \rho g$ E RACCOGLIAMO $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{1}{\rho g}\left(\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{D\varepsilon}{SE} + 1\right)}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\varepsilon/\rho}{\underbrace{\frac{D\varepsilon}{SE} + 1}_{>1}}}_{a^2}$$

$c = \sqrt{\varepsilon/\rho} \cong 14.000\ m/s$ = CELERITÀ CON CUI SI PROPAGA UN'ONDA DI PRESSIONE

>1 QUINDI VA A DIMINUIRE C

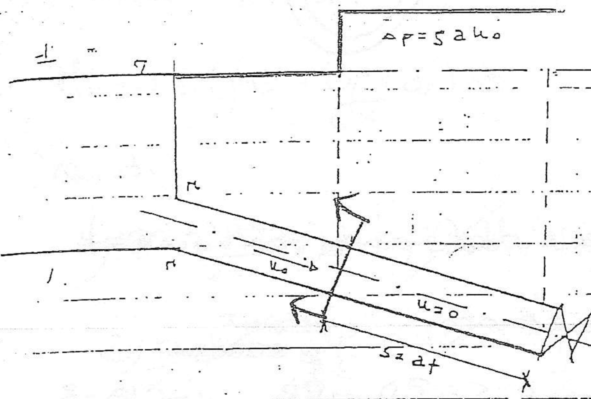
DEFINITA:

$$a = \frac{\sqrt{\varepsilon/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{D\varepsilon}{SE}}} \cong 1000\ m/s$$ VELOCITÀ CON CUI SI PROPAGANO IN UNA CONDOTTA DEFORMABILE LE ONDE DI PRESSIONE

PERTANTO:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{1}{g}a^2\dfrac{\partial V}{\partial x}} & \leftarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} & \leftarrow \text{EQUAZIONE DEL MOTO} \end{cases}$$

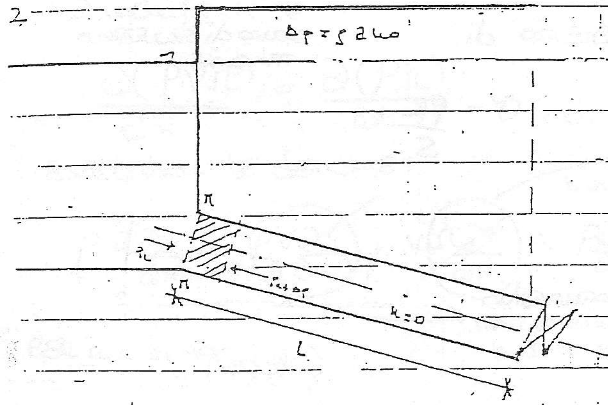
→ RICAVARE LA LEGGE DI VARIAZIONE DEL CARICO NEL TEMPO IN CORRISPONDENZA DI UNA DETERMINATA ASCISSA.




$0<t<\frac{L}{a}$

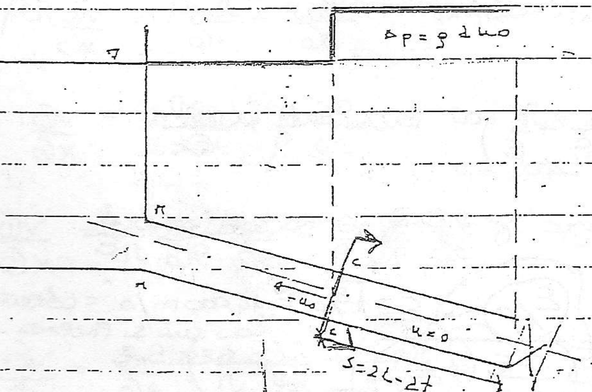
pertubazione nata all'otturatore diretta verso la sezione d'imbocco nn

PERTURBAZIONE POSITIVA ASCENDENTE




$t=\frac{L}{a}$

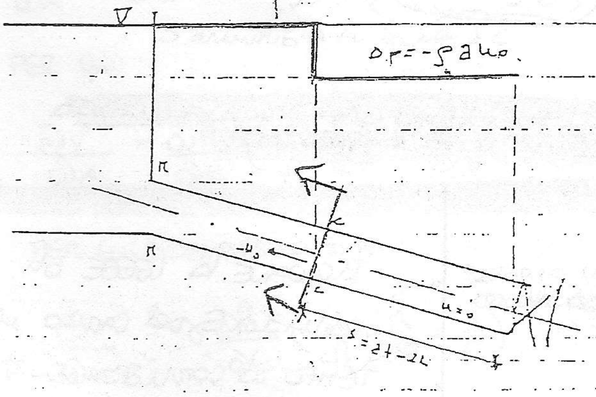
la pertubazione raggiunge la sezione d'imbocco nn - situazione di non equilibrio




$\frac{L}{a}<t<\frac{2L}{a}$

pertubazione diretta verso l'otturatore nel tronco compreso fra l'otturatore e la sezione cc deve ancora arrivare

PERTURBAZIONE POSITIVA DISCENDENTE

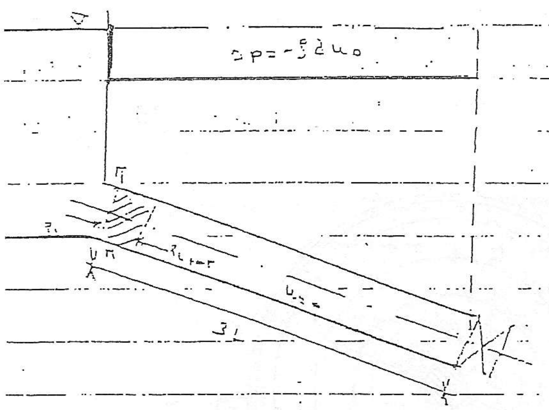



$\frac{2L}{a}<t<\frac{3L}{a}$

pertubazione diretta verso l'imbocco (stato di dilatazione)

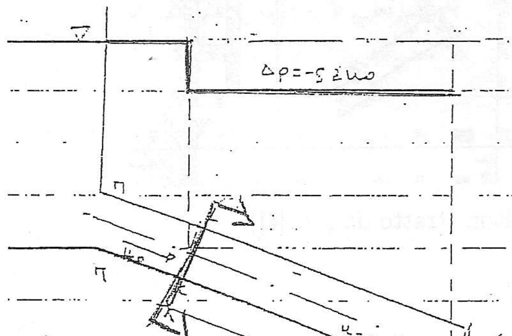
PERTURBAZIONE NEGATIVA ASCENDENTE

13




$$t = \frac{3L}{a}$$

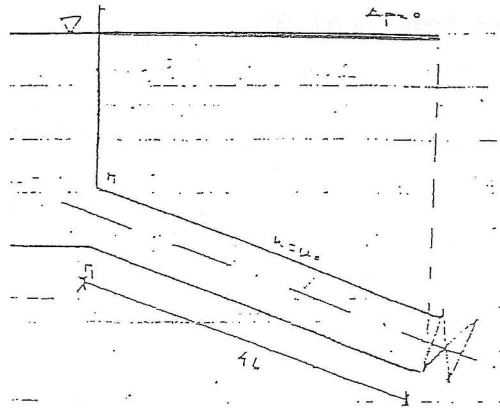
la pertubazione ha raggiunto l'imbocco, la massa liquida è tutta in quiete




$$\frac{3L}{a} < t < \frac{4L}{a}$$

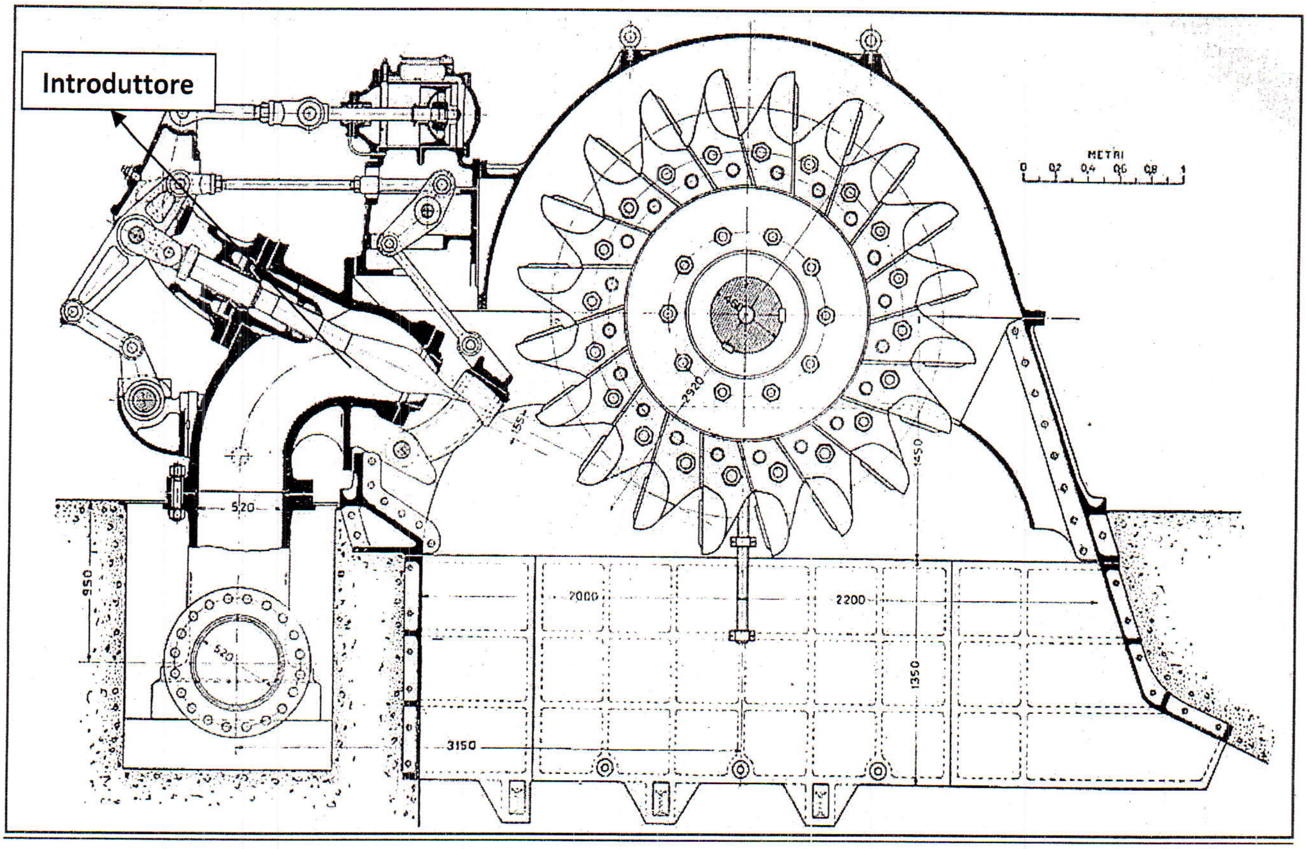
nasce una pertubazione discendente il cui passaggio riconduce la pressione ai valori di moto permanente

PERTURBAZIONE NEGATIVA DISCENDENTE




$$t = \frac{4L}{a}$$

la pertubazione del 6° esempio raggiunge l'otturatore
La colonna liquida viene a trovarsi esattamente nelle condizioni iniziali di moto permanente


Introduttore
METRI
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1
520
950
2000
2200
3150
1350
1450
2920
1155

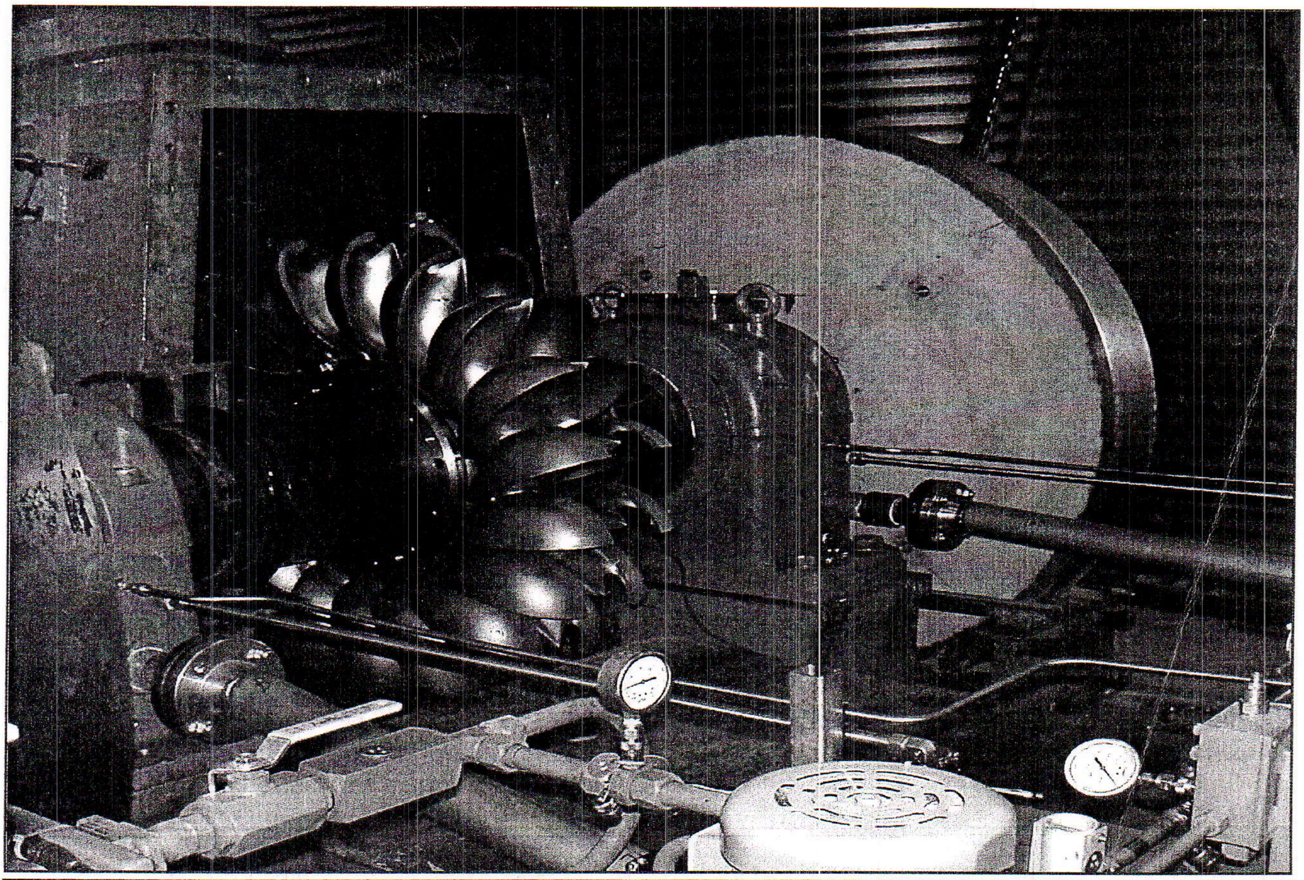


TABELLA 13.2. – *Coefficienti di scabrezza per le tubazioni.*

| *Tipo di condotta* | *Scabrezza omogenea equivalente* $\varepsilon$ (mm) | *Bazin* $\gamma_B$ ($m^{\frac{1}{2}}$) | *Kutter* $m_K$ ($m^{\frac{1}{2}}$) | *Gauckler-Strickler* $k_S$ ($m^{\frac{1}{3}} s^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 – Tubazioni tecnicamente lisce (vetro, ottone o rame trafilato, resina) | 0÷0,02 | — | — | — |
| 2 – Tubazioni in acciaio | | | | |
| *a*) rivestimenti degradabili nel tempo | | | | |
| – tubi nuovi, verniciati per centrifugazione | 0,05 | — | — | 120 |
| – bitumati per immersione | 0,10÷0,15 | ⩽ 0,06 | ⩽ 0,12 | 100 |
| – in servizio corrente con leggera ruggine | 0,2 ÷0,4 | 0,10 | 0,15 | 90 |
| – con asfalto o catrame applicati a mano | 0,5 ÷0,6 | 0,16 | 0,20÷0,25 | 85÷80 |
| – con tubercolizzazione diffusa | 1,0 ÷3,0 | 0,23 | 0,30÷0,35 | 75÷70 |
| *b*) rivestimenti non degradabili | | | | |
| – cemento applicato per centrifugazione | 0,05÷0,15 | ⩽ 0,06 | ⩽ 0,12 | 120 |
| 3 – Tubazioni in lamiera saldata | | | | |
| – in buone condizioni | 0,2 ÷0,3 | 0,10 | 0,15 | 90 |
| – in servizio corrente, con incrostazioni | 0,4 ÷1,0 | 0,16 | 0,20÷0,25 | 87÷75 |
| 4 – Tubazioni in lamiera chiodata | | | | |
| – 1 fila di chiodi longitudinali | 0,3 ÷0,4 | 0,10 | 0,18 | 90÷85 |
| – 2 file di chiodi longitudinali | 0,6 ÷0,7 | 0,16 | 0,25 | 85÷80 |
| – Idem, con incrostazioni fino a | 3,0 | 0,30 | 0,35 | 70 |
| – 4-6 file di chiodi longitudinali | 2,0 | 0,23 | 0,30 | 75 |
| – 6 file di chiodi longitudinali + 4 trasversali | 3,0 | 0,30 | 0,35 | 70 |
| – Idem, con incrostazioni fino a | 5,0 | 0,36 | 0,45 | 65 |
| 5 – Tubazioni in ghisa | | | | |
| *a*) rivestimenti degradabili nel tempo | | | | |
| – nuove, rivestite intern. con bitume | 0,15 | 0,06 | 0,12 | 100 |
| – nuove, non rivestite | 0,2 ÷0,4 | 0,10 | 0,15 | 90 |
| – con lievi incrostazioni | 0,4 ÷1,0 | 0,16 | 0,20÷0,25 | 85÷75 |
| – in servizio corrente, parzialmente arrugginite | 1,0 ÷2,0 | 0,23 | 0,35 | 75÷70 |
| – fortemente incrostate | 3,0 ÷5,0 | 0,36 | 0,45 | 65 |
| *b*) rivestimenti non degradabili | | | | |
| – cemento applicato per centrifugazione | 0,10 | ⩽ 0,06 | ⩽ 0,12 | 105 |
| 6 – Tubazioni in cemento | | | | |
| – cemento-amianto | 0,10 | ⩽ 0,06 | ⩽ 0,12 | 105 |
| – cem. arm. nuove, intonaco perfettamente liscio | 0,10÷0,15 | 0,06 | 0,12 | 100 |
| – cem. arm. con intonaco liscio, in servizio da più anni fino a | 2,0 | 0,23 | 0,35 | 70 |
| – gallerie con intonaco di cemento, a seconda del grado di finitura | 2,0 ÷5,0 | 0,23÷0,36 | 0,30÷0,45 | 70÷65 |

## LEZIONE N° 20 CONTINUAZIONE...

$$
\begin{cases}
(1)\quad \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \rightarrow \text{EQUAZIONE del MOTO} \\[2ex]
(2)\quad \dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{a^2}{g}\dfrac{\partial V}{\partial x} \rightarrow \text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ}
\end{cases}
$$

PICCOLE PORTATE E ALTE CADUTE

SIAMO IN MOTO VARIO, QUINDI IL CARICO VARIA LUNGO $x$ E LUNGO $t$, PER QUESTO ABBIAMO DOVUTO RICAVARE 2 EQUAZIONI IN 2 INCOGNITE; A QUESTO PUNTO DIVIDIAMO AMBO I MEMBRI DELLA (1) PER $\partial x$ E QUELLI DELLA (2) PER $\partial t$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \dfrac{a^2}{g}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial x}
\end{cases}
$$

CON $a$ = CELERITÀ DELLA PERTURBAZIONE

RICAVIAMO LA $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}$ E UGUAGLIAMO I SECONDI MEMBRI:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} = g\,\dfrac{\partial^2 h}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} = \dfrac{g}{a^2}\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}
\end{cases}
\Longrightarrow \cancel{g}\,\dfrac{\partial^2 h}{\partial x} = \dfrac{\cancel{g}}{a^2}\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}
$$

$\Leftarrow$ EQ. DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE DI CUI È NOTA LA SOLUZIONE

SOLUZIONE: $\Delta h = h - \overset{\text{CARICO INIZIALE DI MOTO PERMANENTE}}{h_0} = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ $\Leftarrow$ EQUAZIONE DELLE ONDE VIBRANTI

CARICO IN UN $t$ GENERICO

DERIVANDO LA SOLUZIONE RISPETTO ALLO SPAZIO $(x)$ SI HA:

$$ ^{*}\ \frac{\partial h}{\partial x} = F'\left(-\frac{1}{a}\right) - f'\left(\frac{1}{a}\right) = -(F' + f')\left(\frac{1}{a}\right) $$

* $h_0$ = cost, la sua derivata è nulla, resta solo $h$.

SOSTITUENDO QUESTA ESPRESSIONE NELLA (1)

$$ -(F' + f')\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} $$

OVVERO:

$$ \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{g}{a}(F' + f') $$

$\Leftarrow$ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL I ORDINE

INTEGRANDOLA SI OTTIENE LA SOLUZIONE PER LA VELOCITÀ:

VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ IN MOTO A VARIO

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{-g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)\right]$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE GENERALE PER LA VELOCITÀ

$V_0$: VELOCITÀ INIZIALE DI MOTO PERMANENTE

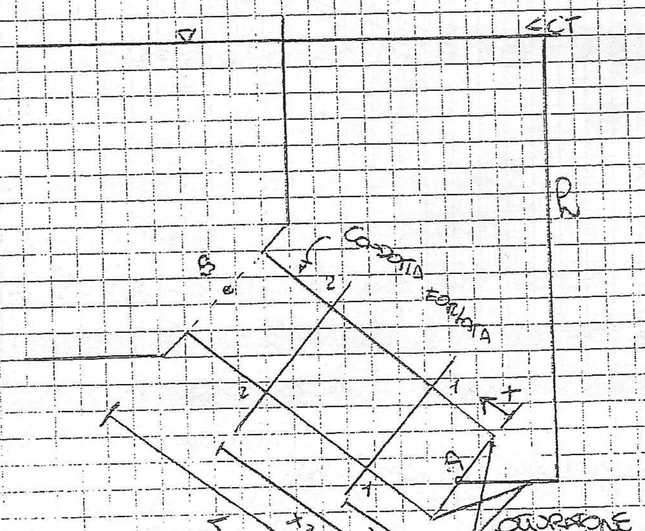
$$\Delta h = h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE GENERALE PER IL CARICO.

QUESTE DUE RELAZIONI, UNA VOLTA DEFINITE LE CONDIZIONI AL CONTORNO FORNISCONO RISPETTIVAMENTE L'ANDAMENTO NEL TEMPO DELLA VELOCITÀ IN UNA DETERMINATA SEZIONE $x$, E L'ANDAMENTO DEL CARICO $h$ NEL TEMPO IN UNA CERTA SEZIONE $x$

VEDIAMO COSA SONO LE DUE FUNZIONI $f$, $F$,

CONSIDERIAMO UN SERBATOIO A LIVELLO COSTANTE, UNA CONDOTTA FORZATA NELLA CUI SEZIONE DI SBOCCO VI È UN OTTURATORE ATTRAVERSO IL QUALE È POSSIBILE REGOLARE LA PORTATA E QUINDI ESEGUIRE UNA MANOVRA DI CHIUSURA.




PER $t < 0$ SIAMO IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE CON $h = h_0$, $V = V_0$ QUINDI $f = F = 0$

INIZIAMO A CONTARE I TEMPI DALL'ISTANTE DI TEMPO $t = 0$ OVVERO DA QUANDO CHIUDIAMO LA VALVOLA DELL'OTTURATORE.

CONSIDERIAMO DUE SEZIONI: LA SEZIONE 1-1 CHE DISTA $x_1$ DALL'OTTURATORE E UNA SEZIONE 2-2 CHE DISTA UNA ASCISSA PARI A $x_2$ DALL'OTTURATORE,

ASSOCIAMO ALL'ASCISSA $x_1$ UN TEMPO $t_1$ E ALL'ASCISSA $x_2$ UN TEMPO $t_2$

$x_1 \longrightarrow t_1$

$x_2 \longrightarrow t_2$

PRENDIAMO IN ESAME LA FUNZIONE $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ PER CUI:

$x_1, t_1 \longrightarrow F\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right)$

$x_2, t_2 \longrightarrow F\left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right)$

F è una perturbazione e affinché questa perturbazione assuma lo stesso valore nella sezione 1-1 e nella sezione 2-2 l'argomento di F deve essere lo stesso, per cui:

$$\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = \left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right)$$ separiamo le variabili

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{a}$$ → quantità >0 perché $x_2 > x_1$

quantità >0 ovvero $t_2 > t_1$

Poiché $x_2 > x_1$ il secondo membro è una quantità positiva e quindi lo sarà anche il primo membro ovvero $t_2$ sarà maggiore di $t_1$ per cui la F è una perturbazione che nasce quando eseguiamo la manovra di chiusura (per cui nasce nella sezione di sbocco, nell'otturatore) e si propaga dall'otturatore verso l'imbocco con una celerità pari ad a, assumendo lo stesso valore in tutte le sezioni; se $t_2 > t_1$ la perturbazione toccherà prima la sezione 1-1 e poi la sezione 2-2 per cui la F è un'onda che trasla (ascendente)

Prendiamo, adesso, in esame la $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ e facciamo lo stesso ragionamento:

$$x_1, t_1 \longrightarrow f\left(t_1 + \frac{x_1}{a}\right)$$

$$x_2, t_2 \longrightarrow f\left(t_2 + \frac{x_2}{a}\right)$$

Anche la f è una perturbazione per cui affinché assuma lo stesso valore nelle due sezioni i suoi argomenti devono essere uguali:

$$t_1 + \frac{x_1}{a} = t_2 + \frac{x_2}{a}$$ separiamo le variabili

$$t_1 - t_2 = \frac{x_2 - x_1}{a}$$ → >0 perché $x_2 > x_1$ perché contiamo le ascisse dall'otturatore

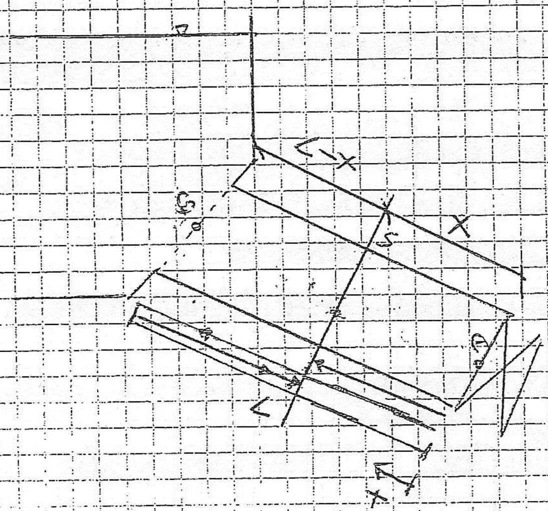
>0 per cui $t_1 > t_2$

Il secondo membro è positivo quindi lo sarà anche il primo, ma si ricava $t_1 > t_2$ per cui la perturbazione f tocca prima la sezione 2-2 della sezione 1-1 ovvero la f è una perturbazione che si propaga dall'imbocco verso l'otturatore e assume lo stesso valore nelle varie sezioni (discendente)

RIASSUMENDO LA $f$ E $F$ SONO DUE ONDE (PERTURBAZIONI) CON DIREZIONI DIFFERENTI CHE NASCONO NEL MOMENTO IN CUI EFFETTUIAMO UNA MANOVRA DI CHIUSURA LE CUI CARATTERISTICHE SONO GIÀ STATE DESCRITTE DURANTE LA TRATTAZIONE QUALITATIVA DEL COLPO D'ARIETE

FASE DI COLPO DIRETTO E FASE DI CONTRACCOLPO

CONSIDERIAMO SEMPRE IL SERBATOIO A LIVELLO COSTANTE, UNA CONDOTTA FORZATA E UN OTTURATORE PER AMMETTERE IL FLUSSO DELL'ACQUA. PRENDIAMO IN ESAME UNA GENERICA SEZIONE S CHE DISTA DALL'OTTURATORE DI UNA ASCISSA x (CONTIAMO LE x DALL'OTTURATORE), PER CUI LA DISTANZA TRA S E LA SEZIONE DI IMBOCCO È PARI A $L-x$.




QUANDO CHIUDIAMO L'OTTURATORE NASCE LA PERTURBAZIONE F CHE SI PROPAGA CON UNA CELERITÀ PARI AD $a$ DALL'OTTURATORE VERSO L'IMBOCCO. PRIMA CHE LA F RAGGIUNGA LA SEZIONE S È NECESSARIO UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO, QUINDI PER UN INTERVALLO DI TEMPO $0 < t < \frac{x}{a}$ IN S NON SUCCEDE NIENTE QUINDI SIAMO IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE. PER UN ISTANTE DI TEMPO $t = \frac{x}{a}$ ← DISTANZA OTTURATORE / CELERITÀ SEZIONE S
LA PERTURBAZIONE ARRIVA NELLA SEZIONE S.

DOPO UN TEMPO PARI A $t = \frac{L}{a}$ LA F ARRIVA ALL'IMBOCCO E NASCERÀ IN B UNA PERTURBAZIONE $f$ CHE SI PROPAGHERÀ VERSO L'OTTURATORE, PER CUI IN UN TEMPO PARI A:

?

$$\underbrace{\frac{L}{a}}_{\text{LA F ARRIVA IN B}} + \underbrace{\frac{L-x}{a}}_{\text{TEMPO NECESSARIO PER ARRIVARE DA B A S}} = \frac{2L-x}{a} \Rightarrow \text{IN S SI SENTIRANNO GLI EFFETTI DI } f \text{ E DI } F$$

SE: $\frac{2L-x}{a} - \underbrace{\frac{x}{a}}_{\text{TEMPO NECESSARIO AFFINCHÉ F ARRIVI IN S}} = \left[ \frac{2(L-x)}{a} \right]$ ← UN INFINITESIMO PRIMA

O MEGLIO PER:

- $\frac{x}{a} < t < \frac{2(L-x)}{a}$ → IN S RISENTIAMO SOLTANTO DELL'EFFETTO DELLA F
- $t > \frac{2(L-x)}{a}$ → RISENTIAMO L'EFFETTO DELLA $f$ E DELLA F

• $0 < t < \frac{x}{a}$ ⟶ CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE

QUINDI, RIORDINANDO LE IDEE:

PER:

* $\underbrace{\frac{L-x}{a} + \frac{L-x}{a}}_{\text{ANDATA E RITORNO DA S A B}} = 2\left(\frac{L-x}{a}\right)$

$\frac{x}{a} < t < \frac{2L-x}{a}$ → $F$ → FASE DI COLPO DIRETTO

⟹

* $\underset{\text{DA A A B}}{\frac{L}{a}} + \underset{\text{DA B A S}}{\frac{L-x}{a}} = \frac{2L-x}{a}$ ← SOLO LA $F+f$

$t > \frac{2L-x}{a}$ ⟶ $F+f$ → FASE DI CONTRACCOLPO

N.B.: I TEMPI SONO CONTATI DALL'ISTANTE $t=0$ OVVERO QUANDO CHIUDO L'OTTURATORE

COLPO DIRETTO → È LA SITUAZIONE PIÙ GRAVOSA PER LA NOSTRA SEZIONE ANCHE SE È PIÙ FACILE DA STUDIARE PERCHÉ BISOGNA CONSIDERARE SOLO IL CONTRIBUTO DELLA $F$.

RIPRENDIAMO L'EQUAZIONE GENERALE DEL CARICO E L'EQUAZIONE GENERALE DELLA VELOCITÀ:

LA $f$ ANCORA NON C'È!

① $h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - \cancel{f\left(t + \frac{x}{a}\right)}^{0}$

② $V - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + \cancel{f\left(t + \frac{x}{a}\right)}^{0}\right]$

DALLA ② RICAVIAMO:

CAMBIO DI SEGNO

$$F\left(t - \frac{x}{a}\right) = -\frac{a}{g}(V - V_0) = \frac{a}{g}(V_0 - V)$$

SOSTITUENDO NELLA ①:

$$\underbrace{h - h_0}_{\text{SOVRACCARICO = VARIAZIONE DEL CARICO}} = \frac{a}{g}(V_0 - V)$$

MA ESSENDO $a$ - CELERITÀ DELLA PERTURBAZIONE ≅ 1000 m/s

$g$ = ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ ≅ 10 m/s²

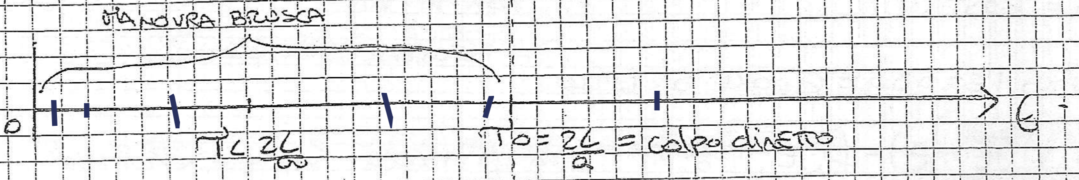
SOSTITUENDO SI HA:

$$h - h_0 = 100\,(V_0 - V)$$

QUESTO VUOL DIRE CHE IN FASE DI COLPO DIRETTO LA PERDITA DI CARICO (IL SOVRACCARICO) È PARI A 100 VOLTE LA VELOCITÀ PERDUTA, QUESTO IN una generica sezione $x = s$ della condotta forzata. Ragioniamo adesso nell'otturatore cioè in $x = 0$ (sempre nella fase di colpo diretto), e vediamo quanto dura la fase di colpo diretto: dura un tempo

in infinitesimo prima perché $T = \frac{2L}{a}$ arriva pure la $f$

$$\boxed{T_0 = \frac{2L}{a}}^{\ominus} \text{ durata di fase del colpo d'ariete}$$




Iniziamo la manovra di chiusura in $t = 0$ e fino a $T_0$ siamo in fase di colpo diretto; immaginiamo di chiudere in un tempo $T < \frac{2L}{a}$ cioè bloccheremo il flusso dell'acqua per cui la portata $Q = 0$ e la velocità $V = 0$

Quindi

NB siamo sempre in fase di colpo diretto

$$\Delta h = h - h_0 = \frac{a}{g}(V_0 - \cancel{V}^{\,0})$$

divido tutto per $\gamma$ e ottengo $\rho = 1000\ kg/m^3$

$$\boxed{\Delta p = \rho a V_0}$$ ← già ricavata dal teorema degli impulsi

Questo vuol dire che tutte le manovre di chiusura che avvengono per un tempo $T$ minore del tempo di fase $[\text{cioè } T < (T_0 = \frac{2L}{a})]$ sono tutte manovre che per quanto riguarda gli effetti sono equivalenti tra di loro, cioè vengono chiamate manovre brusche cioè sono equivalenti ad una manovra di chiusura istantanea; per cui si ha che la variazione massima del carico

$$\boxed{\Delta h_{max} = h - h_0 = \frac{a V_0}{g} \rightarrow \Delta p_{max} = \rho a V_0}$$

Quindi i massimi sovraccarichi si hanno in fase di colpo diretto e per manovre di chiusura brusche, basta quindi questa formula per il dimensionamento statico della condotta forzata.

Ma $\rho = 1000\ kg/m^3$, $a = 1000\ m/s$, moltiplicati per $V_0$ nascono delle sovrapressioni enormi! Quindi per il dimensionamento statico si utilizza la massima sovrapressione che potrebbe nascere all'interno della condotta; per cui le situazioni più gravose si hanno per manovre brusche e in fase di colpo diretto.

CONTRACCOLPO → MENO GRAVOSO MA PIÙ DIFFICILE DA TRATTARE PERCHÉ BISOGNA CONSIDERARE SIA LA F CHE LA f.

SUPPONIAMO DI TROVARCI IN B, ALL'IMBOCCO ($x = L$): IL CARICO IN B È COSTANTE PERCHÉ ABBIAMO SUPPOSTO CHE IL LIVELLO DEL SERBATOIO NON VARI, QUINDI:

$$h = h_0 = cost \qquad \text{con } h = h_B$$

LA PRESSIONE IN B NON VARIA

RIPRENDIAMO L'EQUAZIONE GLOBALE DEL CARICO:

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

MA ALL'IMBOCCO $h = h_0 \Rightarrow h - h_0 = 0$ E $x = L$

SOSTITUENDO

$$0 = F\left(t - \frac{L}{a}\right) - f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

QUINDI

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) = f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

QUESTO CI DICE CHE ALL'IMBOCCO F e f HANNO LO STESSO VALORE ($F = f$); IN PRATICA LA PERTURBAZIONE ALL'IMBOCCO VIENE RIFLESSA (È LA STESSA ONDA)

SPOSTIAMO AD AMBO I MEMBRI UN TEMPO $t = \frac{L}{a}$.

$$F\left(t - \cancel{\frac{L}{a}} + \cancel{\frac{L}{a}}\right) = f\left(t + \frac{L}{a} + \frac{L}{a}\right)$$

$$F(t) = f\left(t + \frac{2L}{a}\right) \qquad \text{OPPURE} \qquad f(t) = F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$$

$x = 0$ QUINDI CI TROVIAMO ALL'OTTURATORE

QUESTO CI DICE CHE ALL'OTTURATORE LE DUE FUNZIONI f ED F HANNO LO STESSO VALORE MA SONO SFASATE DI UN TEMPO PARI A $\frac{2L}{a}$; RIASSUMENDO LE 2 FUNZIONI SONO IN FASE ALL'IMBOCCO E SFASATE ALL'OTTURATORE. LA f È SFASATA IN RITARDO RISPETTO ALLA F E LA F È SFASATA IN ANTICIPO RISPETTO ALLA f DI $\frac{2L}{a}$.

ALL'OTTURATORE $x = 0$

QUINDI IN $x = 0$ CON $f(t) = F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$

$$h - h_0 = F\left(t - \cancel{\frac{x}{a}}^{\,0}\right) - f\left(t + \cancel{\frac{x}{a}}^{\,0}\right)$$

$$V - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F\left(t - \cancel{\frac{x}{a}}\right) + f\left(t + \cancel{\frac{x}{a}}\right)\right]$$

SOSTITUENDO IL VALORE DELLA $f(t)$ NELL'ASCISSA $x = 0$ SI HA:

$$\begin{cases} h_1 - h_0 = F(t) - F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \\ V_1 - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F(t) + F\left(t - \frac{2L}{a}\right)\right] \end{cases}$$

(così lavoriamo solo sulla F)

QUESTE SONO DELLE FUNZIONI CHE VARIANO NEL TEMPO QUINDI DOBBIAMO CONSIDERARLE PER TEMPI DIVERSI:

① $t_1 \le \frac{2L}{a}$ ⟶ TEMPO ALL'INTERNO DELLA I FASE

② $t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}$ ⟶ TEMPO ALL'INTERNO DELLA II FASE

③ $t_3 = t_2 + \frac{2L}{a}$ ⟶ TEMPO ALL'INTERNO DELLA III FASE

④ $t_4 = t_3 + \frac{2L}{a}$ ⟶ TEMPO ALL'INTERNO DELLA IV FASE

($\frac{2L}{a}$ = FASE OVVERO TEMPO NECESSARIO AFFINCHÉ LA PERTURBAZIONE TORNI AL PUNTO DI PARTENZA)

① $t_1 < \frac{2L}{a}$ (I FASE)

$$\begin{cases} h_1 - h_0 = F(t_1) - \cancel{F\left(t_1 - \frac{2L}{a}\right)} \\ V_1 - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F(t_1)\right] \end{cases}$$

0 PERCHÉ RAPPRESENTA IL VALORE DELLA $f$ CHE ALL'OTTURATORE IN $t_1 < \frac{2L}{a}$ È NULLO.

SIAMO IN FASE DI COLPO DIRETTO

② $t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}$ (II FASE) ← SIAMO ALL'OTTURATORE MA SIAMO GIÀ IN FASE DI CONTRACCOLPO PERCHÉ RISENTIAMO DELLA $f$.

$$\begin{cases} h_2 - h_0 = F(t_2) - F\left(t_2 - \frac{2L}{a}\right) = F(t_2) - F\left(t_1 + \cancel{\frac{2L}{a}} - \cancel{\frac{2L}{a}}\right) = F(t_2) - F(t_1) \\ V_2 - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F(t_2) + F(t_1)\right] \end{cases}$$

← DA QUI SI VEDE CHE $F$ E $f$ SONO SFASATE DI $\frac{2L}{a}$

③ $t_3 = t_2 + \frac{2L}{a}$ (III FASE)

$$\begin{cases} h_3 - h_0 = F(t_3) - F(t_2) \\ V_3 - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F(t_3) + F(t_2)\right] \end{cases}$$

④ $t_4 = t_3 + \frac{2L}{a}$ (IV FASE)

$$\begin{cases} h_4 - h_0 = F(t_4) - F(t_3) \\ V_4 - V_0 = \frac{-g}{a}\left[F(t_4) + F(t_3)\right] \end{cases}$$

PER CUI IN UN TEMPO:

$t_m = t_{m-1} + \frac{2L}{a}$ SI HA:

$$\begin{cases} h_m - h_0 = F(t_m) - F(t_{m-1}) \\ V_m - V_0 = -\frac{g}{a}\left[F(t_m) + F(t_{m-1})\right] \end{cases}$$

ADESSO DAL PRIMO SISTEMA ① PER $t_1 \leq \frac{2L}{a}$ CALCOLIAMO DALLA SECONDA EQUAZIONE LA $F(t_1)$ E SOSTITUIAMOLA NELLA PRIMA EQUAZIONE:

$$F(t_1) = \frac{a}{g}(V_0 - V_1)$$

$$\boxed{h_1 - h_0 = \frac{a}{g}(V_0 - V_1)} \rightarrow$$ LEGAME TRA $\Delta h$ E $\Delta V$ IN FASE di colpo diretto

PER LA FASE di CONTRACCOLPO, SOMMIAMO TRA LORO LE EQUAZIONI DEL CARICO del SISTEMA ② E ③ E SOTTRAIAMO LE EQUAZIONI DELLE VELOCITÀ DAGLI STESSI SISTEMI:

$$\begin{cases} h_3 + h_2 - 2h_0 = F(t_3) - F(t_1) \\ V_2 - V_3 = -\frac{g}{a}\left[F(t_1) - F(t_3)\right] = \frac{g}{a}\left[F(t_3) - F(t_1)\right] \end{cases}$$

← LA $F(t_2)$ SI SEMPLIFICA

LA $V_0$ SI SEMPLIFICA

RICAVIAMO DALL'ULTIMA:

$$F(t_3) - F(t_1) = \frac{a}{g}(V_2 - V_3)$$

SOSTITUIAMO NELLA PRIMA:

$$h_3 + h_2 - 2h_0 = \frac{a}{g}(V_2 - V_3)$$ DIVIDIAMO TUTTO PER $h_0$

$$\frac{h_3}{h_0} + \frac{h_2}{h_0} - 2 = \frac{a}{g h_0}(V_2 - V_3)$$ DIVIDO E MOLTIPLICO IL SECONDO MEMBRO PER $V_0$

$$\frac{h_3}{h_0} + \frac{h_2}{h_0} - 2 = \frac{a V_0}{g h_0}\left(\frac{V_2}{V_0} - \frac{V_3}{V_0}\right)$$

IN GENERALE SI HA:

$$\boxed{\frac{h_{i+1}}{h_0} + \frac{h_i}{h_0} - 2 = \frac{a V_0}{g h_0}\left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0}\right)} \rightarrow$$ LEGAME TRA $h$ E $V$ IN FASE di CONTRACCOLPO

IN FORMA COMPATTA, PONENDO: 

$$z_{i+1} = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}}$$

$$z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$$

POSSO SCRIVERE: moltiplico e divido per 2

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = \frac{2a\,V_0}{2g\,h_0}\left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0}\right)$$

PONENDO: $\frac{a\,V_0}{2g\,h_0} = \sigma$ = PARAMETRO di ALLIEVI O PARAMETRO CARATTERISTICO DELLA PERTURBAZIONE

PER CUI SOSTITUENDO SI OTTIENE:

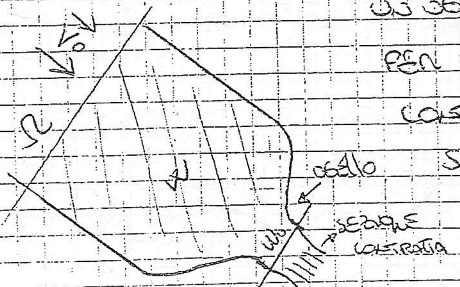
$$\boxed{z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2\sigma\left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0}\right)}$$

NON È FINITA QUI PERCHÉ ABBIAMO TROVATO COME VARIA IL CARICO IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ, MA A NOI INTERESSA SAPERE COME VARIA NEL TEMPO IN FUNZIONE DEL GRADO DI APERTURA DELL'OTTURATORE

## LEZIONE N° 21 CONTINUAZIONE

LO SCOPO È DETERMINARE IL SOVRACCARICO $h_i$ CHE VARIA NEL TEMPO ALLA GENERICA FASE, CON UNA $V_i$ VELOCITÀ DI MOTO VARIO (QUANDO CHIUDO LA VALVOLA IL CARICO CHE SI AVEVA IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE AUMENTA (SOVRACCARICO))

CONSIDERIAMO LA SEZIONE TERMINALE DELLA CONDOTTA FORZATA DOVE SI TROVA UN OCCHIO DOVE LA VELOCITÀ AUMENTA ENORMEMENTE PER CUI IL FLUIDO VIENE LETTERALMENTE SPARATO CONTRO LE PALE DELLA TURBINA PER CUI SI HA UNA SPINTA DINAMICA CHE FA RUOTARE LA RUOTA DELLA TURBINA PRODUCENDO ENERGIA ELETTRICA; PER CUI SI PASSA DA UNA SEZIONE $\Omega$ A UNA




SEZIONE $\omega_0$ QUANDO LA SEZIONE DI SBOCCO È TUTTA APERTA. IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE TRANSITERÀ UN FLUIDO CON VELOCITÀ $V_0$ (VELOCITÀ DI MOTO PERMANENTE); IN TALI CONDIZIONI CONDIZIONI VALE L'EQUAZIONE DI

CONTINUITÀ PER CUI LA PORTATA CHE TRANSITA NELLA SEZIONE $\Omega$ È PARI A QUELLA CHE TRANSITA ATTRAVERSO LA SEZIONE $\omega_0$.

$$V_0 \Omega = \underbrace{\underbrace{\mu \omega_0}_{A} \underbrace{\sqrt{2 g h_0}}_{V}}_{\text{Portata di efflusso}} \quad (1)$$

DEVO METTERMI NELLA SEZIONE CONTRATTA PER POTERE APPLICARE BERNOULLI

NEL MOMENTO IN CUI ANDIAMO A REGOLARE LA PORTATA LA SEZIONE DI SBOCCO SI RIDUCE ATTRAVERSO UN OTTURATORE, PASSANDO DA UNA SEZIONE $\omega_0$ A UNA SEZIONE $\omega$; NON SIAMO PIÙ IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE MA IN CONDIZIONI DI MOTO VARIO PERCIÒ LA $V_0$ PASSERÀ AD UN VALORE $V$ E IL CARICO ALL'OTTURATORE NON SARÀ PIÙ $h_0$ MA $h$; NEL CASO DI MOTO PERMANENTE ABBIAMO CONSIDERATO UN BILANCIO DI PORTATA, NEL MOTO VARIO NON POSSO CONSIDERARE UN BILANCIO DI PORTATA, MA DEVO PARLARE DI UN BILANCIO DI MASSA A CAUSA DELLA COMPRIMIBILITÀ DEL FLUIDO; CIÒ NONOSTANTE, CONSIDERANDOLI (W) COME MOLTO PICCOLO È POSSIBILE TRASCURARE LA COMPRIMIBILITÀ DEL FLUIDO E QUINDI POSSIAMO SCRIVERE (ANCHE NEL CASO DI MOTO VARIO):

$$V \Omega = \underset{\text{coeff. efflusso}}{\mu} \omega \sqrt{2 g h} \quad (2)$$

← QUESTA RELAZIONE HA UN MARGINE DI ERRORE MOLTO PICCOLO ESSENDO W MOLTO PICCOLO.

FACCIAMO IL RAPPORTO TRA LA (2) E LA (1):

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_0}}$$

PER CUI AL TEMPO $t_i$ SI AVRÀ:

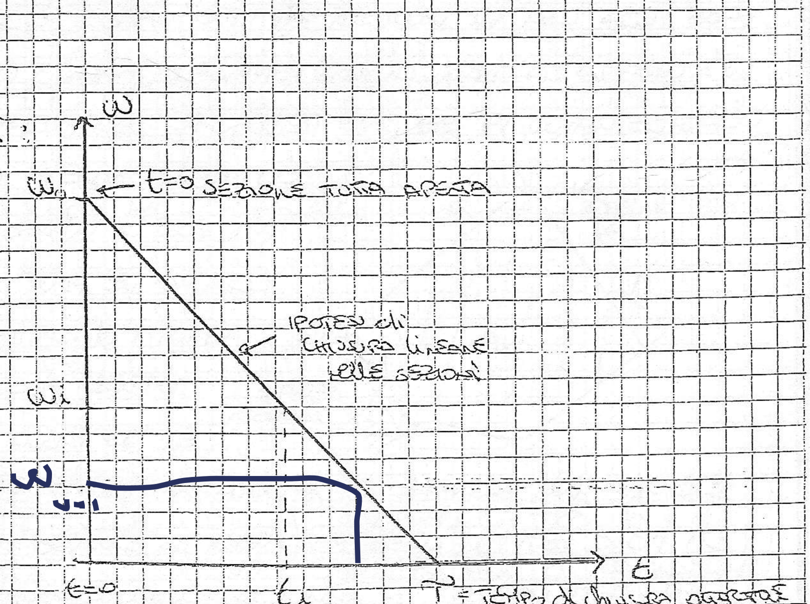
$$\frac{V_i}{V_0} = \frac{\omega_i}{\omega_0} \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$$

E AL TEMPO $t_{i+1}$ SI AVRÀ:

$$\frac{V_{i+1}}{V_0} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_0} \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}}$$

CHE COS'È $\omega_i$?

DIAGRAMMA DI CHIUSURA OTTURATORE ⟹




· $\omega_i$ È L'APERTURA CHE SI HA AL TEMPO $t_i$.

RIPRENDENDO L'ESPRESSIONE RICAVATA IN PRECEDENZA:

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2\sigma\left(\frac{V_i}{V_0} - \frac{V_{i+1}}{V_0}\right)$$

E SOSTITUENDO SI HA:

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2\sigma\left[\frac{\omega_i}{\omega_0}\sqrt{\frac{h_i}{h_0}} - \frac{\omega_{i+1}}{\omega_0}\sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}}\right]$$

RICORDANDO CHE:

$$z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}} \quad E \quad z_{i+1} = \sqrt{\frac{h_{i+1}}{h_0}}$$

E DEFINENDO:

$\eta$ = GRADO DI APERTURA SEZIONE DI EFFLUSSO $\quad \eta_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$, $\eta_{i+1} = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_0}$

SI OTTIENE IN FORMA COMPATTA:

$$\boxed{z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2\sigma\left(\eta_i z_i - \eta_{i+1} z_{i+1}\right)} \Rightarrow \text{EQUAZIONE DI ALLIEVI - MICHAUD}$$

RAPPRESENTA LA GENERICA EQUAZIONE CONCATENATA PER LO STUDIO DEL COLPO D'ARIETE.

QUESTA EQUAZIONE È VALIDA ALL'OTTURATORE!

DOMANDA: PERCHÉ SI CHIAMA CONCATENATA?

CALCOLIAMO QUESTA ESPRESSIONE PER DIVERSI ISTANTI DI TEMPO PER FASI INTERE OVVERO AD OGNI TEMPO SUCCESSIVO SOMMIAMO UNA FASE.

① $t_1 \leq \frac{2L}{a} \rightarrow i=0 \qquad$ CON $\frac{2L}{a}$ = TEMPO DI FASE

② $t_2 = t_1 + \frac{2L}{a} \rightarrow i=1$

③ $t_3 = t_2 + \frac{2L}{a} \rightarrow i=2$

④ $t_m = t_{m-1} + \frac{2L}{a} \rightarrow i=m$

CON
$$\begin{cases} z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}} \\ z_0 = \sqrt{\frac{h_0}{h_0}} = 1 \\ \eta_i = \frac{\omega_i}{\omega_0} \\ \eta_0 = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1 \end{cases}$$

① $t_1 = \frac{2L}{a}$ con $i=0$

$$z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2\sigma\left(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1\right)$$

$$z_1^2 + 1 - 2 = 2\sigma\left(1 - \eta_1 z_1\right)$$

② $t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}$ con $i=1$

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2\sigma\left(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2\right)$$

* SONO EQUAZIONI DI 2° GRADO CHE HANNO DUE SOLUZIONI: UNA POSITIVA E UNA NEGATIVA MA SOLO QUELLA POSITIVA È ACCETTABILE.

③ $t_3 = t_2 + \frac{2L}{a}$ con $i=2$

$$z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2\sigma\left(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3\right)$$

④ $t_m = t_{m-1} + \frac{2L}{a}$ con $i=m$

$$z_m^2 + z_{m-1}^2 - 2 = 2\sigma\left(\eta_{m-1} z_{m-1} - \eta_m z_m\right)$$

ABBIAMO SCRITTO $m$ EQUAZIONI QUANTI SONO GLI INTERVALLI DI TEMPO NECESSARI PER CALCOLARE IL SOVRACCARICO;

__RISPOSTA__: SI CHIAMA CONCATENATA PERCHÉ DALLA ① CALCOLO LA $z_1$ E LA SOSTITUISCO NELLA ② DALLA QUALE MI CALCOLO $z_2$ CHE A SUA VOLTA VA SOSTITUITA NELLA ③ PER IL CALCOLO DI $z_3$ E COSÌ VIA... FINO A $z_m$.

PER CUI È POSSIBILE RICAVARE IL SOVRACCARICO ALL'OTTURATORE PER TEMPI SFASATI DI $\frac{2L}{a}$, QST EQUAZ SI PUÒ APPLICARE ANCHE PER $\frac{1}{2}$ FASE O $\frac{1}{4}$ FASE ECC.

* VEDIAMO COSA SUCCEDE QUANDO L'OTTURATORE È COMPLETAMENTE CHIUSO CIOÈ $Q=0$, CIOÈ AL TEMPO $T=t_m$; SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DI ALLIEVI PER I DUE TEMPI SUCCESSIVI:

$\frac{\omega}{\omega_0} = 0$

⑤ $t_{m+1} = t_m + \frac{2L}{a} \longrightarrow z_{m+1}^2 + z_m^2 - 2 = 2\sigma\left(\cancelto{0}{\eta_m} z_m - \cancelto{0}{\eta_{m+1}} z_{m+1}\right)$

$\eta = 0 \rightarrow$ È COMPLETAMENTE CHIUSO L'OTTURATORE

⑥ $t_{m+2} = t_{m+1} + \frac{2L}{a} \longrightarrow z_{m+2}^2 + z_{m+1}^2 - 2 = 2\sigma\left(\eta_{m+1} z_{m+1} - \cancelto{0}{\eta_{m+2}} z_{m+2}\right)$

PER CUI:

$$\begin{cases} z_{m+1}^2 + z_m^2 - 2 = 0 \\ z_{m+2}^2 + z_{m+1}^2 - 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad z_m^2 = \frac{h_m}{h_0} \qquad z_{m+1}^2 = \frac{h_{m+1}}{h_0} \qquad z_{m+2}^2 = \frac{h_{m+2}}{h_0}$$

SOSTITUENDO

$$\begin{cases} \frac{h_{m+1}}{h_0} + \frac{h_m}{h_0} - 2 = 0 \\ \frac{h_{m+2}}{h_0} + \frac{h_{m+1}}{h_0} - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_{m+1} + h_m = 2h_0 = h_0 + h_0 \\ h_{m+2} + h_{m+1} = 2h_0 = h_0 + h_0 \end{cases}$$

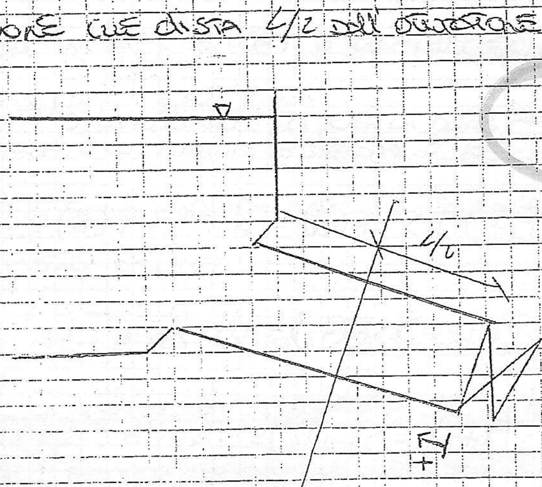
CHE POSSIAMO ANCHE SCRIVERE: al tempo $t_m$ chiudiamo l'otturatore

$$\begin{cases} \underbrace{h_{m+1} - h_0}_{\text{sovraccarico al tempo } t_{m+1} \text{ una fase dopo la chiusura}} = -\underbrace{(h_m - h_0)}_{\text{sovraccarico all'otturatore al } t=t_m \text{ col segno cambiato}} \\ \underbrace{h_{m+2} - h_0}_{\text{sovraccarico dopo 2 fasi al tempo } t_{m+2}} = -\underbrace{(h_{m+1} - h_0)}_{\text{sovraccarico fase 1 dopo la chiusura cambiato di segno}} = \overbrace{(h_m - h_0)}^{\text{sovraccarico al } t=t_m \text{ all'otturatore}} \end{cases}$$

QUESTO SISTEMA CI DICE CHE DOPO CHE CHIUDIAMO L'OTTURATORE AL TEMPO $t_m$ IL SOVRACCARICO ALL'OTTURATORE ALLA FASE SUCCESSIVA IN $t_{m+1}$ È UGUALE MA CAMBIATO DI SEGNO A QUELLO NELLA FASE DI CHIUSURA, DOPO 2 FASI IL SOVRACCARICO È UGUALE E HA LO STESSO SEGNO DEL SOVRACCARICO ALLA CHIUSURA AL TEMPO $t_m$

*CALCOLIAMO IL SOVRACCARICO NELLA SEZIONE DI MEZZERIA:

CONSIDERIAMO IL SOLITO SCHEMA DELL'IMPIANTO IDROELETTRICO E CONSIDERIAMO UNA SEZIONE CHE DISTA $L/2$ DALL'OTTURATORE. IN GENERALE POSSIAMO SCRIVERE:




$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

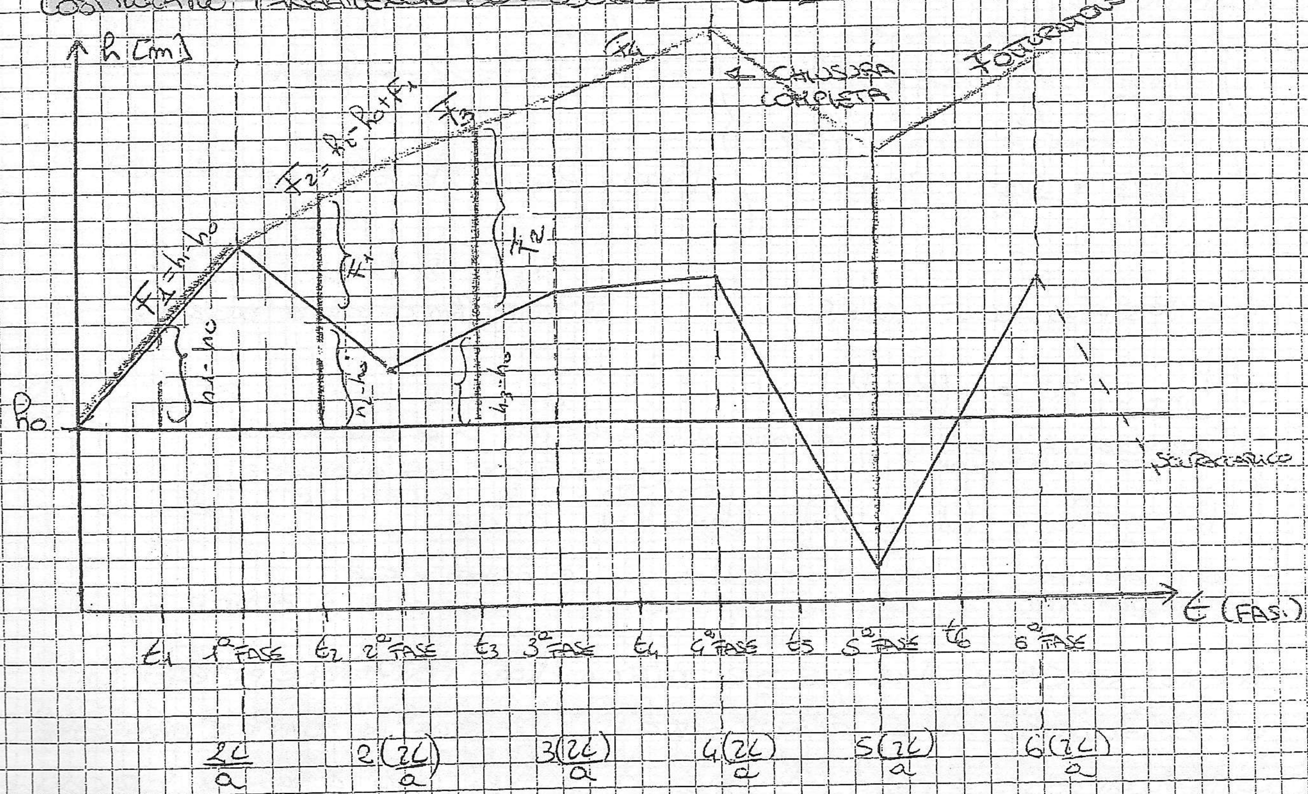
LA F e LA f ALL'OTTURATORE SONO DUE FUNZIONI UGUALI MA SFASATE DI UNA CERTA QUANTITÀ, IN PARTICOLARE LA F È SFASATA IN ANTICIPO DI $\frac{2L}{a}$ RISPETTO ALLA f E LA f È SFASATA IN RITARDO DI $\frac{2L}{a}$ RISPETTO ALLA F.

La F e la f sono due perturbazioni che assumono lo stesso valore nelle diverse sezioni. L'equazione di Allievi ci fornisce l'andamento del sovraccarico all'otturatore:

$$\Delta h_i = h_0 (z_i^2 - 1)$$

$$z_{i+1}^2 + z_i^2 - 2 = 2\sigma (\eta_i z_i - \eta_{i+1} z_{i+1})$$

Attraverso questa espressione possiamo ricavare la F e la $f_i$, come? Costruiamo l'andamento del sovraccarico:




con $t_1 < \frac{2L}{a}$ → all'interno della 1° fase

$t_2 = t_1 + \frac{2L}{a}$ → all'interno della 2° fase

Tracciamo quindi l'andamento di F all'otturatore nei diversi tempi considerati e con una chiusura completa in 4 fasi:

(1) $t_1 < \frac{2L}{a} \rightarrow h_1 - h_0 = F(t_1)$ ← siamo in fase di colpo diretto e l'andamento del sovraccarico coincide con la funzione F

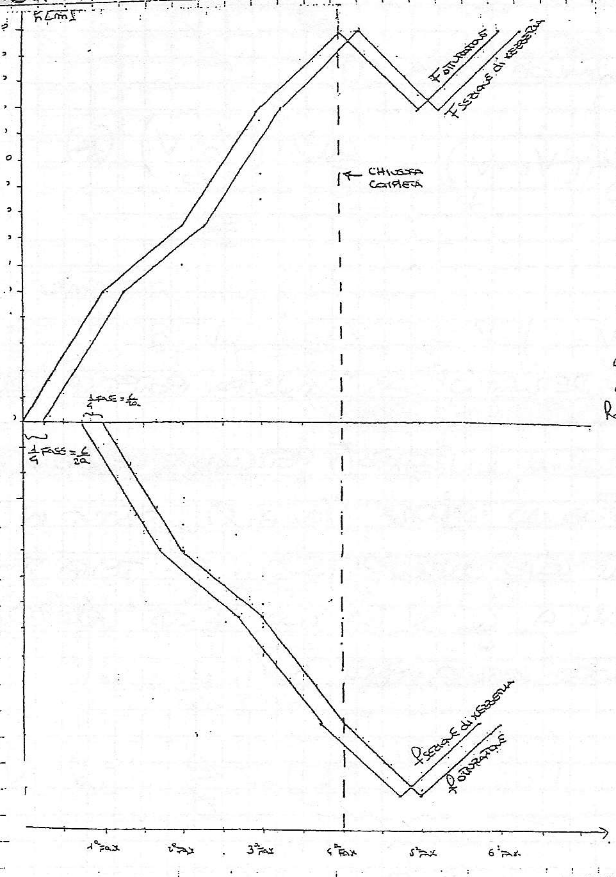
(2) $t_2 = t_1 + \frac{2L}{a} \rightarrow h_2 - h_0 = F(t_2) - F(t_1) \Rightarrow F(t_2) = h_2 - h_0 + F(t_1)$

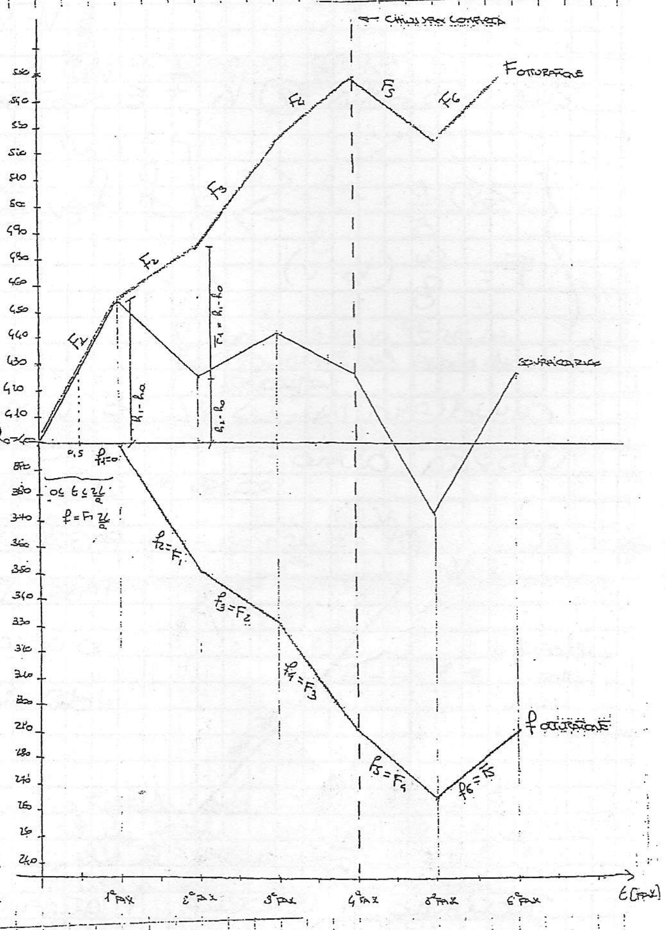
(3) $t_3 = t_2 + \frac{2L}{a} \rightarrow h_3 - h_0 = F(t_3) - F(t_2) \Rightarrow F(t_3) = h_3 - h_0 + F(t_2)$

(4) $t_4 = t_3 + \frac{2L}{a} \rightarrow h_4 - h_0 = F(t_4) - F(t_3) \Rightarrow F(t_4) = h_4 - h_0 + F(t_3)$

(n) $t_n = t_{n-1} + \frac{2L}{a} \rightarrow h_n - h_0 = F(t_n) - F(t_{n-1}) \Rightarrow F(t_n) = h_n - h_0 + F(t_n)$

CI INTERESSA CALCOLARE LA F E LA f PERCHÉ ASSUMONO LO STESSO VALORE IN TUTTE LE SEZIONI, SONO SOLO SFASATE DI UNA CERTA QUANTITÀ; PER TRACCIARE L'ANDAMENTO DELLA f ALL'OTTURATORE BASTA PRENDERE L'ANDAMENTO DELLA F, SFASARLO DI $\frac{2L}{a}$ E RIBALTARLO; INFINE PER CALCOLARE L'ANDAMENTO DELLA f E DELLA F IN UNA SEZIONE GENERICA AD ESEMPIO NELLA MEZZERIA $(x = L/2)$ BASTA SFASARE LA F DELL'OTTURATORE $\frac{1}{4}$ DI FASE IN RITARDO E LA f $\frac{1}{4}$ DI PERIODO ($\frac{1}{4}$ DI FASE $= \frac{L}{2a}$) IN ANTICIPO.




NOTA LA F E LA f IN UNA GENERICA SEZIONE, LE SOMMIAMO ATTRAVERSO LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

E TROVIAMO L'ANDAMENTO DEL SOVRACCARICO PER TUTTE LE SEZIONI DELLA NOSTRA CONDOTTA FORZATA.

RAGIONIAMO UN PO' SU TEMPI DI CHIUSURA:

PER TEMPI DI CHIUSURA $T < \frac{2L}{a}$ (TEMPO DI CHIUSURA INFERIORE AL TEMPO DI FASE) SI STA ESEGUENDO UNA MANOVRA DI CHIUSURA BRUSCA CHE SONO

Equivalenti ad una manovra istantanea ovvero portano tutte ad un $\Delta h_{max}$ calcolabile attraverso:

per $T < \frac{2L}{a}$ $\quad \Delta h_{max} = \frac{a V_0}{g}$ ← per manovre brusche si ha in fase di colpo diretto.

Anche per manovre lente ovvero $T > \frac{2L}{a}$ il massimo sovraccarico si ha in fase di colpo diretto. Qual è quindi il $\Delta h_{max}$ per chiusure lente?

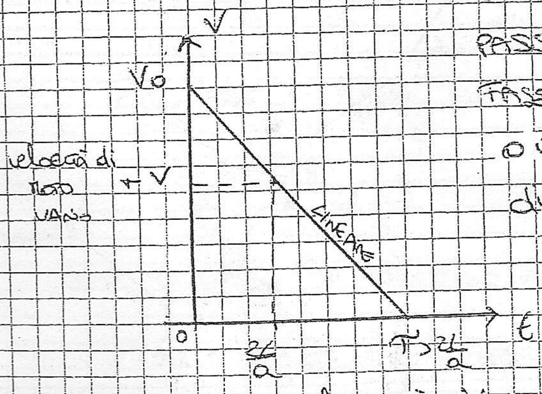
In fase di colpo diretto si ha:
$$\begin{cases} h - h_0 = F & (1) \\ V - V_0 = -\frac{g}{a} F & (2) \end{cases}$$

Ricaviamo dalla (2) la F e sostituiamola nella (1)

$$\begin{cases} \\ F = \frac{a}{g}(V_0 - V) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h - h_0 = \frac{a}{g}(V_0 - V) = \frac{a V_0}{g}\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) \quad (*) \\ \end{cases}$$

Chiudiamo in $T > \frac{2L}{a}$ e consideriamo una chiusura ipotetica nelle velocità ovvero:

chiudiamo in un tempo $T$ per cui la velocità passa da un valore $V_0$ a $\emptyset$; siamo in fase di colpo diretto per cui per tempi minori o uguali a $\frac{2L}{a}$ si ha una certa velocità di moto vario pari a $V$.




Troviamo la velocità V attraverso una proporzione:

$$(V_0 - V) : \frac{2L}{a} = V_0 : T$$

$$\frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{2L}{a} \cdot \frac{1}{T} \quad \text{(sostituendo sopra)}$$

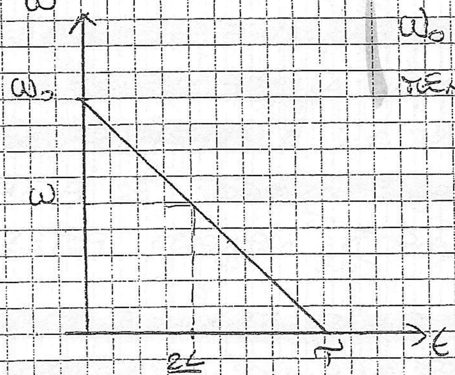
Per cui si ottiene che il sovraccarico $\Delta h$ in fase di colpo diretto per un certo tempo di chiusura $T$:

$$* \ \Delta h = h - h_0 = \Delta h_{max} = \frac{\cancel{a} V_0}{g} \cdot \frac{2L}{\cancel{a}} \cdot \frac{1}{T} = \frac{V_0 2L}{gT}$$ ← per chiusure lente

↳ Michaud

SE SOSTITUISCO $T = \frac{2L}{a}$ CHE È LA FASE DI CHIUSURA ISTANTANEA SI OTTIENE il $\Delta h_{max}$ della fase di colpo diretto (*). 89

Allo stesso risultato si può arrivare considerando una chiusura pratica lineare nelle sezioni:




$\omega_0$ è la luce per un tempo $t=0$ mentre $\omega$ è la luce per tempo $T = \frac{2L}{a}$

In fase di colpo diretto si ha:

$$\begin{cases} h - h_0 = F \\ V - V_0 = -\frac{g}{a} F \end{cases} \Rightarrow \; F = \frac{a}{g}(V_0 - V)$$

Sostituendo:

$$h - h_0 = \frac{a}{g} V_0 \left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) = \frac{a}{g} V_0 \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$$

$\frac{V}{V_0}$ lo possiamo porre in funzione del grado di apertura

Bilancio di portata:

1) $V_0 \Omega = \mu \omega_0 \sqrt{2 g h_0}$ → aperto

2) $V \Omega = \mu \omega \sqrt{2 g h}$ → chiuso a $\frac{2L}{a}$ => h cresce e ω diminuisce

Facciamo il rapporto tra 1) e 2)

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$ e sostituiamolo sopra:

$$h - h_0 = \frac{a}{g} V_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{h}{h_0}}\right)$$

in fase di colpo diretto questo termine è >1 quindi non lo considero perché a - tutta quella quantità andrà a crescere quindi metto il segno di disuguaglianza

$$h - h_0 \leq \frac{a}{g} (V_0) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$ che posso anche scrivere:

$$h - h_0 \leq \frac{a}{g} V_0 \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\right)$$ impostiamo la proporzione

$$\omega_0 - \omega : \frac{2L}{a} = \omega_0 : T \Rightarrow \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{2L}{a} \cdot \frac{1}{T}$$

Sostituendo: $\Delta h = h - h_0 \leq \frac{\cancel{a} V_0}{g} \cdot \frac{2L}{\cancel{a}} \cdot \frac{1}{T}$

Quindi

$$\Delta h = h - h_0 \leq \frac{2L V_0}{g T}$$

← Trovato il sovraccarico lo si può confrontare con questo termine x vedere se abbiamo fatto bene i calcoli

Quindi anche in fase di colpo diretto per chiusure lente il massimo sovraccarico si ha all'interno della prima fase sia che consideriamo una chiusura lineare nelle velocità, che nelle sezioni

massimo sovraccarico che si può avere ∀ valore di T (non troppo grandi) all'interno della I fase.