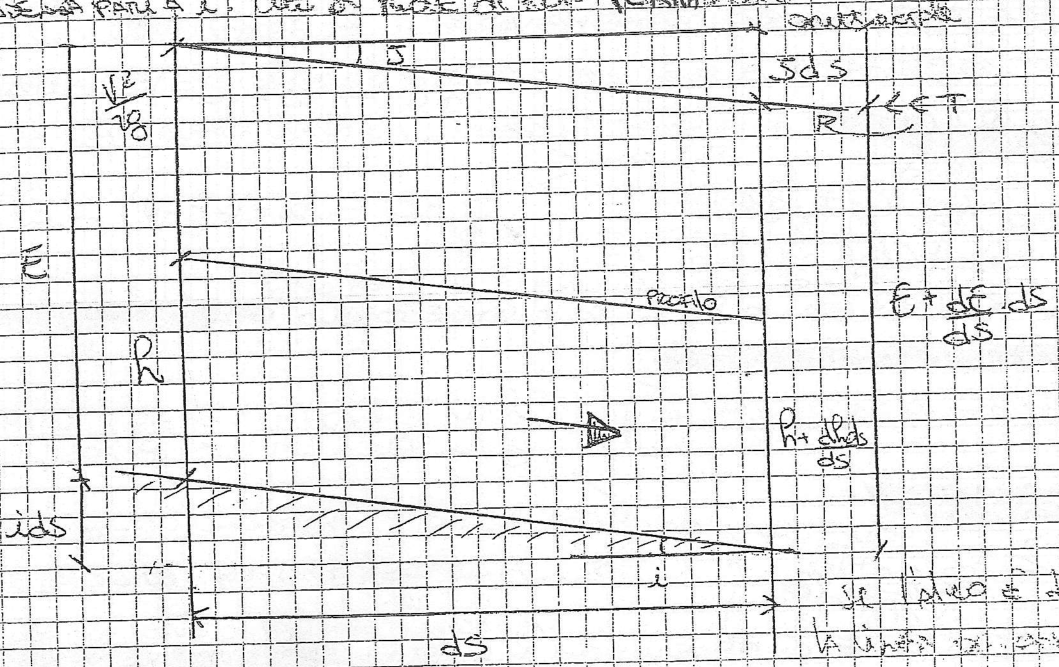
EQUAZIONE PER IL TRACCIAMENTO DEI PROFILI PER CORRENTI A PELO LIBERO

CONSIDERIAMO UN TRONCO di CORRENTE INFINITESIMA di AMPIEZZA PARI A ds, di PENDENZA PARI A i, NE SI RILEVA di ESSO PERDITE



Se l'alveo è declive la linea del carico si abbassa

ENERGIA DI MONTE = ENERGIA di VALLE QUINDI:

$$\cancel{E} + i\,d\cancel{s} = \cancel{E} + \frac{dE}{ds}\,d\cancel{s} + J\,d\cancel{s}$$

CORRENTE UNIFORME

$i = \text{cost}$

IN DEFINITIVA SI HA

$$\boxed{\frac{dE}{ds} = i - J}$$

$\frac{dE}{ds}$ → PERDITA di ENERGIA LUNGO IL TRATTO ds

← L'ENERGIA AUMENTA SE AUMENTA i, DIMINUISCE SE AUMENTANO LE PERDITE

MA: $E = h + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{A^2 2g}$

QUINDI SVILUPPANDO L'ESPRESSIONE SOPRA SI HA

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dh}{ds} - \frac{\cancel{2}Q^2}{A^3 \cancel{2}g}\cdot\frac{dA}{ds} = i - J$$

MA $A = A(s, h(s))$ → AREA DELLA SEZIONE; VARIA CON S SE L'ALVEO NON È CILINDRICO

QUINDI POSSIAMO SVILUPPARE LA DERIVATA TOTALE $\frac{dA}{ds}$ IN FUNZIONE DEL SUO ARGOMENTO.

$$\frac{dh}{ds} - \frac{Q^2}{A^3 g}\left(\frac{\partial A}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial A}{\partial h}}_{B}\cdot\frac{dh}{ds}\right) = i - J$$

$$\frac{dh}{ds}\left(1 - \frac{Q^2}{A^3 g}B\right) - \frac{Q^2}{A^3 g}\frac{\partial A}{\partial s} = i - J$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\cancel{\frac{Q^2}{A^3 g}\frac{\partial A}{\partial s}}^{\,0} + i - J}{1 - \frac{Q^2}{A^3 g}B}$$

SE L'ALVEO È CILINDRICO NON CI SONO VARIAZIONI di AREA LUNGO L'ASCISSA S PER CUI $\frac{\partial A}{\partial s} = 0$

Quindi

$$\frac{dh}{ds}=\frac{i-J}{1-\frac{Q^2B}{A^3g}} \qquad \text{ma } 1-\frac{Q^2B}{A^3g}=dE/dh$$

allora:

$$\boxed{\frac{dh}{ds}=\frac{i-J}{dE/dh}}$$ ← EQUAZIONE CHE CI PERMETTE DI TRACCIARE I PROFILI

TRACCIAMENTO QUALITATIVO DEI PROFILI

SI TRATTA DI STABILIRE SE L'ALTEZZA LIVICA h CRESCE O DIMINUISCE DURANTE IL PERCORSO (S)

- SE h CRESCE LUNGO S ALLORA: $\frac{dh}{ds}>0$ → CORRENTE RITARDATA
  N: $i-J$ PER $h>h_0$ $i>J$ → $i-J>0$
  D: $\frac{dE}{dh}$ PER $h<k$ → CORRENTE VELOCE → $\frac{dE}{dh}<0$

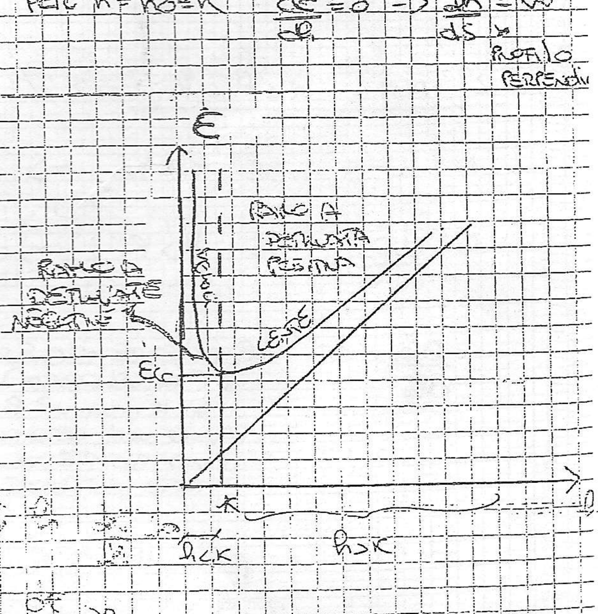
- SE h DIMINUISCE LUNGO S ALLORA: $\frac{dh}{ds}<0$ → CORRENTE ACCELERATA
  N: $i-J$ PER $h<h_0$ $i<J$ → $i-J<0$
  D: $\frac{dE}{dh}$ PER $h>k$ → CORRENTE LENTA → $\frac{dE}{dh}>0$

- SE $h=h_0$: $\frac{dh}{ds}=0$ → CORRENTE DI MOTO UNIFORME
  N: $i-J$ PER $h=h_0=k$ $i=J$ → $i-J=0$
  D: $\frac{dE}{dh}$ PER $h=h_0=k$ $\frac{dE}{dh}=0$ ⇒ $\frac{dh}{ds}=\infty$ PROFILO PERPENDI[COLARE]

i È UN DATO → PENDENZA ALVEO

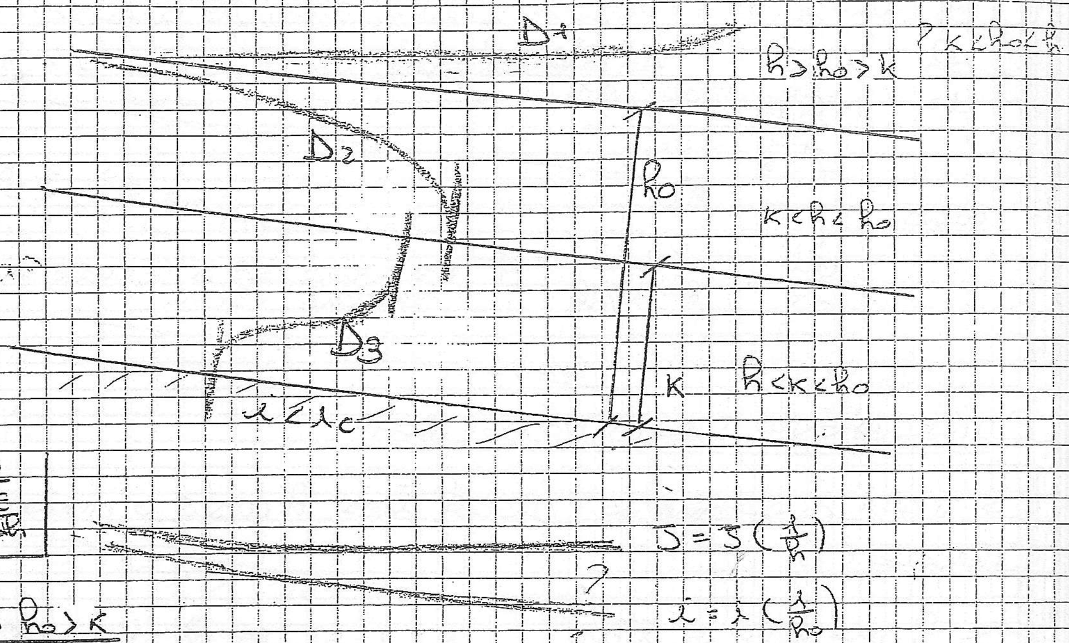
J → Chezy $J=\frac{Q^2}{A^2C^2R}$ con $J=J(h)$

- IL SEGNO DI $\frac{dh}{ds}$ SI STABILISCE FACENDO IL RAPPORTO DEI SEGNI DEL NUMERATORE E DEL DENOMINATORE



PROFILI IN ALVEO A DEBOLE PENDENZA (QUALITATIVO)

SE $h_0 < k$
⇓
$i < i_c$



$$\boxed{\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{\frac{dE}{dh}}}$$

$J = J\left(\frac{1}{h}\right)$

$i = i\left(\frac{1}{h_0}\right)$

1° CASO: $h > h_0 > k$

N: $i - J$ SE $h > h_0$ => $i > J$ QUINDI $i - J > 0$

D: $\frac{dE}{dh}$ SE $h > k$ → CORRENTE LENTA → $\frac{dE}{dh} > 0$

$\frac{dh}{ds} > 0$ LE ALTEZZE CRESCONO LUNGO S (RITARDATA) VERSO VALLE A MONTE TENDONO AL MOTO UNIFORME

D1 → CORRENTE LENTA RITARDATA

AL LIMITE PER $h \to \infty$ $J \to 0$

$h \to \infty$ $dE/dh \to h = E$

PER CUI $dE/dh = 1$ $\times$ $h \to h_0$

IL PROFILO A MONTE TENDERÀ A DISPORSI ORIZZONTALMENTE

$\frac{dh}{ds} > 0$

2° CASO: $k < h < h_0$

N: $i - J$ SE $h < h_0$ => $i < J$ QUINDI $i - J < 0$

D: $\frac{dE}{dh}$ SE $h > k$ → CORRENTE LENTA → $\frac{dE}{dh} > 0$

$\frac{dh}{ds} < 0$ LE ALTEZZE DECRESCONO LUNGO S (ACCELERATA) E TENDONO A K CON UN PROFILO A TANGENTE VERTICALE MENTRE VERSO MONTE TENDERÀ AL MOTO UNIFORME.

D2 → CORRENTE LENTA ACCELERATA

3° CASO: $h < k < h_0$

N: $i - J$ SE $h < h_0 \rightarrow i < J \Rightarrow i - J < 0$

D: $\frac{dE}{dh}$ SE $h < k \rightarrow$ CORRENTE VELOCE $\rightarrow \frac{dE}{dh} < 0$

$\frac{dh}{ds} > 0$ LE ALTEZZE CRESCONO LUNGO S (RITARDATA) E TENDERÀ A VALLE A K CON UN PROFILO A TANGENTE VERTICALE

$D_3 \rightarrow$ CORRENTE VELOCE RITARDATA

QUAL'È L'ANDAMENTO DEL PROFILO A MONTE?

IMMAGINIAMO DI AVERE UN ALVEO RETTANGOLARE MOLTO LARGO

$b \gg h$

PER CUI $R \cong h$;

$$J = \frac{Q^2}{B^2 h^2 c^2 h^{\frac{1}{3}} h} = \frac{Q^2}{B^2 c^2 h^{\frac{10}{3}}}$$

CON $J = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R}$, $C = c R^{\frac{1}{6}}$

INOLTRE:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{A^3 g} B = 1 - \frac{Q^2}{B^{\cancel{3}2} h^3 g} \cancel{B}$$

PER CUI:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{B^2 c^2 h^{10/3}}}{1 - \frac{Q^2}{B^2 h^3 g}}$$

$\frac{Q^2}{B^2 c^2 h^{10/3}} \rightarrow$ PER $h \rightarrow 0$ È UN INFINITO DI ORDINE 10/3

$\frac{Q^2}{B^2 h^3 g} \rightarrow$ PER $h \rightarrow 0$ È UN INFINITO DI ORDINE 3

PER $h \rightarrow 0$ IL NUMERATORE VA A INFINITO PRIMA DEL DENOMINATORE PER CUI

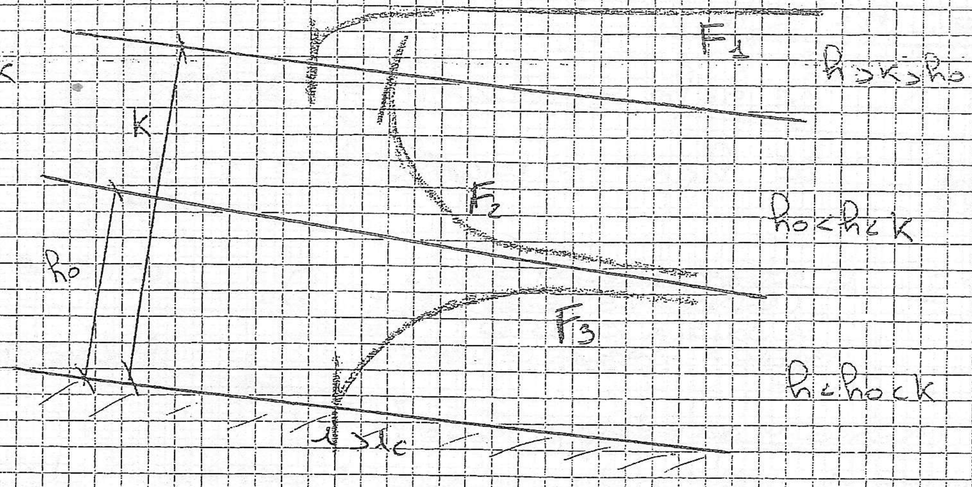
$\frac{dh}{ds} = \infty$.

PROFILI IN ALVEO A FORTE PENDENZA (QUALITATIVO)

SE $h_0 < k$

$\Downarrow$

$i > i_c$



$$\boxed{\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - dE/dh}}$$

1° CASO: $h > k > h_0$

N: $i - J$ SE $h > h_0 \rightarrow i > J \Rightarrow i - J > 0$

D: $\frac{dE}{dh}$ SE $h > k \rightarrow$ CORRENTE LENTA $\frac{dE}{dh} > 0$

$\frac{dh}{ds} > 0$ LE ALTEZZE CRESCONO LUNGO S (RITARDATA) E TENDERÀ A K CON TANGENTE VERTICALE A MONTE E A VALLE SI DISPORRÀ ORIZZONTALMENTE

$F_1 \rightarrow$ CORRENTE LENTA RITARDATA

PER $h \rightarrow \infty$ $\frac{dh}{ds} \rightarrow i$

2° CASO: $h_0 < h < k$

N: $i - J$ SE $h > h_0 \rightarrow i > J \Rightarrow i - J > 0$

D: $\frac{dE}{dh}$ SE $h < k \rightarrow$ CORRENTE VELOCE $\frac{dE}{dh} < 0$

$\frac{dh}{ds} < 0$ LE ALTEZZE DECRESCONO LUNGO S (ACCELERATA) E TENDE A MONTE A K CON TANGENTE VERTICALE E A VALLE AL MOTO UNIFORME

$F_2 \rightarrow$ CORRENTE VELOCE ACCELERATA

$h \rightarrow \infty \rightarrow h_0$

$h = k$ tg VERTICALE $\frac{dh}{ds} \rightarrow \infty$

$\frac{dh}{ds} \rightarrow i$

3° CASO: $h < h_0 < k$

N: $i - J$ SE $h < h_0 \rightarrow i < J \rightarrow i - J < 0$

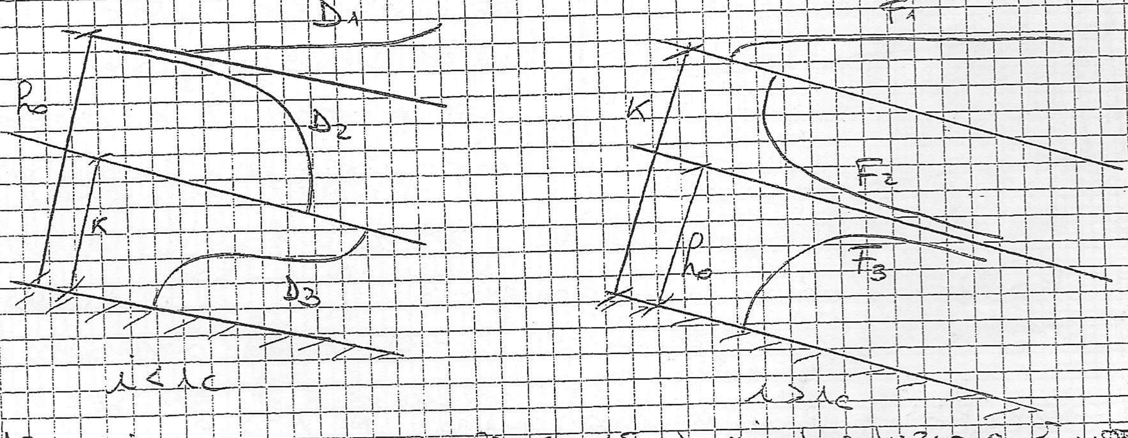
D: $\frac{dE}{dh}$ SE $h < k \rightarrow$ CORRENTE VELOCE $\rightarrow \frac{dE}{dh} < 0$

$\frac{dh}{ds} > 0$ LE ALTEZZE CRESCONO VERSO S (RITARDATA). IL PROFILO TENDE AD h_0 A VALLE E A MONTE VA A TANGENTE ORIZZONTALE SUL FONDO.

$F_3 \rightarrow$ CORRENTE VELOCE RITARDATA

LEZIONE N° 26

19/05/2011



$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - dE/dh}$$ ← EQ DIFFERENZIALE DI CUI LA SOLUZIONE È NOTA A MENO DI UNA COSTANTE DI INTEGRAZIONE CHE PUÒ ESSERE RICAVATA ATTRAVERSO LE CONDIZIONI AL CONTORNO.

BISOGNA STABILIRE COME LA CAUSA PERTURBATRICE INFLUENZA LA CORRENTE:

1) LA CAUSA PERTURBATRICE AGISCE DA VALLE VERSO MONTE SE LA CORRENTE È LENTA $\longrightarrow |c| > |v|$

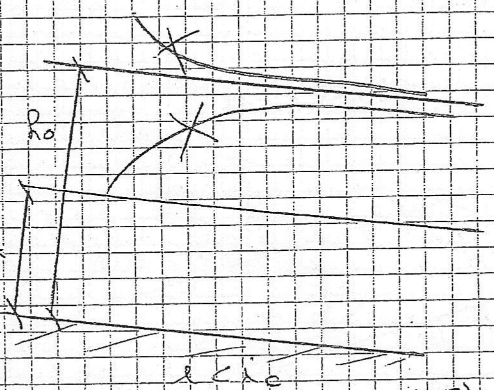
2) LA CAUSA PERTURBATRICE AGISCE DA MONTE VERSO VALLE SE LA CORRENTE È VELOCE $\longrightarrow |c| < |v|$

Perchè???

2) PER QUANTO RIGUARDA LA CORRENTE VELOCE SIAMO ANDATI A RICAVARE QUANTO VALE LA CELERITÀ DELLE PERTURBAZIONI, IMMAGINANDO CHE INTERVENGA UNA QUALSIASI CAUSA PERTURBATRICE CHE VADA AD ALTERARE IL PROFILO DEL PELO LIBERO PER CUI NASCE UNA PERTURBAZIONE CHE SI PROPAGA CON UNA CERTA CELERITÀ PARI A C;

nel caso della corrente veloce questa celerità è minore della velocità della corrente per cui la perturbazione non può far altro che propagarsi verso valle visto che la velocità della corrente è più grande della celerità della perturbazione.

1) Nel caso di una corrente lenta la celerità della perturbazione è maggiore della velocità della corrente e quindi la perturbazione si può propagare sia verso monte che verso valle. Per vedere perché, nel caso di una corrente lenta, la causa perturbatrice può influenzare la corrente da valle verso monte ragioniamo per assurdo:



Immaginiamo di avere un alveo a debole pendenza e una causa perturbatrice che altera il profilo del pelo libero e poiché la corrente è lenta raggiungerà l'altezza di moto uniforme all'infinito a valle;

profilo in rosso

Per $h > h_0 \rightarrow \frac{dh}{ds} < 0$ corrente accelerata

N: $i - J > 0$

D: $\frac{dE}{dh} > 0$

Assurdo $\Rightarrow \frac{dh}{ds}$

profilo in blu

Per $k < h < h_0 \rightarrow \frac{dh}{ds} > 0$ corrente ritardata

N: $i - J < 0$

D: $dE/dh > 0$

assurdo $\Rightarrow \frac{dh}{ds} < 0$

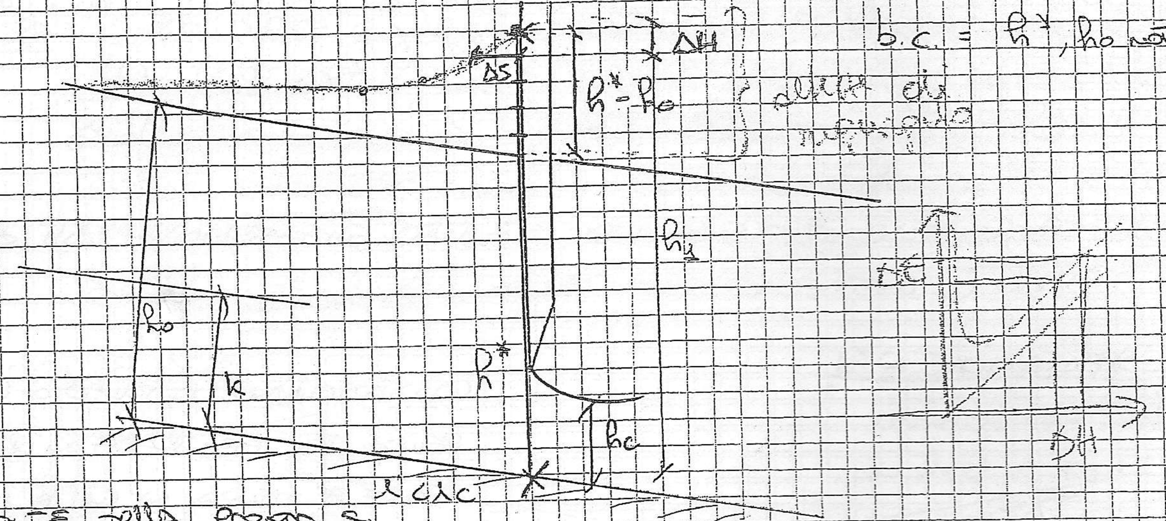
i due profili non sono possibili!

Quindi la causa perturbatrice nel caso di corrente lenta non può influenzare la corrente da monte verso valle ma soltanto da valle verso monte;

Per il tracciamento dei profili il punto da cui iniziare a tracciare va ricercato in corrispondenza della causa perturbatrice e quindi va ricercato all'estremo di valle se la corrente è lenta, a monte se la corrente è veloce (quest'altezza è un'altezza nota).

TRACCIAMENTO DEI PROFILI PER PUNTI

Supponiamo di avere un alveo a debole pendenza e una paratoia che lascia passare attraverso la luce una certa portata Q; attraverso questa portata posso valutare l'altezza di moto uniforme h_o (con la scala delle portate) e nota la geometria dell'alveo posso tracciare k.



A monte della paratoia si verifica un profilo di tipo D1 come visto nel 1° caso con $k < h_o < h$

Ci calcoliamo l'altezza nota h^* tramite Bernoulli e dividiamo il dislivello tra h^* e h_o in più parti:

$$\Delta H = \frac{(h^* - h_o)}{n}$$ ← ad ogni ΔH va associato un ΔS

il nostro profilo varia tra 2 altezze note: h^* e h_o

$$\frac{dE}{dS} = i - J$$ (legge delle) passiamo alle differenze finite → $\frac{\Delta E}{\Delta S} = i - J$

1° ITERAZIONE

ma
$$\begin{cases} \Delta H = h^* - h_1 \quad \text{con } h_1 = h^* - \Delta H \\ \Delta E = E^* - E_1 = h^* + \dfrac{Q^2}{A_*^2 2g} - h_1 + \dfrac{Q^2}{A_1^2 2g} \end{cases}$$

Per quanto riguarda $J = \frac{Q^2}{A^2 C^2 R}$ consideriamo un'altezza media perché tutti i termini sono funzione di h

$$\underbrace{h_m}_{h\ \text{media}} = \frac{h^* - h_1}{2}$$

Per cui:

$$\underbrace{J_m}_{\text{medio}} = \frac{Q^2}{A_m^2 C_m^2 R_m}$$

Quindi

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{i - J_m}$$

ΔS = tronco di alveo in cui le altezze variano di Δh

2ª iterazione

$h_1 \rightarrow h^*$

$h_2 \rightarrow h_1$

$$\Delta h = h_{i+1} - h_i$$

$$\Delta E = E_{i+1} - E_i$$

con
$$\begin{cases} E_{i+1} = h_{i+1} + \dfrac{Q^2}{A^2_{i+1} \cdot 2g} \\ E_i = h_i + \dfrac{Q^2}{A_i^2 \cdot 2g} \end{cases}$$

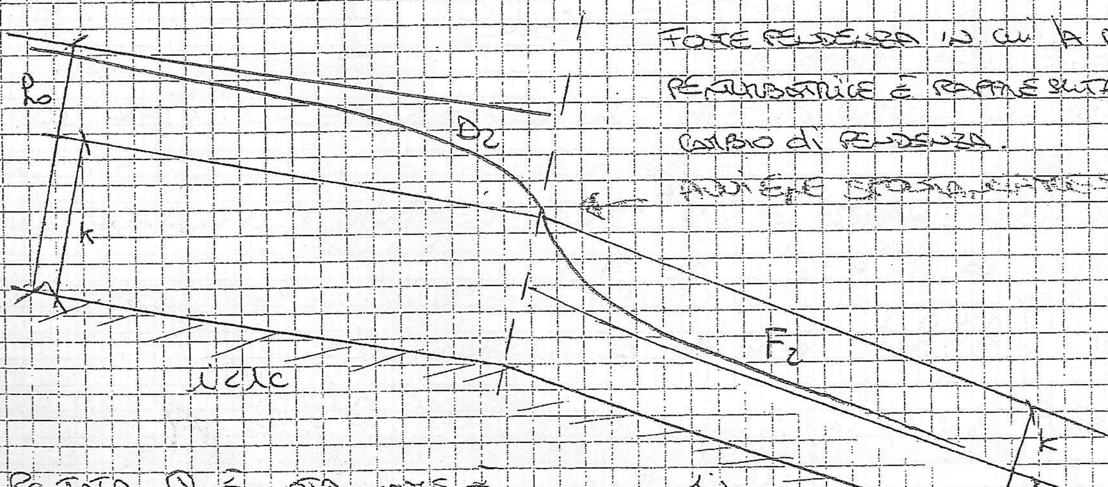
$$J_m = \frac{J_{i+1} - J_i}{2}$$

Ripeto lo stesso procedimento per tutti gli intervalli Δh e traccio il profilo

Applicazione n° 1

Consideriamo un alveo a debole pendenza seguito da un alveo a forte pendenza in cui la causa perturbatrice è rappresentata dal cambio di pendenza.

~~[illegible]~~



La portata Q è nota, come è nota anche la geometria (alveo rettangolare) e quindi anche l'indice di scabrezza K_s

La prima cosa da fare è calcolare l'altezza di moto uniforme → h_0 e l'altezza critica ← k tenendo conto che quest'ultima è uguale sia per l'alveo a debole pendenza che in quello a forte pendenza, perché dipende da Q e dalla geometria, e attraverso l'espressione di Chezy ci possiamo calcolare h_0.

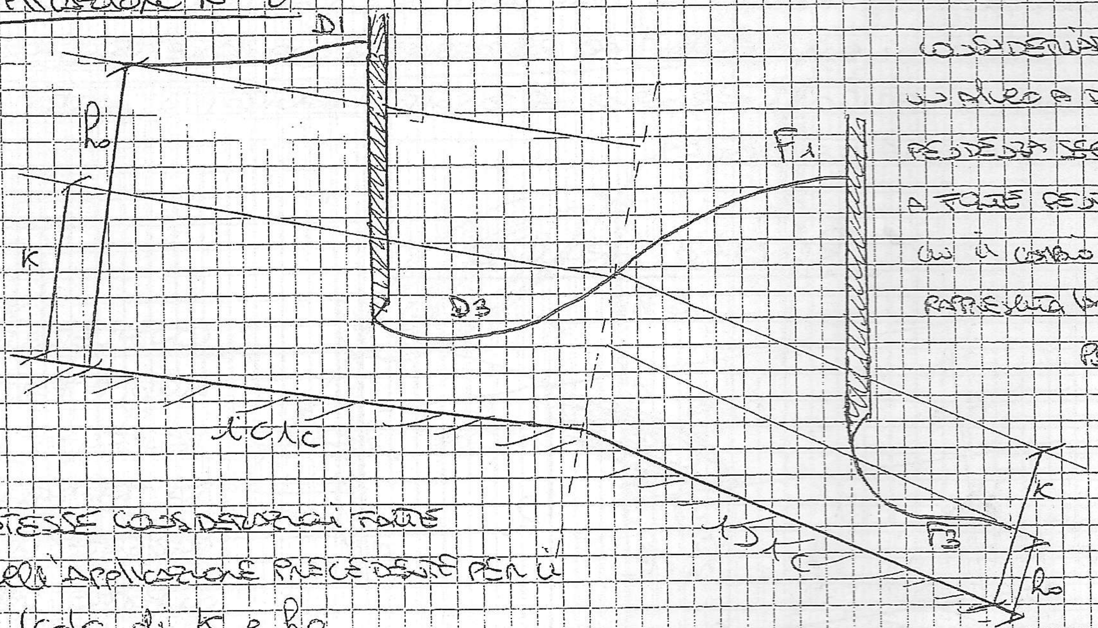
Domanda: è possibile che una corrente lenta si può trasformare in una corrente veloce passando attraverso lo stato critico k in maniera graduale e continua ripristinando in fine il moto uniforme all'estremo a valle???

A monte in $i < i_c$ la corrente dovrà tendere all'infinito a monte al moto uniforme e a valle a k per cui $k < h < h_0$ il profilo che si avrà è D_2 = corrente lenta accelerata; nell'alveo con $i > i_c$ a valle si deve raggiungere l'altezza di moto uniforme e a monte k per cui l'unico profilo è di tipo F_2 = corrente veloce accelerata.

<u>RISPOSTA</u>: sotto queste condizioni il passaggio graduale attraverso k avviene sempre, quindi la causa perturbatrice rappresentata dal cambio di pendenza è condizione necessaria e sufficiente, inoltre è corretto anche il modo di agire della causa perturbatrice in quanto influenza la corrente lenta da valle verso monte e la corrente veloce da monte verso valle.

<u>APPLICAZIONE N° 2</u>

Consideriamo sempre un alveo a debole pendenza seguito da un alveo a forte pendenza in cui il cambio di pendenza rappresenta la causa perturbatrice



Stesse considerazioni fatte nell'applicazione precedente per il calcolo di k e h_0.

<u>DOMANDA</u>: È possibile passare da una corrente veloce a una corrente lenta in maniera continua e graduale attraverso k a causa del solo cambio di pendenza?

<u>RISPOSTA</u>: No! Il cambio di pendenza è una condizione necessaria ma non sufficiente perché il modo di agire della causa perturbatrice non è corretto perché agisce da valle verso monte nei confronti della corrente veloce e da monte verso valle nel caso di corrente lenta; è necessario quindi inserire 2 paratoie (due cause perturbatrici) una nell'alveo a debole pendenza e una nell'alveo a forte pendenza affinché queste ultime influenzino rispettivamente

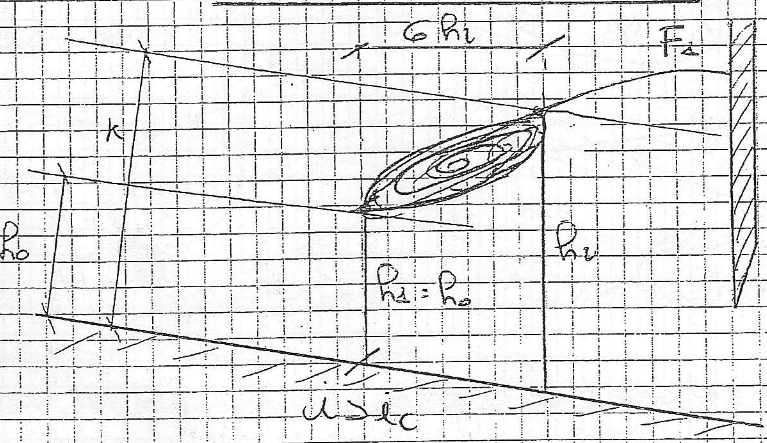
Da valle a monte la corrente lenta in $i > i_c$ e da monte a valle la corrente veloce nell'alveo a $i < i_c$, facendo quindi passare la corrente da veloce a lenta attraverso K.

Nell'alveo a debole pendenza a monte della paratoia si crea un profilo D_1 = corrente lenta ritardata mentre a valle della paratoia si crea un profilo D_3 = corrente veloce ritardata, che tende allo stato critico con un profilo a tangente verticale.
Nell'alveo a forte pendenza a monte della paratoia l'unico profilo di corrente lenta è F_1 = corrente lenta ritardata mentre a valle l'unico profilo per $h < h_0 < k$ che tende ad h_0 all'infinito a valle è il profilo F_3 = corrente veloce accelerata.

ad es. in laboratorio

* Sotto queste condizioni il passaggio "teorico" tra corrente veloce a corrente lenta attraverso lo stato critico è possibile! In natura però questo non avviene mai! Nel passaggio tra una corrente veloce a una lenta si verifica il fenomeno del risalto idraulico (in natura, ovvero in assenza delle due paratoie).

Risalto idraulico

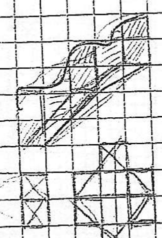


Consideriamo un alveo a forte pendenza nel quale sta transitando una corrente di moto uniforme veloce verso valle. Interviene una causa perturbatrice rappresentata da una paratoia che modifica il profilo del pelo libero ovvero la corrente incontra questo ostacolo e rigurgita (sale di livello) e quindi diminuisce di velocità quindi si avrà una corrente lenta F_1 = corrente lenta ritardata. Questo profilo di corrente tenderebbe a K ma in realtà non lo raggiunge mai perché il passaggio da una corrente veloce a una corrente lenta in maniera continua e graduale attraverso lo stato critico K non avviene mai, per cui si ha un processo di discontinuo ovvero un risalto idraulico (fenomeno vorticoso).

Per un determinato valore del numero di Froud

$5 < Fr < 15$ ⟶ l'ampiezza del risalto $6 h_2$ (sperimentalmente)

si ha il vortice



Per Fr più piccoli ⟶ non si ha il vortice ma il risalto ondulato

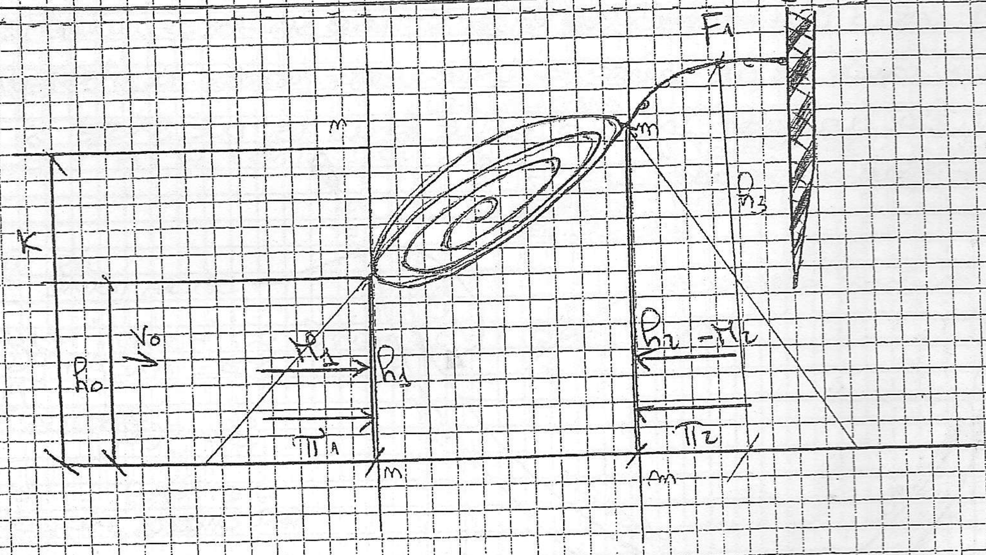
con $Fr = \frac{V}{\sqrt{g h_1}}$

o meglio:

se $(Fr)^2 > 3$ → vortice (sempre)

$(Fr)^2 < 2$ ⟶ risalto ondulato ⟶

Risalto idraulico dal punto di vista analitico



Consideriamo la situazione descritta prima quindi una corrente di moto uniforme veloce e a valle una paratia che modifica il profilo del pelo libero; per la trattazione analitica del risalto idraulico applichiamo l'equazione globale della dinamica al volume di controllo compreso tra le due sezioni M-M, m-m che contengono il tronco di corrente dove si verifica il risalto idraulico quindi le due sezioni che delimitano le zone in cui si ha ancora (prima e dopo il risalto) la distribuzione delle pressioni di tipo idrostatico.

moto permanente

$$\cancel{\vec{G}}^{\,0} + \vec{\Pi} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 + \cancel{\vec{I}} - \cancel{\mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} dA}^{\,0} = 0$$

proiettata lungo l'asse del moto $= 0$ trascurabili in più sono opposti e si compensano

Quindi proiettando lungo l'asse del moto si ha:

$$\vec{\Pi}_1 + \vec{M}_1 = \vec{\Pi}_2 + \vec{M}_2$$

$\vec{\Pi}$ = risultante delle forze di superficie che tutto l'ambiente esterno esercita sul volume di controllo

$\vec{M}$ = risultante della forza di quantità di moto

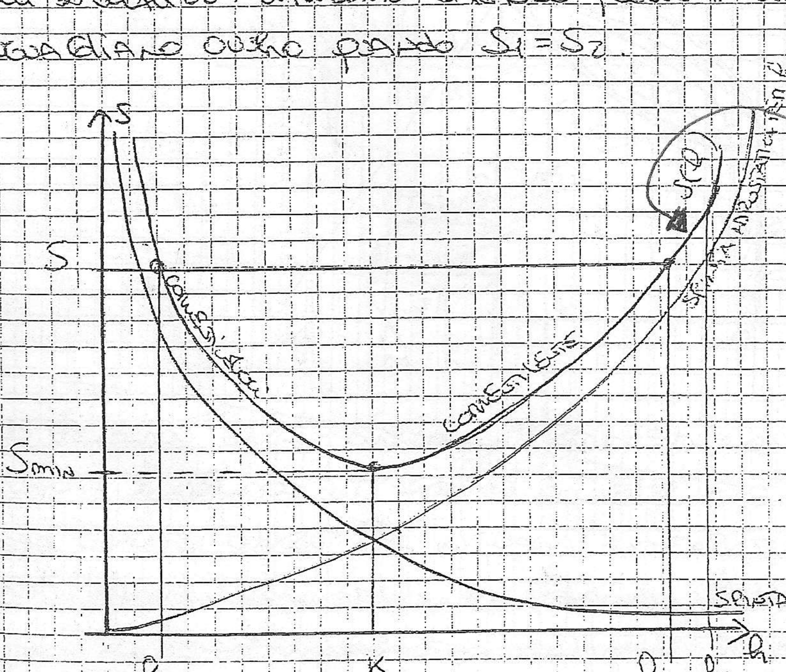
Quindi:

$$\gamma h_{G_1} A_1 + \rho Q V_1 = \gamma h_{G_2} A_2 + \rho Q V_2$$

Essendo $V = \frac{Q}{A}$

$$\overbrace{\gamma h_{G_1} A_1 + \rho \frac{Q^2}{A_1}}^{S_1 = \text{spinta totale } 1} = \overbrace{\underbrace{\gamma h_{G_2} A_2}_{\text{spinta di natura idrostatica}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{A_2}}_{\text{spinta di natura dinamica}}}^{S_2 = \text{spinta totale } 2} = S \rightarrow \text{spinta totale}$$

Per cui la spinta totale è data dalla somma di due spinte, una dinamica e una idrostatica; ognuna di queste spinte è funzione di un'altezza, per cui ad ogni altezza corrisponde una spinta ovvero $S = S(h)$; quindi nel nostro caso abbiamo una spinta S_1 che spinge da monte verso valle e una spinta S_2 che spinge da valle verso monte; le altezze in cui si localizza il risalto saranno quelle in cui le due spinte si uguagliano ovvero quando $S_1 = S_2$



$$S_{tot} = \gamma h_G A + \rho \frac{Q^2}{A}$$

$$S = S(h)$$

Per diversi valori di h si può costruire l'andamento della funzione $S(h)$

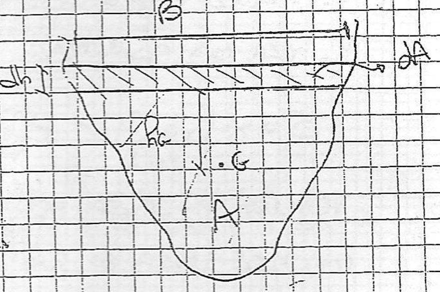
Per una certa spinta S si possono individuare nel grafico due altezze coniugate h_1 e h_2. Si parte sempre dall'altezza nota di moto uniforme $h_0 = h_1$, si entra nel diagramma, si trova la spinta e quindi si trova l'altezza coniugata h_2 e quindi abbiamo l'altezza della sezione dalla quale parte il risalto idraulico.

CONSIDERIAMO nel DIAGRAMMA la SPINTA di una GENERICA ALTEZZA che CHIAMIAMO h_3 che È MAGGIORE della SPINTA che HA l'ALTEZZA h_1 quindi il RISALTO si SPINGE VERSO MONTE QUANDO mi SPOSTO LUNGO il PROFILO F_1 di ALTEZZE DECRESCENTI E quindi RISCENDO la CURVA della SPINTA $S(h)$ FINO A QUANDO VA ad INCONTRARE l'ALTEZZA h_1 DOVE LE SPINTE SONO UGUALI.

BISOGNA ANCORA STABILIRE QUANTO VALE K:

PER VEDERE QUAL È IL MINIMO di S BASTA FARE LA DERIVATA RISPETTO ad h E PONIAMO LA DERIVATA UGUALE A ZERO

$$\frac{dS}{dh}=0 \Rightarrow \frac{dS}{dh}=\gamma\frac{d(h_G A)}{dh}-\frac{\rho Q^2}{A^2}\overbrace{\frac{dA}{dh}}^{B}=0$$



con $h_G \cdot A = M$ = MOMENTO STATICO DELLA SEZIONE

NOI ABBIAMO LA VARIAZIONE del MOMENTO STATICO QUANDO l'ALTEZZA CRESCE di una QUANTITÀ INFINITESIMA dh QUINDI DOBBIAMO CONSIDERARE il MOMENTO INCREMENTALE:

$$M_{incr} = A(h_G + dh) + \overbrace{B\,dh}^{\text{AREA INFINITESIMA}} \cdot \underbrace{\frac{dh}{2}}_{\text{BARICENTRO AREA INFINITESIMA}}$$

← il MOMENTO STATICO s'INCREMENTA sia PERCHÉ è VARIATO il BARICENTRO, sia PERCHÉ è VARIATA l'AREA

PER CUI:

$$dM = M_{incr} - M = \cancel{A h_G} + A\,dh + \overbrace{\cancel{\frac{B\,dh^2}{2}}}^{\text{INFINITESIMO di ORDINE SUPERIORE}} - \cancel{A h_G}$$

E ANCORA:

$$\frac{dM}{dh} = \frac{A\cancel{dh}}{\cancel{dh}} = A$$

SOSTITUENDO:

$$\frac{dh}{dS} = \gamma A - \frac{\rho Q^2}{A^2}B = 0$$ dividiamo tutto per $\gamma \cdot A$

$$1 - \frac{Q^2}{A^3 g}B = 0$$

OVVERO $$\boxed{\frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{B}}$$ ← STATO CRITICO PER $h \rightarrow K$; QUINDI QUANDO si VERIFICA QUESTA CONDIZIONE si HA il MINIMO dell'ENERGIA, il MASSIMO della PORTATA E il MINIMO VALORE della SPINTA

Se l'alveo è di forma rettangolare:

$$S = \gamma \frac{h}{2} h \cdot B + \frac{\rho Q^2}{B \cdot h}$$

cioè:

$$S = \gamma \frac{h^2}{2} B + \frac{\rho Q^2}{B h} \Rightarrow \frac{dS}{dh} = \frac{\cancel{2}\gamma h B}{\cancel{2}} - \frac{\rho Q^2}{B h^2} = 0$$ dividendo per $\gamma h B$

si ha:

$$1 - \frac{Q^2}{g B^2 h^3} = 0 \Rightarrow h = k = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}}$$

Se l'alveo è rettangolare, nota la h_1 si può ricavare la sua altezza coniugata h_2 per via analitica:

$$S = \gamma h_G A + \frac{\rho Q^2}{A}$$

Poiché la spinta della corrente veloce deve essere uguale alla spinta della corrente lenta si può scrivere:

$$\frac{1}{2} h_1^2 B \cdot \gamma + \frac{\rho Q^2}{B h_1} = \frac{1}{2} h_2^2 B \gamma + \frac{\rho Q^2}{B \cdot h_2}$$

moltiplico tutto per 2:

$$h_1^2 B \gamma + \frac{2 \rho Q^2}{B h_1} = h_2^2 B \gamma + \frac{2 \rho Q^2}{B h_2}$$

dividendo tutto per $\gamma \cdot B$

$$h_1^2 + \frac{2 Q^2}{g B^2 h_1} = h_2^2 + \frac{2 Q^2}{g B^2 h_2}$$

moltiplicando tutto per $(h_1 \cdot h_2)$

$$h_1^2 (h_1 \cdot h_2) + \frac{2 Q^2 h_2}{g B^2} = h_2^2 (h_1 \cdot h_2) + \frac{2 Q^2 h_1}{g B^2}$$

raccogliendo

$$h_1 \cdot h_2 (h_1^2 - h_2^2) = \frac{2 Q^2}{g B^2} (h_1 - h_2)$$

sviluppando la differenza di quadrati

$$h_1 \cdot h_2 \cancel{(h_1 - h_2)} (h_1 + h_2) = \frac{2 Q^2}{g B^2} \cancel{(h_1 - h_2)}$$

SI OTTIENE:

$$h_1 h_2 (h_1 + h_2) = \frac{2Q^2}{gB^2}$$

PORTANDO TUTTO AL PRIMO MEMBRO E SVOLGENDO I PRODOTTI, OTTENIAMO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO CHE POSSIAMO RISOLVERE O RISPETTO AD h_1 O RISPETTO AD h_2 (DIPENDE DA QUALE ALTEZZA È NOTA)

$$h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 - \frac{2Q^2}{gB^2} = 0$$

RISOLVIAMO RISPETTO AD h_1

$$h_1 = \frac{-h_2^2 \pm \sqrt{h_2^4 + 8 h_2 \frac{Q^2}{gB^2}}}{2h_2} = \frac{-h_2^2 \pm \sqrt{h_2^4 + \frac{8 h_2 V_2^2 h_2^2 \cancel{B^2}}{g \cancel{B^2}}}}{2h_2} =$$

$$= \frac{-h_2^2 \pm \sqrt{h_2^4 + 8\frac{h_2^3 V_2^2}{g h_2}}}{2h_2}$$ ← NELLA FRAZIONE AVEVO h^3 AL NUM, PER PORTARE FUORI h_2^2 DIVIDO PER h_2 QUINDI SI HA SOPRA h^4 E SOTTO h

OTTENGO:

$$h_1 = \frac{-h_2^2 \pm \sqrt{h_2^4\left(1 + \frac{8V_2^2}{gh_2}\right)}}{2h_2} = \frac{-h_2^2 \pm h_2^2\sqrt{1 + \frac{8V_2^2}{gh_2}}}{2\cancel{h_2}}$$

$$h_1 = \frac{1}{2} h_2 \left(-1 \pm \sqrt{1 + 8\frac{V_2^2}{g h_2}}\right) \rightarrow Fr_2^2 \rightarrow Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g h_2}}$$

SI SCEGLIE SOLO LA SOLUZIONE POSITIVA, QUELLA NEGATIVA NON LA CONSIDERIAMO PERCHÉ NON HA SENSO!

IN FINE SI OTTIENE:

$$\boxed{h_1 = \frac{1}{2} h_2 \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_2^2}\right)}$$ → NOTO CHE SIA h_2 RICAVIAMO h_1

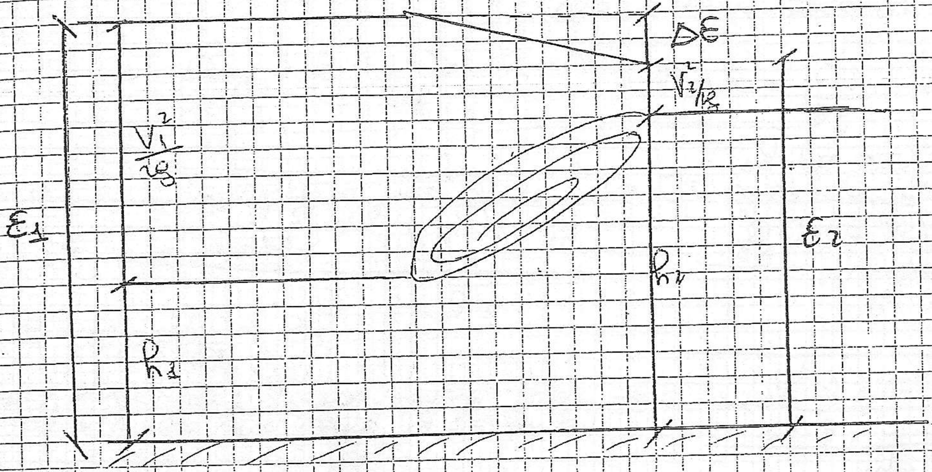
E

$$\boxed{h_2 = \frac{1}{2} h_1 \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2}\right)}$$ → NOTO CHE SIA h_1 RICAVIAMO h_2

LEZIONE N° 27 23/05/2011

Quando una corrente veloce incontra una corrente lenta non si ha il passaggio graduale attraverso lo stato critico ma si ha un fenomeno locale detto risalto idraulico (fortemente dissipativo in termini di energia)

DISSIPAZIONE DI ENERGIA NEL RISALTO IDRAULICO (ALVEO RETT.)



per cui:

$$\Delta E = E_1 - E_2$$

con:

$$E_1 = h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_1 + \frac{Q^2}{A_1^2 2g} = h_1 + \frac{Q^2}{B^2 h_1^2 2g}$$

$$E_2 = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} = h_2 + \frac{Q^2}{A_2^2 2g} = h_2 + \frac{Q^2}{B^2 h_2^2 2g}$$

per un alveo rettangolare $A_1 = B \cdot h_1$, $A_2 = B \cdot h_2$

per cui:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = h_1 - h_2 + \frac{Q^2}{B^2 2g}\left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right)$$

Riprendendo l'espressione descritta nella lezione precedente:

$$\frac{2Q^2}{B^2 g} = h_1 h_2 (h_1 + h_2)$$

pertanto sostituendo si ha: $\longrightarrow \frac{Q^2}{B^2 2g} = \frac{1}{4} h_1 h_2 (h_1 + h_2)$

e quindi: fatto il m.c.m.

$$\Delta E = h_1 - h_2 + \frac{1}{4} \cancel{h_1 h_2} (h_1 + h_2)\left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}\right)$$

$$\Delta E = \frac{4 h_1^2 h_2 - 4 h_1 h_2^2 + h_1 h_2^2 - h_1^3 + h_2^3 - h_1^2 h_2}{4 h_1 h_2}$$

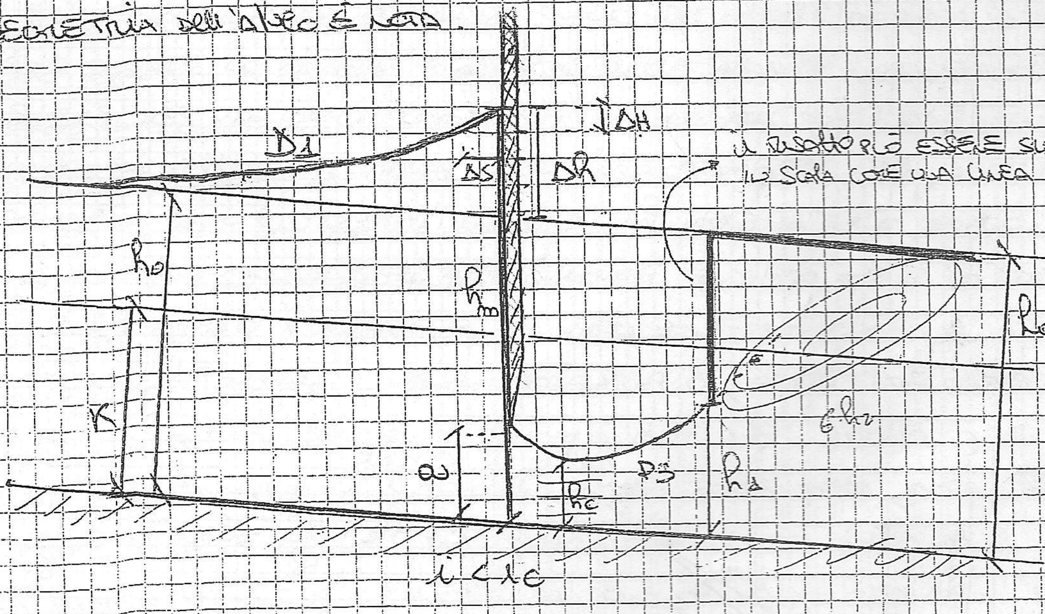
$$\Delta E = \frac{\overbrace{3h_1^2 h_2 - 3h_1 h_2^2 - h_1^3 + h_2^3}^{\text{cubo di binomio}}}{4 h_1 h_2}$$

INFINE SI OTTIENE:

$$\boxed{\Delta E = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}}$$ → PERDITA DI ENERGIA TRA LE DUE SEZIONI ~~COSTEGG~~ IL RISALTO IDRAULICO CONTENENTI

APPLICAZIONE N°1 : PROFILI DI CORRENTE IN ALVEO A $i < i_c$

CONSIDERIAMO UN ALVEO DI FORMA RETTANGOLARE A DEBOLE PENDENZA NEL QUALE È INSERITA UNA PARATOIA CHE LASCIA DEFLUIRE UNA CERTA PORTATA Q NOTA; VOGLIAMO STABILIRE I PROFILI CHE SI DETERMINANO A MONTE E A VALLE DI QUESTA PARATOIA; LA LUCE DELLA PARATOIA È PARI AD a E IL COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE $C_c = 0,61$ PER CUI L'ALTEZZA DELLA SEZIONE CONTRATTA SARÀ $h_c = 0,61 \cdot a$; LA GEOMETRIA DELL'ALVEO È NOTA.



NOTA LA GEOMETRIA E NOTA LA PORTATA ATTRAVERSO Chezy POSSIAMO CALCOLARCI h_0 ALTEZZA DI MOTO UNIFORME

$$Q = V \cdot A = \overbrace{B \cdot h_0}^{A} \, \overbrace{C_c \sqrt{R_0 \cdot i}}^{V}$$

E ATTRAVERSO L'ESPRESSIONE DELLO STATO CRITICO $\frac{A^3}{B} = \frac{Q^2}{g}$

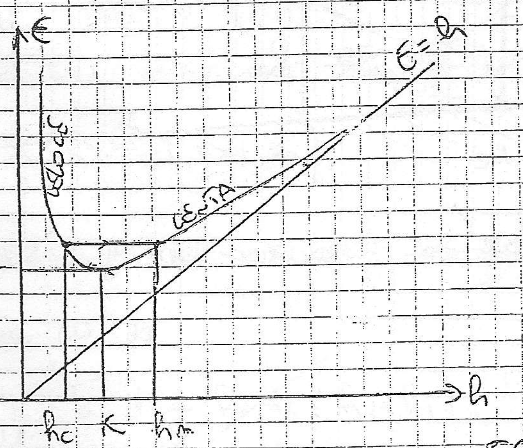
$$K = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B^2 g}}$$ CON $h_0 > K$ PERCHÉ $i < i_c$

PER IL TRACCIAMENTO DEL PROFILO BISOGNA PARTIRE DA UN'ALTEZZA NOTA IN CORRISPONDENZA DELLA CAUSA PERTURBATRICE E A PARTIRE DALL'ESPRESSIONE

$\frac{DE}{DS} = i - J$ POSSIAMO PARTIRE AL TRACCIAMENTO DEL PROFILO.

A VALLE DELLA PARATOIA SIAMO NEL CASO $h < K$ QUINDI CORRENTI VELOCI E QUINDI È CORRETTO AVERE IL NODO DI FORZE DELLA CAUSA PERTURBATRICE PERCHÉ INFLUENZA LA CORRENTE VELOCE DA MONTE VERSO VALLE, SE QUI AVESSIMO UNA CORRENTE VELOCE A MONTE AVREMO UNA CORRENTE LENTA PERCHÉ LA CAUSA PERTURBATRICE INFLUENZERÀ LA CORRENTE DA VALLE VERSO MONTE; IL PROFILO A VALLE SI SVILUPPA TRA LE ALTEZZE NOTE h_c E K PER CUI:

$\Delta h = K - h_c$ E, CONSIDERANDO IL J RELATIVO AD UN'ALTEZZA MEDIA, SI PUÒ PROCEDERE AL TRACCIAMENTO PER PUNTI (TEORICO ANCORA) DEL PROFILO DI TIPO D_3 = CORRENTE VELOCE RITARDATA A PARTIRE DA h_c, QUESTO PROFILO DEVE RAGGIUNGERE ALL'INFINITO A VALLE L'ALTEZZA DI MOTO UNIFORME MA NON SAPPIAMO COME LO RAGGIUNGE (ECCO PERCHÉ C'È LA LINEA TRATTEGGIATA).
A MONTE ABBIAMO $h > h_0 > K$ QUINDI SI HA UNA CORRENTE LENTA CHE RIGURGITA QUANDO INCONTRA LA PARATOIA QUINDI SI VERRÀ A CREARE UN PROFILO DI TIPO D_1 = CORRENTE LENTA RITARDATA. IL PROFILO VA TRACCIATO PER PUNTI PARTENDO DALL'ALTEZZA NOTA IN CORRISPONDENZA DELLA PARATOIA (CONDIZIONE AL CONTORNO), PER TROVARE QUEST'ALTEZZA h_m FACENDO L'IPOTESI CHE IL FENOMENO SIA POCO DISSIPATIVO SI PUÒ APPLICARE BERNOULLI NELLA SEZIONE CONTRATTA (DOVE LE TRAIETTORIE SONO SENSIBILMENTE RETTILINEE E PARALLELE) OPPURE LA SI PUÒ RICAVARE DAL GRAFICO DELL'ENERGIA; SI ARRIVA ALL'INFINITO A MONTE AD h_0.



OPPURE

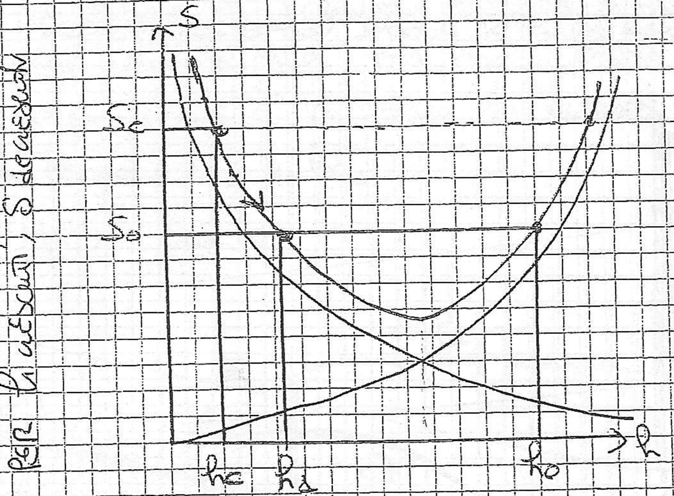
$$E_c = h_c + \frac{V_c^2}{2g} = E_m = h_m + \frac{V_m^2}{2g} \longrightarrow h_m$$

NOTA LA h_c CI RICAVIAMO LA h_m O DAL GRAFICO O DALL'ESPRESSIONE SOPRA.

$$E(h) = h + \frac{Q^2}{A^2 g}$$

Hp: FENOMENO POCO DISSIPATIVO

A valle, per tracciare in maniera definitiva il profilo (e quindi per vedere se si verifica o meno il risalto), è utile fare riferimento al grafico $S = S(h)$



$$S(h) = \gamma h_G A + \frac{\rho Q^2}{A}$$

se l'alveo è rettangolare:

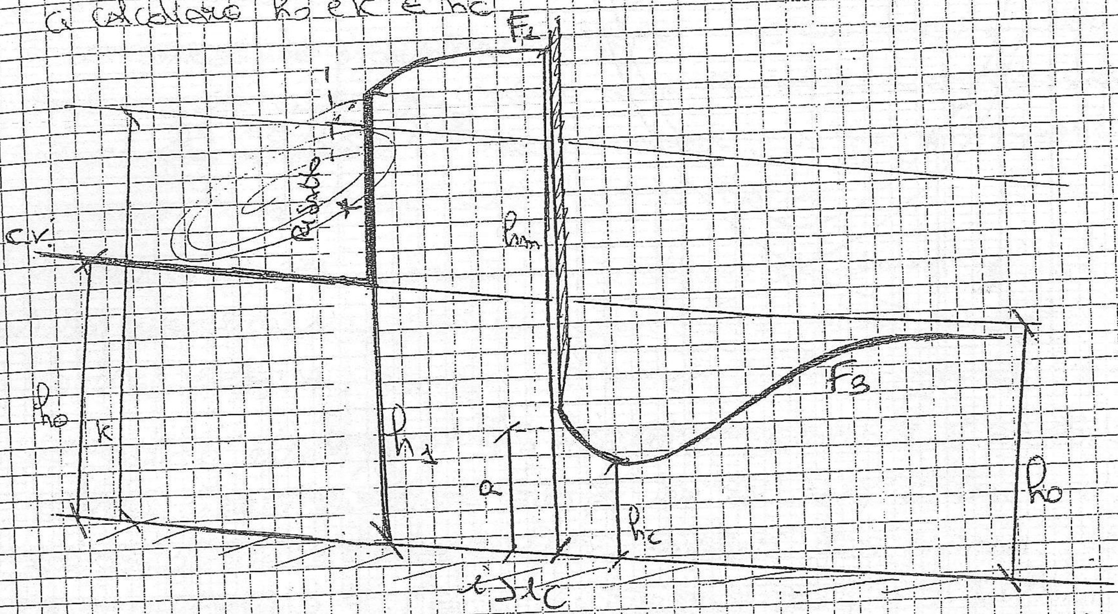
$$S(h) = \gamma \frac{h^2}{2} B + \frac{\rho Q^2}{B h}$$

per diversi valori di h si costruisce per punti la curva $S = S(h)$

Teoricamente il profilo D_3 tenderebbe a k ma in realtà il moto uniforme attraverso k non lo raggiunge mai perché interviene prima il risalto idraulico; bisogna però stabilire in quale sezione si avrà l'inizio del risalto idraulico e a questo proposito ci viene in aiuto il diagramma $S(h)$ tenendo in considerazione che quest'ultimo si verifica nella sezione dove le due spinte (corrente veloce, corrente lenta) si uguagliano; l'altezza h_c avrà una spinta S_c e la sua altezza coniugata è h_0 perciò non ci interessa, partendo da h_0 si ha una spinta S_0 e un'altezza di corrente veloce pari ad h_1 e sarà questa la sezione in cui inizia il risalto poiché qui si avrà l'uguaglianza tra la spinta della corrente lenta e di quella veloce. In questa situazione possiamo dire che il risalto si verifica poiché la spinta della corrente veloce è più forte della spinta della corrente lenta e quindi il risalto viene spinto verso valle; perciò dal profilo D_3 che è un profilo di corrente veloce ritardata (perché le altezze crescono) ci spostiamo lungo la curva $S(h)$ fino a dove le 2 spinte si uguagliano e tracciamo il profilo D_3 fino all'altezza h_1 oltre la quale ci sarà il risalto.

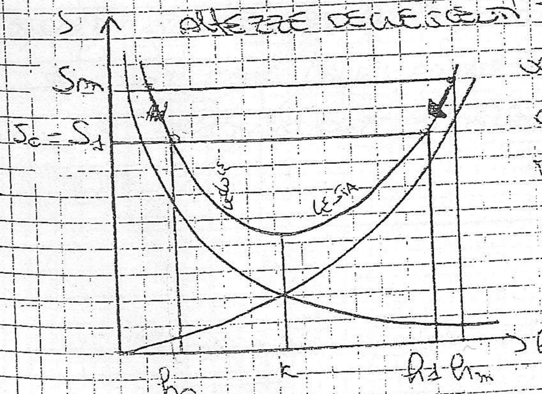
APPLICAZIONE N°2: PROFILI DI CORRENTE IN ALVEO A $i > i_c$

Considerando un alveo rettangolare a forte pendenza nel quale è inserita una paratoia che lascia passare una determinata portata Q nota; stesse considerazioni fatte nell'alveo a debole pendenza, quindi ci calcoliamo h_0 e k e h_c



A valle della paratoia abbiamo un profilo di tipo F_3 = corrente veloce ritardata essendo $h < k$ e $h < h_0$ che tenderà al moto uniforme all'infinito a valle. Per cui partendo dall'altezza nota h_c si costruisce per punti questo profilo.

A monte ci calcoliamo come descritto in precedenza l'altezza h_m a monte della paratoia e tracciamo il profilo di corrente lenta ritardata F_1 (tronco), tale profilo tenderebbe a k con tangente verticale, in realtà non lo raggiunge perché si verifica il fenomeno del risalto idraulico. Per vedere dove la sezione in cui inizia il risalto vediamo attraverso il grafico dove la spinta della corrente di moto uniforme veloce uguaglia quella della corrente lenta; ci spostiamo da h_m per altezze decrescenti fino a che non troviamo la sezione (h_1) che

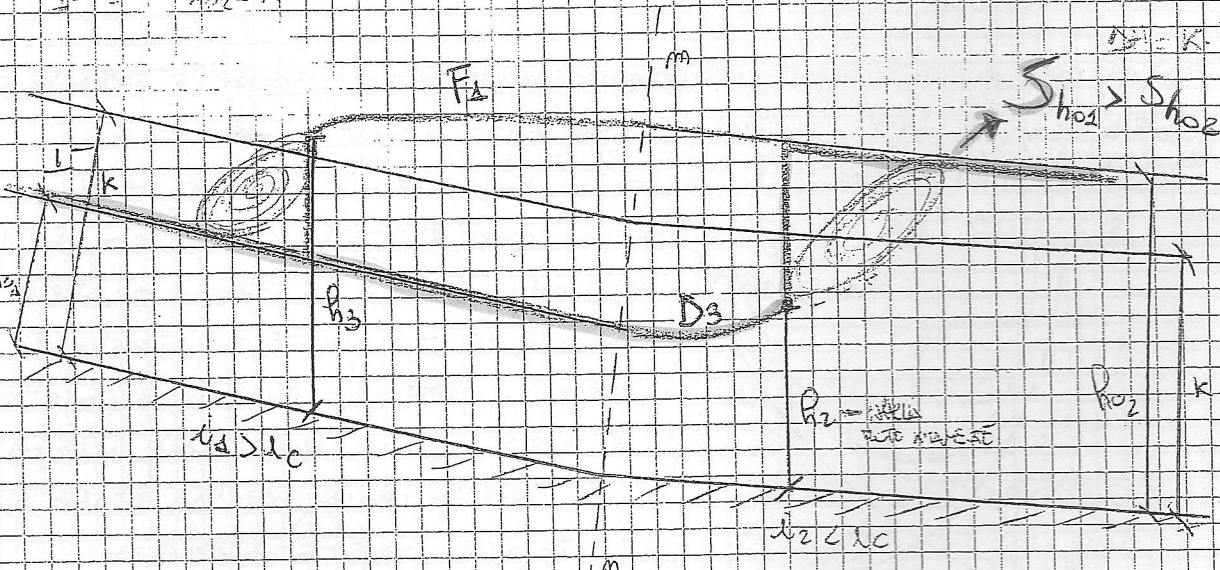


uguaglia la spinta di h_0. Poiché la spinta di valle è maggiore (h_m) di quella di monte (h_0) il risalto viene spinto verso monte.

APPLICAZIONE N°3

CONSIDERIAMO UN ALVEO RETTANGOLARE A FORTE PENDENZA SEGUITO DA UN ALVEO A DEBOLE PENDENZA; SONO NOTE LE PENDENZE i_1, i_2, LA GEOMETRIA E LA PORTATA Q. VOGLIAMO STABILIRE QUALI SONO I PROFILI CHE VENGONO A CREARSI NEI DUE ALVEI, PER CUI LA PRIMA COSA DA FARE È CALCOLARE L'ALTEZZA CRITICA K CHE È LA STESSA PER ENTRAMBI GLI ALVEI E LE ALTEZZE DI MOTO UNIFORME h_{01} E h_{02}.

$\Delta^1 = h_{02} - k$

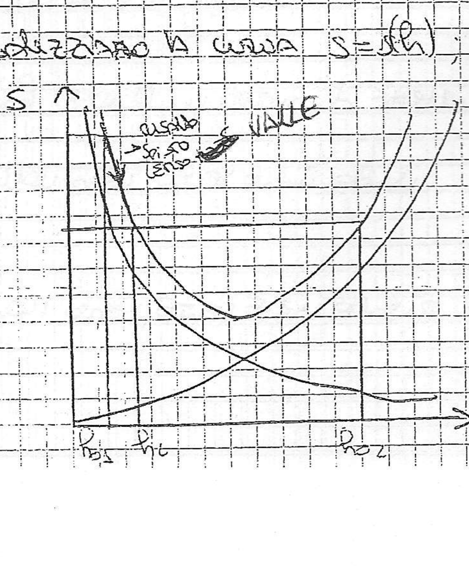


QUANDO UNA CORRENTE VELOCE INCONTRA UNA CORRENTE LENTA SI HA UN RISALTO IDRAULICO; BISOGNA STABILIRE DOVE SI VERIFICA IL RISALTO IDRAULICO, NELLA SEZIONE DELL'ALVEO A FORTE PENDENZA O IN QUELLO A DEBOLE PENDENZA. SI POSSONO VERIFICARE 2 SITUAZIONI:

1) CASO DI RISALTO IDRAULICO A VALLE $i_2 < i_c$ (VIENE SPINTO DALLA CORRENTE VELOCE)

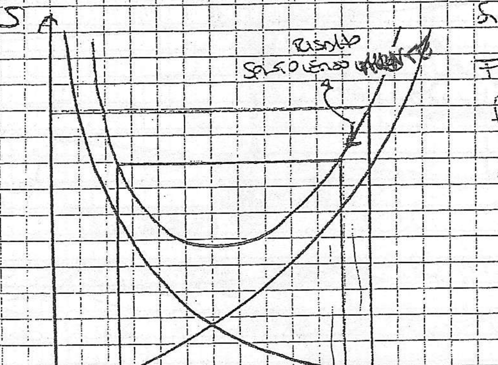
2) CASO DI RISALTO IDRAULICO A MONTE $i_1 > i_c$ (VIENE SPINTO DALLA CORRENTE LENTA)

1) ANALIZZIAMO LA CURVA $S = S(h)$; IL CAMBIO DI PENDENZA PUÒ MANIFESTARE LA SUA INFLUENZA A MONTE DELLA CORRENTE VELOCE PER CUI IL PRIMO CASO È QUELLO IN CUI ABBIAMO IL MOTO UNIFORME DI ALTEZZA h_{01} FINO AL CAMBIO DI PENDENZA, POI POICHÉ SI DEVE RIPRISTINARE IL MOTO UNIFORME DI ALTEZZA h_{02} SI CREA UN PROFILO DI TIPO D3 = CORRENTE VELOCE RITARDATA CHE TENDEREBBE A K



ma non lo raggiunge per cui si verifica il risalto idraulico. Per tracciare il profilo bisogna partire da un'altezza nota in corrispondenza della causa perturbatrice ovvero h_{01} altezza di moto uniforme; bisogna capire adesso in quale sezione si ha il risalto idraulico: il risalto viene spinto verso valle (ovvero per altezze crescenti da h_{01}) perché la spinta della corrente veloce è maggiore di quella che esercita la corrente lenta; ci muoviamo per cui per altezze crescenti (e quindi spinte decrescenti) fino alla sezione in cui le due spinte (corrente veloce e corrente lenta) si uguagliano (in corrispondenza dell'altezza h_2)

2) Nel caso in cui la spinta della corrente lenta è maggiore della spinta della corrente veloce il risalto viene spinto a monte; analizziamo la curva $S = S(h)$; essendo la spinta di h_{02} maggiore della spinta h_{01}



si muoviamo per altezze decrescenti da (h_{02}) fino ad incontrare la sezione di altezza h_3 dove le due spinte si uguagliano. Quindi in definitiva si ha una corrente di moto uniforme h_{01} veloce fino all'altezza h_3 dopo di che si avrà un risalto che porterà la corrente attraverso un profilo di tipo F_1 = corrente lenta ritardata all'altezza di moto uniforme h_{02}

Anche in questo caso il punto di azione della causa perturbatrice è corretto in quanto influenza la corrente lenta da valle verso monte.

Come si fa a capire se si verifica il caso 1) o il caso 2)?
Dipende dall'entità delle spinte (cioè si sposta a valle o a monte a seconda di quale spinta è maggiore). Quindi il risalto si localizza dove la spinta è maggiore!
Dipende quindi dalle spinte dovute alle altezze di moto uniforme h_{01} e h_{02};

se $S_{h_{01}} > S_{h_{02}} \longrightarrow$ 1) caso risalto viene spinto verso valle

se $S_{h_{01}} < S_{h_{02}} \longrightarrow$ 2) caso risalto viene spinto verso monte

Per cui se la spinta della corrente di moto uniforme veloce è maggiore della spinta di moto uniforme lenta il risalto si ha nell'alveo a debole pendenza; se la spinta di moto uniforme lenta è maggiore della spinta di moto uniforme veloce il risalto avviene nell'alveo a forte pendenza; se la spinta della corrente di moto uniforme veloce è uguale alla spinta della corrente di moto uniforme lenta il risalto si avrà proprio in corrispondenza del cambio di pendenza.

NB: $\begin{cases} h_0 > k \rightarrow \text{debole pendenza } i < i_c \rightarrow \text{corrente di moto uniforme lenta} \\ h_0 < k \rightarrow \text{forte pendenza } i > i_c \rightarrow \text{corrente di moto uniforme veloce.} \end{cases}$

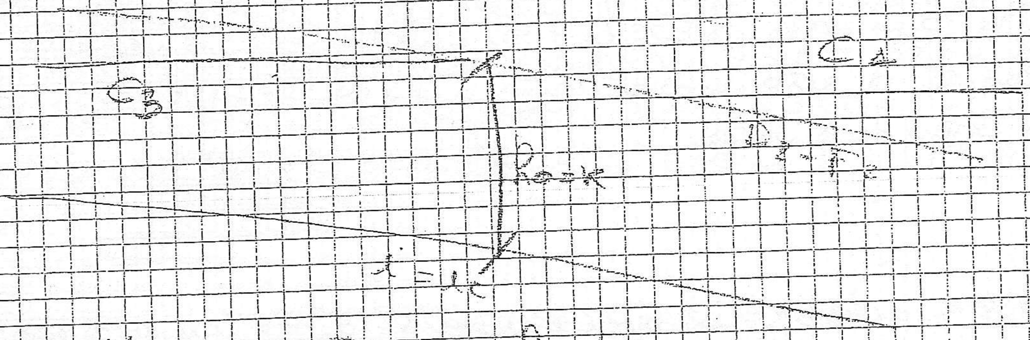
$h_0 = k \rightarrow i = i_c \rightarrow$ moto uniforme allo stato critico

negli alvei a debole pendenza il moto uniforme [illegible]
più comunemente lento [illegible]
[illegible] più adatto negli [illegible] pendenza
il moto uniforme [illegible]
[illegible] corrente [illegible]

- [illegible] negli alvei a
debole pendenza [illegible] negli alvei a forte pendenza
[illegible] il tipo della corrente

Profili in alveo con $i = i_c$ e $C = cost$

coeff. di Chezy



i profili D_2 e F_2 si confondono

C_1 è il caso limite di F_1 e D_1 (per $h > h_0 \equiv k$)

C_3 " " " " F_3 e D_3 (per $h < h_0 \equiv k$)

Corrente veloce

$h_0 < k$

$V_0 > V_c$

$i > i_c$

$\frac{dE}{dh} < 0$

$c < V$

Corrente lenta

$h_0 > k$

$V < V_c$

$i < i_c$

$\frac{dE}{dh} > 0$

$c > V$

$c = \pm \sqrt{gh}$

$J = \frac{Q^2}{A^2 \cdot C^2 \cdot R}$

Tab. 8.1

scarpa	tipo di terreno
1 : 2	conglomerato di tipo quasi roccioso
1 : 1	terreni con sabbia e ghiaia ad elementi grossolani con elevato legante argilloso
3 : 2	terreni meno compatti con granulometria più fine
2 : 1	elementi fini con poco legante

Tab. 8.2

v_l velocità limite (m/s)	tipo di terreno
0,30 ÷ 0,80	terreni da sabbioso finissimo a sabbioso grossolano, a sabbioso argilloso, sino ad argilloso piuttosto compatto
0,80 ÷ 0,81	terreno da argillo-ghiaioso, a ghiaioso grossolano, a detriti
1,40 ÷ 1,80	conglomerati e rocce tenere
2,00 ÷ 3,50	rocce dure
3,50 ÷ 4,50	calcestruzzo

$V_f = 0{,}75 \cdot V_m$

V_f NON DEVE ESSERE MINORE di 0,20 ÷ 0,30 m/s

NON DEVE ESSERE NE TROPPO PICCOLA → DEPOS. di SEDIMENTI, NE TROPPO GRANDE → EROSIONE (PARTICOLARM. SEZ.)