

Capitolo 1. Richiami di teoria elementare

1.1 Cenni di teoria degli insiemi

Il concetto di “insieme” è un concetto primitivo, cioè uno di quei presupposti o assiomi che in matematica costituiscono i fondamenti e dei quali non è data alcuna definizione.

Intuitivamente si può pensare ad un insieme come agli elementi che lo costituiscono, accomunati da una stessa natura o proprietà. Indicheremo gli insiemi con le lettere in maiuscolo (A,B,C,X,Y...) mentre gli elementi di esso verranno indicati in minuscolo ($a, b, c, x, y...$). Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme, scriveremo $a \in A$; per indicare che un elemento non appartiene ad un insieme scriveremo $a \notin A$.

DEFINIZIONE. *L'insieme privo di elementi è detto insieme vuoto e lo indichiamo con il simbolo Φ .*

Dati due insiemi A e B se gli elementi di A appartengono anche all'insieme B ($\forall :=$ per ogni $x \in A \Rightarrow x \in B$) scriveremo che :

$$A \subseteq B \text{ (A è contenuto in B) oppure } B \supseteq A \text{ (B contiene A).}$$

DEFINIZIONE. *A si dice sottoinsieme proprio di B se $A \subseteq B$ ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A ($\exists :=$ esiste) $x \in B$, $|$ ($=$ tale che) $x \notin A$); in tal caso indicheremo $A \subset B$.*

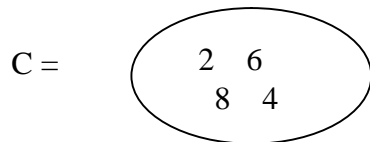
Se accade contemporaneamente che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$ cioè i due insiemi sono uguali. Se A e B non sono uguali scriveremo $A \neq B$ (A diverso da B).

Si noti che ogni insieme A ha come sottoinsiemi A stesso e Φ che vengono chiamati sottoinsiemi banali. Un insieme può essere rappresentato o per elencazione (elencando esplicitamente i suoi elementi) o per proprietà (enunciando la proprietà che i suoi elementi verificano) o tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

ESEMPIO

$$A = \{2,4,6,8\}$$

$$B = \{\text{tutti i numeri interi pari compresi fra 2 ed 8}\}$$



Si noti che se un insieme è costituito da un numero finito di elementi lo si può indicare nei tre modi possibili; se invece è costituito da un numero infinito di elementi è conveniente indicarlo per proprietà o tramite diagramma.

1.1.1 Operazioni tra insiemi

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B si definisce unione tra A e B ($A \cup B$) l'insieme costituito da tutti gli elementi di A e da quelli di B presi una sola volta se eventualmente sono ripetuti:

$$A \cup B = \{x \in A \text{ e/o } x \in B\}.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B si definisce intersezione tra A e B ($A \cap B$) l'insieme costituito dagli elementi che contemporaneamente stanno in A ed in B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ed } x \in B\}.$$

DEFINIZIONE. Dati due insiemi A e B si definisce differenza tra A e B (A/B) l'insieme costituito dagli elementi di A che non appartengono a B :

$$A/B = \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

ESEMPIO

Siano $A = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ $B = \{-3, 0, \sqrt{2}\}$.

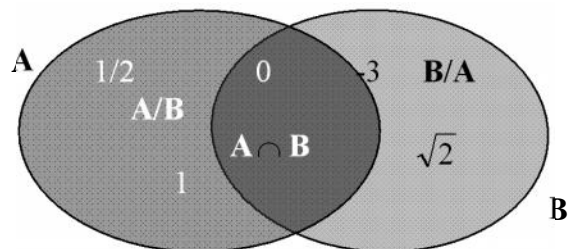
Si ha: $A \cup B = \{-3, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}\}$

$$A \cap B = \{0\}$$

$$A/B = \{\frac{1}{2}, 1\}$$

$$B/A = \{-3, \sqrt{2}\}.$$

Attraverso la rappresentazione grafica dei diagrammi di Eulero-Venn, lo stesso esempio diventa:



Da questo esempio si può notare che $A = (A/B) \cup (A \cap B)$; $A \cup B = B \cup A$ mentre $A/B \neq B/A$; questo significa che le operazioni di unione ed intersezione sono operazioni commutative, mentre la differenza non lo è.

DEFINIZIONE. Dato un insieme A chiameremo insieme delle parti di A , $P(A)$, l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A (compresi quelli banali):

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

ESEMPIO

Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ determinare $P(A)$.

Intanto Φ ed A stesso appartengono a $P(A)$;

i sottoinsiemi formati da un solo elemento sono: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$;

i sottoinsiemi formati da due elementi sono $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$;

i sottoinsiemi formati da tre elementi sono $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$

quindi $P(A) = \{ \quad, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\},$

$\{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \}$; notare che $P(A)$ contiene 16 ($=2^4$) elementi.

OSSERVAZIONE. In generale, se un insieme X ha r elementi allora $P(X)$ avrà 2^r elementi.

Alcune tra le proprietà di cui godono le operazioni tra insiemi sono:

P1: $A \cap A = A$

P2: $A \cap \Phi = \Phi \cap A = \Phi$

P3: $A \cup \Phi = \Phi \cup A = A$

P4: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *proprietà distributiva*

P5: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ “ “

P6: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *proprietà associativa*

P7: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ “ “

P8: $A / (B \cup C) = (A / B) \cap (A / C)$ *formula di De Morgan*

P9: $A / (B \cap C) = (A / B) \cup (A / C)$ “ “

Dimostriamo, ad esempio, la P9, che essendo una uguaglianza insiemistica va provata facendo vedere che preso un qualunque elemento appartenente al primo membro, esso appartiene anche al secondo membro e viceversa.

Sia $x \in A / (B \cap C)$; allora $x \in A$ ed $x \notin B \cap C$, ovvero $x \notin B$ oppure $x \notin C$. Da cui $x \in A$ ed $x \notin B$ implica $x \in (A / B)$; $x \in A$ ed $x \notin C$ implica $x \in (A / C)$.

In definitiva $x \in (A / B)$ oppure $x \in (A / C)$ perciò $x \in (A / B) \cup (A / C)$. Viceversa, sia $x \in (A / B) \cup (A / C)$: allora $x \in (A / B)$ oppure $x \in (A / C)$. Se $x \in (A / B)$ allora $x \in A$ ed $x \notin B$; se $x \in (A / C)$ allora $x \in A$ ma $x \notin C$.

Da ciò $x \notin (B \cap C)$ ovvero $x \in A / (B \cap C)$.

DEFINIZIONE. Si dice prodotto cartesiano di due insiemi A e B (e si denota con $A \times B$) l'insieme formato dalle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

1.2 Teoria dei numeri

Consideriamo adesso particolari insiemi: gli insiemi numerici.

Indichiamo con \mathbb{N} l'insieme dei *numeri naturali*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\};$$

in tale insieme vengono definite le operazioni algebriche elementari dirette (somma e prodotto) e le relative operazioni inverse (differenza e divisione).

Osserviamo che le operazioni inverse non sempre sono eseguibili, infatti dati a e b appartenenti ad \mathbb{N} la loro differenza è quel numero naturale c (se esiste) tale che $c + b = a$.

È chiaro che se $a \leq b$ allora $\nexists c \in \mathbb{N}: c + b = a$ perché per ogni c intero, $c + b > b \geq a \Rightarrow c + b > a$.

Analogamente dati a e b interi non è detto che esista c (risultato della divisione di a per b) tale che $c \cdot b = a$, ovvero che a sia multiplo di b .

Dato che non è possibile in \mathbb{N} effettuare tutte le operazioni di base, nel senso che il risultato non è detto che sia un numero intero, viene introdotto l'insieme dei numeri *interi relativi* \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}.$$

Si guadagna così l'operazione di sottrazione, oltre le due operazioni dirette; ma ancora non è detto che il quoto di due interi relativi sia ancora dello stesso tipo.

Per tale motivo viene introdotto l'insieme \mathbb{Q} dei *numeri razionali*, ossia delle frazioni aventi numeratore un intero relativo qualsiasi, e per denominatore un intero relativo diverso da zero

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

È chiaro che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ nel sistema di numerazione decimale si può scrivere come $\pm M, c_1 c_2 \dots c_r \dots c_1 c_2 \dots c_r = \pm M, \overline{c_1 c_2 \dots c_r}$ dove M è un numero naturale, c_1, c_2, \dots, c_r sono numeri interi compresi tra 0 e 9 e la barra sopra $c_1 c_2 \dots c_r$ indica la periodicità, ovvero il loro ripetersi nella numerazione decimale.

L'insieme \mathbb{Q} ci permette di eseguire tutte le operazioni algebriche di base; ricordiamo che dati a, b, c, d elementi di \mathbb{Z} con c e d non nulli si ha:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 0 \Leftrightarrow ad > bc.$$

Tuttavia si potrebbe provare che $\nexists r \in \mathbb{Q}: r^2 = 2$, mentre vedremo che un numero che verifica la suddetta eguaglianza è la radice quadrata aritmetica di 2 ($\sqrt{2}$).

Pertanto, si definisce \mathbb{R} l'insieme dei *numeri reali*, ampliando \mathbb{Q} con quei numeri che non si possono esprimere sotto forma di frazione, come $\sqrt{2}, \pi, e$ (*numeri irrazionali*):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, \pi, e, \dots\}.$$

Chiameremo numero reale il seguente simbolo: $\pm M, c_1 c_2 \dots c_r \dots$ osservando che se la successione di cifre decimali dopo la virgola è periodica il numero è reale razionale, altrimenti il numero è irrazionale.

Lo zero avrà la seguente rappresentazione $0,00000\dots$; mentre il numero reale si dirà positivo o negativo se il segno che lo precede è + oppure -.

Dato a numero reale si dice opposto del numero a lo stesso numero col segno cambiato ($-a$). Due numeri reali a e b si dicono uguali se hanno lo stesso segno, la stessa parte intera e la stessa successione di cifre decimale, ovvero se, sempre avendo lo stesso segno uno dei due numeri è periodico di periodo 9 e l'altro si ottiene da questo sostituendo il 9 con 0 ed aumentando di una unità la cifra che precede il periodo 9, per esempio $+5,319999\dots = +5,32$.

L'uguaglianza fra numeri reali gode delle seguenti tre proprietà:

- P1: *riflessiva* : $a = a, \forall a \in \mathbb{R}$
 P2: *simmetrica* : $a = b \Rightarrow b = a, \forall a, b \in \mathbb{R}$
 P3: *transitiva* : $a = b, b = c \Rightarrow a = c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per confrontare due numeri reali distinti non negativi diremo che a è minore di b e scriveremo $a < b$ se la parte intera di a è minore della parte intera di b ovvero se avendo la stessa parte intera la prima cifra decimale di a è minore della corrispondente cifra decimale di b e così via. Ovviamente $a > 0 \quad \forall a$ reale positivo .

Se a e b sono entrambi reali negativi diremo che a è minore di b se $-b < -a$. Si deduce che ogni numero reale non negativo è maggiore di qualunque numero reale negativo.

Ricordiamo che la relazione di confronto introdotta in \mathbb{R} gode delle seguenti proprietà :

- P1: *riflessiva* : $a \leq a, \forall a \in \mathbb{R}$
 P2: *antisimmetrica* : $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in \mathbb{R}$
 P3: *transitiva* : $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
 P4: *tricotomia*: se $a \neq b \Rightarrow a < b$ oppure $b < a$
 P5: se $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
 P6: se $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c & \text{se } c \geq 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c & \text{se } c < 0 \end{cases}$
 P7: se a e b sono concordi (discordi) $\Rightarrow a \cdot b \geq 0$ ($a \cdot b \leq 0$)
 P8: *Assioma di completezza* : siano A e B sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R} , tali che $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$. Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$.

In \mathbb{R} definiamo le operazioni di somma e prodotto che godono delle seguenti proprietà:

- P1: $a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a$ *proprietà commutativa*
 P2: $(a + b) + c = a + (b + c); \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *proprietà associativa*
 P3: $a + 0 = a \quad ; \quad a \cdot 1 = a$ *(esistenza dell'elemento neutro)*
 P4: $a + (-a) = (-a) + a = 0, \quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ $(\frac{1}{a}$ è il reciproco di $a \neq 0$)
 P5: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ *proprietà distributiva.*

Le operazioni inverse sono così definite:

$$a - b = a + (-b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$$

Osserviamo che :

1. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0;$
2. $0 < a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0.$

1.3 Valore assoluto

DEFINIZIONE. Si dice *valore assoluto del numero reale a* il numero non negativo così definito:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Da questa definizione si hanno le seguenti proprietà :

P1: $\forall a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

P2: $\forall a, x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ oppure } x \geq a$

P3: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

P4: $|a \pm b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \text{prima disuguaglianza triangolare}$

P5: $|a \pm b| \geq ||a| - |b|| \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \text{seconda disuguaglianza triangolare}$

P6: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

P7: $|a| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$

P8: $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$

P9: $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

ESEMPI

- $|-2 \cdot 5| = |-10| = 10$ e $|-2||5| = 2 \cdot 5 = 10$
- $|-2 + 3| = 1 < |-2| + |3| = 5$
- $|3 - (-2)| = |5| > ||3| - |-2|| = |3 - 2| = 1.$

1.4 Elevamento a potenza

Assegnati due numeri reali α e β , cerchiamo di dare significato al simbolo α^β .

Procediamo per passi:

1. sia $\beta = n$ numero naturale; definiamo $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n \text{ volte}}$ ed $\alpha^0 = 1$ ($\alpha \neq 0$).
2. sia $\beta = m$ numero intero relativo, con m non negativo ed $\alpha \neq 0$, definiamo $\alpha^m = \frac{1}{\alpha^{-m}}$.
3. sia $\beta = \frac{m}{n}$ numero razionale; per definire la potenza $\alpha^{\frac{m}{n}}$ introduciamo la radice n -esima di un numero reale.

1.4.1 Radice n -esima di un numero reale

Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

DEFINIZIONE. Si chiama radice n -esima aritmetica di a ($\sqrt[n]{a}$) quel unico numero reale positivo b la cui potenza n -esima da a : $b^n = a$.

Si prova che un siffatto numero b esiste. Consideriamo adesso l'equazione $x^n = a$ con $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Tale equazione ammette o meno soluzioni nell'incognita reale x in funzione di a ed n , infatti:

1. se $a > 0$, n intero pari $n > 1$, l'equazione $x^n = a$ ammette in \mathbb{R} , come uniche soluzioni, la radice n -esima aritmetica di a ($b = \sqrt[n]{a}$) e l'opposto della radice n -esima aritmetica di a ($b = -\sqrt[n]{a}$);
2. se $a > 0$, n intero dispari $n > 1$, l'equazione $x^n = a$ ammette in \mathbb{R} una ed una sola soluzione data dalla radice n -esima aritmetica di a ($b = \sqrt[n]{a}$);
3. se $a = 0$, n intero $n > 1$, l'equazione $x^n = 0$ ammette in \mathbb{R} una ed una sola soluzione che è lo zero;
4. se $a < 0$, n intero dispari $n > 1$, l'equazione $x^n = a$ ammette in \mathbb{R} una ed una sola soluzione (negativa) data dall'opposto della radice n -esima aritmetica di $-a$ ($b = -\sqrt[n]{-a}$);
5. se $a < 0$, n intero pari $n > 1$, in tal caso l'equazione $x^n = a$ non ammette soluzioni in \mathbb{R} .

DEFINIZIONE: si dice radice n -esima di un numero reale ogni soluzione, se esiste, dell'equazione $x^n = a$, con $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

1.4.2 Proprietà della radice n -esima

P1: $(\sqrt[n]{a})^n = a, \forall a \geq 0$ ed n intero $n > 1$, e $\forall a < 0$ ed n intero dispari > 1 .

P2: se $a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 0$

se $a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 0$

se $a < 0, n$ dispari $\Rightarrow \sqrt[n]{a} < 0$

P3: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ con n dispari.

Si ha che $\sqrt{x^2} = |x|$, pertanto se $\alpha \geq 0$ definiamo $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = (\sqrt[n]{\alpha^m})$.

Osserviamo che $\alpha^{\frac{m}{n}} \geq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}_0^+$ ed $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.

Utilizzando l'assioma di completezza è possibile estendere la definizione di α^β con $\beta \in \mathbb{R}$ ed $\alpha > 0$.

Elenchiamo alcune proprietà delle potenze:

$$P1: \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$$

$$P2: (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$$

$$P3: \alpha^\beta > 0$$

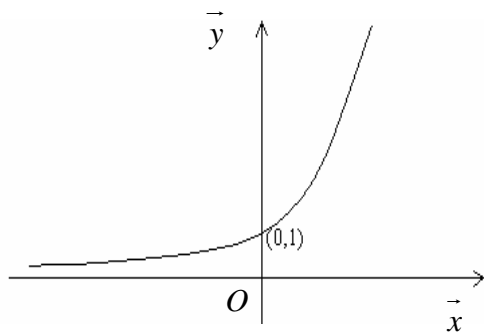
$$P4: \alpha > 1, \beta < \gamma \Leftrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$$

$$P5: 0 < \alpha < 1, \beta < \gamma \Leftrightarrow \alpha^\beta > \alpha^\gamma$$

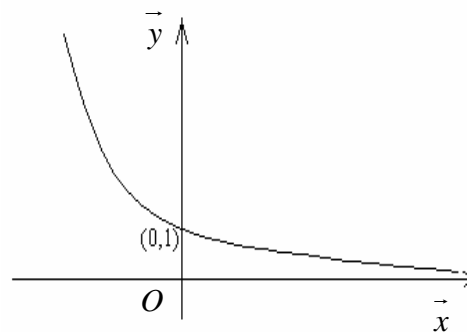
$$P6: \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma = \frac{\alpha^\gamma}{\beta^\gamma}$$

$$P7: (\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$$

$$P8: \text{se } 0 < \alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha^\gamma < \beta^\gamma & \text{se } \gamma > 0 \\ \alpha^\gamma = 1 & \text{se } \gamma = 0 \\ \alpha^\gamma > \beta^\gamma & \text{se } \gamma < 0 \end{cases}.$$



(a)



(b)

Figura 1.1 Grafico della funzione esponenziale a^x : (a) caso $a > 1$, (b) caso $0 < a < 1$.

ESEMPI

- $(a^3)^4 = a^{12}$; $[(x^3)^7] = x^{105}$
- $c^2 \cdot c^5 \cdot c^3 = c^{10}$; $\frac{m^{12}}{m^7} = m^5$; $[(s)^3]^7 = s^{21}$
- $k^0 = 1$; $b^1 = b$; $z^{-4} = \frac{1}{z^4}$
- $(3 \cdot a \cdot b \cdot x)^7 = 3^7 \cdot a^7 \cdot b^7 \cdot x^7$; $\left(\frac{g}{h}\right)^3 = \frac{g^3}{h^3}$.

1.5 Logaritmo

DEFINIZIONE. Dati a e b numeri reali $a, b > 0$, $a \neq 1$, si definisce logaritmo di b in base a , e lo si indica con la scrittura $\log_a b$, l'unico numero reale soluzione dell'equazione $a^x = b$.

Si può provare che un siffatto numero esiste e, ovviamente, risulta $a^{(\log_a b)} = b$.

Elenchiamo alcune proprietà del logaritmo:

P1: $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$

P2: $p = \log_a (a)^p$

P3: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

P4: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

P5: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ (formula di cambiamento di base)

P6: $a > 1$, $b < c \Leftrightarrow \log_a b < \log_a c$

P7: $0 < a < 1$, $b < c \Leftrightarrow \log_a b > \log_a c$.

Se $a = e$ il logaritmo si dice naturale o neperiano e si indica con $\log a$ oppure $\lg a$; invece se $a = 10$ i logaritmi si dicono decimali e si indicano con $\text{Log } a$.

Nell'espressione $\log_a b = \pm M, c_1 c_2 \dots$ la quantità $\pm M$ si dice la *caratteristica* del logaritmo mentre la quantità $c_1 c_2 \dots$ si chiama la *mantissa* del logaritmo.

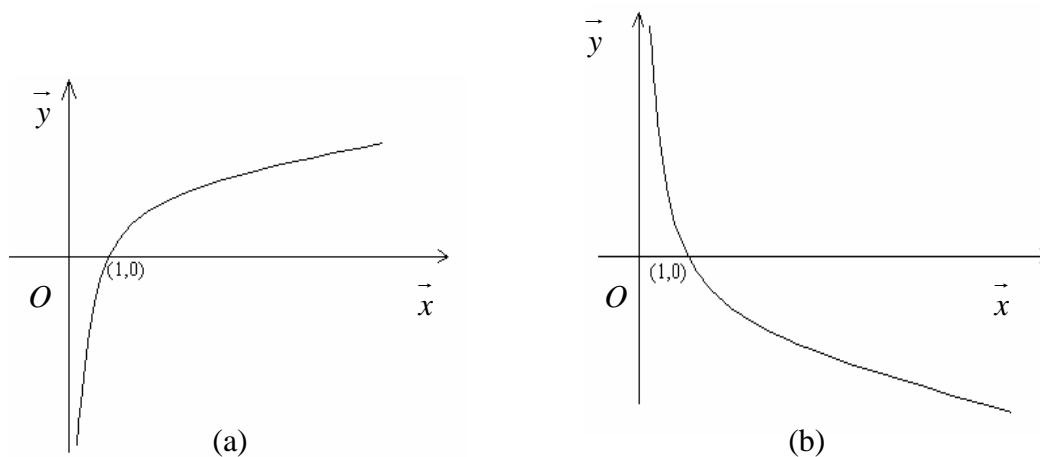


Figura 1.2 Grafico della funzione logaritmica $\log_a x$: (a) caso $a > 1$, (b) caso $0 < a < 1$.

ESEMPI

- $\log_2 8 = 3$ perchè $2^3 = 8$; $\log_5 25 = 2$ perchè $5^2 = 25$;
- $\log_{10} 10000 = 4$ perchè $10^4 = 10000$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ perchè $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;
- $\log_{\frac{2}{5}} \frac{625}{16} = -4$ perchè $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \frac{625}{16}$; $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ perchè $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$;

- $\log_2 4 \cdot 16 \cdot 128 = \log_2 4 + \log_2 16 + \log_2 128$; $\log_3 \frac{81}{243} = \log_3 81 - \log_3 243$
- $\log_2 16^5 = 5 \cdot \log_2 16$; $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{1}{3} \cdot \log_3 9$.

1.6 Cenni di trigonometria; misura in radianti di un angolo ; sin ; cos ; tg

Sia α un angolo del piano con origine in O:

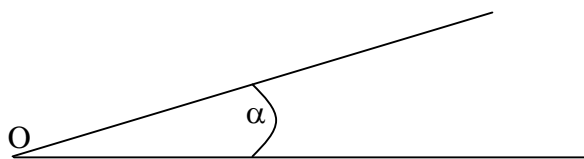


Figura 1.3

Consideriamo due circonferenze centrate in O di raggio rispettivamente r ed R (cfr. Figura 1.4) e, indichiamo con l e L , rispettivamente le lunghezze degli archi intercettati dall'angolo α su di esse:

Risulta :

$$\frac{l}{r} = \frac{L}{R}.$$

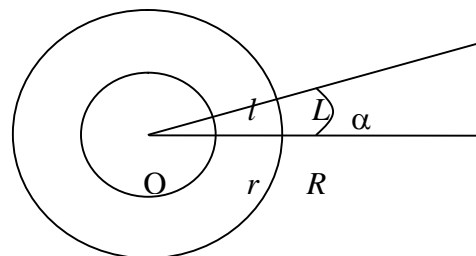


Figura 1.4

Tale numero, che non dipende dalla circonferenza centrata in O, si chiama la misura in radianti dell'angolo α . Pertanto un angolo avrà misura di 1 radiante se la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato è uguale al raggio della stessa circonferenza.

La misura in radianti dell'angolo giro è 2π da cui deduciamo che l'angolo piatto è π radianti, l'angolo retto è $\pi/2$ radianti e più in generale la formula che ci permetterà di passare dalla misura in radianti dell'angolo (α_r) alla misura in gradi (α_g) e viceversa:

$$\frac{\alpha_g}{360^\circ} = \frac{\alpha_r}{2\pi}.$$

Dalla precedente proporzione segue

Tabella 1.1

misura dell'angolo in gradi sessagesimali	misura dell'angolo in radianti
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$
270°	$3\pi/2$

Consideriamo ora, un sistema di riferimento cartesiano (cfr il Capitolo 3) e riportiamo l'angolo α in modo che la sua origine coincida con quella del sistema di riferimento e una delle due semirette che lo generano giaccia sull'asse \vec{x} (cfr. Figura 1.5). Si conviene che la misura di α sia positiva se la semiretta che genera l'angolo e giace sull'asse \vec{x} ruota in verso antiorario per sovrapporsi all'altra semiretta (in caso contrario la misura di α sarà negativa).

Sia Γ la circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio unitario (circonferenza trigonometrica):

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Diciamo B il punto sulla circonferenza intersezione con la semiretta libera che genera l'angolo α . Ebbene, l'ordinata (\overline{BH}) e l'ascissa (\overline{OH}) del punto B si chiamano rispettivamente seno di ($\sin \alpha$) e coseno di ($\cos \alpha$).

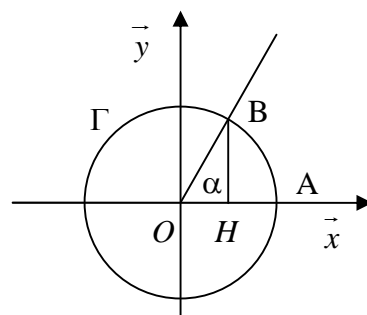


Figura 1.5

Evidentemente:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ e si ha:}$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha ; \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di cateti BH, OH, ed ipotenusa uguale ad uno, si trova la relazione fondamentale:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definiamo tangente dell'angolo ($\text{tg } \alpha$) il seguente rapporto :

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

che ovviamente ha senso se

$$\cos \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Geometricamente la tangente di rappresenta l'ordinata del punto T intersezione tra la retta tangente al trigonometrico in A e la semiretta libera che genera ($\text{tg } \overline{AT}$)(cfr. Figura 1.6).

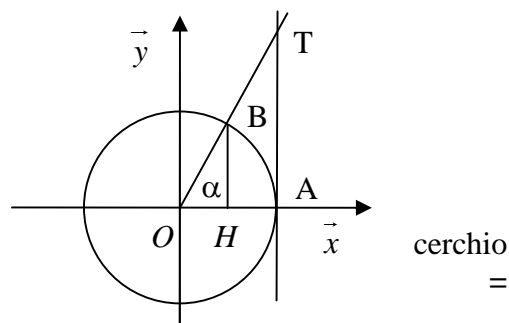


Figura 1.6

Riportiamo qui di seguito una tabella con i valori di $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\text{tg} \alpha$ per alcuni angoli di uso più frequente:

Tabella 1.2

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\text{tg} \alpha$
$15^\circ = \pi/12$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$2 - \sqrt{3}$
$18^\circ = \pi/10$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$
$30^\circ = \pi/6$	$1/2$		$\sqrt{3}/3$

		$\sqrt{3}/2$	
$45^\circ = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60^\circ = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$90^\circ = \pi/2$	1	0	non esiste
$180^\circ = \pi$	0	-1	0
$270^\circ = 3/2\pi$	-1	0	non esiste
$0^\circ = 360^\circ = 2\pi$	0	1	0

Ricordiamo, inoltre:

- *formule di addizione e sottrazione:*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta ;$$

- *formule di bisezione:*

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad , \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} ;$$

- *formule di duplicazione :*

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad , \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} .$$

- *formule parametriche:*

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} .$$

I grafici delle funzioni trigonometriche sono i seguenti:

- $y = \sin x$ è una funzione periodica di periodo 2π definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, il codominio è $[-1, 1]$. Il grafico interseca l'asse x nei punti della forma $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

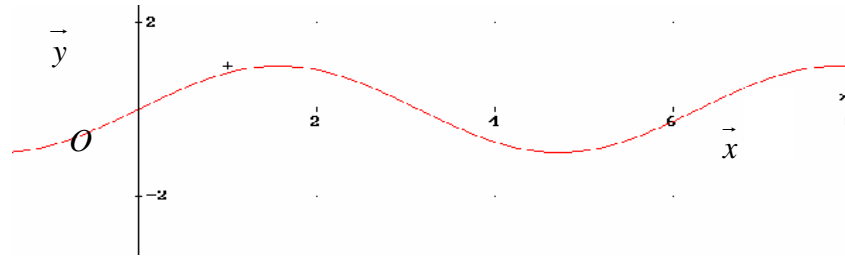


Figura 1.7 Grafico di $\sin x$.

- $y = \cos x$ è una funzione periodica di periodo 2π definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, il codominio è $[-1,1]$. Il grafico interseca l'asse x nei punti della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

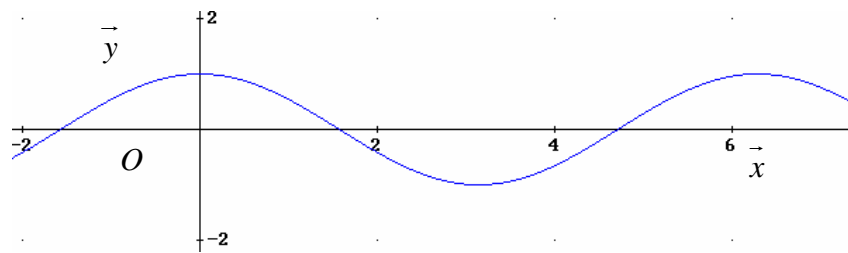


Figura 1.8 Grafico di $\cos x$.

- $y = \operatorname{tg} x$, definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e codominio \mathbb{R} , è una funzione periodica di periodo π . Il suo grafico interseca l'asse x nei punti della forma $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

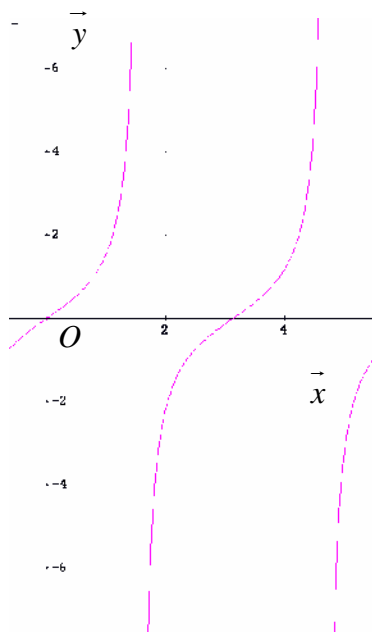


Figura 1.9 Grafico di $\operatorname{tg} x$.

1.7 Polinomi, equazioni e disequazioni algebriche

DEFINIZIONE. Si chiama *polinomio algebrico di grado (o ordine) n* una combinazione lineare di potenze intere della variabile x del tipo :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad a_n \neq 0.$$

Osserviamo che il grado del polinomio ($\deg p(x)$) è la massima potenza con cui compare la variabile x , ad esempio

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$$

è un polinomio di ordine 3 ($\deg p(x)=3$). Se $p(x) = a_0$ il suo grado è zero.

Si chiama *valore del polinomio* per $x = \alpha$ e lo si indica con $p(\alpha)$ l'espressione numerica

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n.$$

Se $p(\alpha) = 0$, si chiama *radice del polinomio*.

Assegnato un polinomio algebrico $p(x)$ di grado n si chiama *equazione algebrica* associata al polinomio, e la si indica con $p(x)=0$, il problema della ricerca delle radici del polinomio.

Osserviamo che il numero delle radici dell'equazione algebrica è uguale all'ordine del polinomio contando le radici, anche se complesse e molteplici (*Teorema fondamentale dell'algebra*).

Teorema 1.1 (Γ^0 Principio d'identità dei polinomi) *Due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono uguali se hanno lo stesso ordine, ed i coefficienti corrispondenti uguali.*

1.7.1 Divisione tra polinomi

Sussiste il seguente

Teorema 1.2 *Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi con $\deg(A(x)) \geq \deg(B(x))$. Allora esiste univocamente determinata la coppia di polinomi $Q(x)$ (quoziente) ed $R(x)$ (resto) tali che*

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{con} \quad \deg(R(x)) < \deg(B(x)).$$

Osserviamo che $x = \alpha$ è radice di $p(x)$ se e solo se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)$ (cioè il resto della divisione deve valere zero).

ESEMPIO

Siano $A(x) = x^3 - x^2 + 3$ e $B(x) = 2x - 1$;

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 0 + 3 & 2x - 1 \\ x^3 - \frac{x^2}{2} & \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \\ \hline & \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} \end{array}$$

eseguiamo la divisione

$$\begin{array}{r} 0 - \frac{x^2}{2} + 0 + 3 \\ - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \\ \hline 0 - \frac{x}{4} + 3 \end{array}$$

da cui otteniamo: $Q(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}$ ed $R(x) = -\frac{x}{4} + 3$.

Lasciamo al lettore la verifica che: $(x^3 - x^2 + 3) = (2x - 1)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right) + \left(-\frac{x}{4} + 3\right)$.

Osserviamo infine che note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ le n radici di $p(x)=0$ (eventualmente non tutte distinte e non tutte reali) il polinomio ammette l'unica decomposizione

$$p(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n).$$

ESEMPIO

Sia $p(x) = x^2 - 1$. Esso ammette come radici $x = \pm 1$ e quindi si decompone in $(x - 1)(x + 1)$.

1.7.2 Equazione algebrica di primo ordine

Si definisce *equazione algebrica di primo ordine* l'equazione :

$$ax + b = 0 \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Utilizzando le proprietà dei numeri reali tale equazione ammette l'unica soluzione $x = -\frac{b}{a}$.

Infatti: da $ax + b = 0$ aggiungendo ad ambo i membri $-b$ risulta $ax = -b$ da cui dividendo entrambi i membri per $a \neq 0$ si ottiene $x = -\frac{b}{a}$. D'altra parte è facile verificare che $x = -\frac{b}{a}$ soddisfa la nostra equazione.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione $-3x + 5 = 0$.

Aggiungendo ad ambo i membri -5 e dividendo per -3 si ottiene la soluzione $x = \frac{5}{3}$.

1.7.3 Equazione algebrica di secondo ordine

Si definisce *equazione algebrica del secondo ordine* l'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Si chiama *discriminante* dell'equazione (e lo si indica con il simbolo Δ) il numero $\Delta = b^2 - 4ac$.

La risoluzione dell'equazione è legata al segno di Δ . Si prova che :

- Se $\Delta > 0$ l'equazione ammette due radici reali e distinte fornite dalla seguente formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e quindi} \quad ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

- Se $\Delta = 0$ l'equazione ammette due radici reali e coincidenti date da

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{ed} \quad ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Se $\Delta < 0$ l'equazione non ammette radici reali (ma ovviamente ne ammetterà due complesse coniugate).

OSSERVAZIONE. Assegnato il polinomio algebrico $p(x)$, il problema della risoluzione di $p(x) \neq 0$ si affronta determinando le soluzioni di $p(x)=0$ ed escludendo tali valori.

ESEMPIO

Per risolvere $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, basterà risolvere $x^2 - 3x + 2 = 0$. Tale equazione ha come soluzioni

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

per cui $x \neq 1, x \neq 2$ sono le soluzioni del nostro problema.

1.7.4 Sistemi di equazioni

Il problema della risoluzione di due o più equazioni, ovvero la ricerca dei valori da dare alla variabile x per soddisfare contemporaneamente le equazioni assegnate $p_1(x) = 0, \dots, p_r(x) = 0$ si chiama *sistema* e lo si indica nella maniera seguente:

$$\begin{cases} p_1(x) = 0 \\ \vdots \\ p_r(x) = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases},$$

la prima equazione ha come soluzioni $x = \pm 1$ mentre la seconda equazione ha soluzione $x = 1$. Quindi il sistema ammette come unica soluzione $x = 1$.

OSSERVAZIONE. Un sistema potrebbe non avere soluzioni, quando le singole equazioni che lo compongono non hanno soluzioni o non hanno soluzioni a comune. Un sistema, infine, potrebbe presentarsi nel seguente modo :

$$\begin{cases} p(x) = 0 \\ \dots \\ q(x) \neq 0 \end{cases}$$

1.7.5 Equazioni fratte

Assegnati i polinomi $p(x)$ e $q(x)$, si chiama *equazione fratta* l'equazione $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$.

Essa è equivalente al sistema: $\begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0 \end{cases}$.

ESEMPIO

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, & x = 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

quindi l'unica soluzione dell'equazione è $x = 2$.

1.7.6 Disequazioni algebriche

Sia $p(x)$ un polinomio di ordine n . Si chiama disequazione algebrica il problema della ricerca dei valori di x per cui è soddisfatta una delle seguenti relazioni:

$$p(x) > 0; \quad p(x) \geq 0; \quad p(x) < 0; \quad p(x) \leq 0.$$

Osserviamo che sarà sufficiente saper risolvere ad esempio la disequazione $p(x) > 0$ (ed è questo il caso in cui, in seguito, analizzeremo la risoluzione dei vari tipi di disequazione).

Infatti:

$$p(x) < 0 \Leftrightarrow -p(x) > 0; \quad p(x) \geq 0 \Leftrightarrow p(x) > 0 \text{ e } p(x) = 0.$$

1.7.7 Disequazione algebrica di primo ordine

La forma generale di una *disequazione algebrica di primo ordine* è del tipo:

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0.$$

Dalle proprietà dei numeri reali $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x < -\frac{b}{a} & \text{se } a < 0 \end{cases}.$

Risulta evidente che, al contrario dell'equazione di primo ordine che ammette una sola soluzione, le soluzioni della nostra disequazione sono infinite.

1.7.8 Disequazione algebrica di secondo ordine

La forma generale di una *disequazione algebrica di secondo ordine* è del tipo:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a \neq 0.$$

Detto $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante dell'equazione associata alla disequazione considerata, si possono presentare tre casi:

- Se $\Delta > 0$ l'equazione associata ammette due radici reali e distinte: $x_1 < x_2$. In tal caso le soluzioni della disequazione si ottengono seguendo la regola: il segno del trinomio $ax^2 + bx + c$ è uguale al segno del coefficiente a per le x tali che $x < x_1$, $x > x_2$; invece il segno del trinomio è opposto al segno di a per le x tali che $x_1 < x < x_2$.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione: $x^2 + x - 2 > 0$.

Risulta $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ per cui $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$ sono le soluzioni

dell'equazione associata; dunque essendo il coefficiente della x di secondo grado positivo come il segno del trinomio, le soluzioni della disequazione sono:

$$x < -2, \quad x > 1.$$

- Se $\Delta = 0$ l'equazione associata ammette come unica radice $x = -\frac{b}{2a}$.

In tal caso il segno del trinomio è lo stesso del segno di a , $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$.

ESEMPI

- a. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - 2x + 1 > 0$.

Risulta $\Delta = 4 - 4 = 0$ per cui $x = 1$ è la soluzione dell'equazione associata; dunque le soluzioni della disequazione sono $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.

- b. Risolvere la seguente disequazione: $-x^2 + 4x - 4 > 0$.

Risulta $\Delta = 16 - 16 = 0$ per cui $x = 2$ è la soluzione dell'equazione associata; dunque la disequazione non ammette soluzioni.

- Se $\Delta < 0$ l'equazione associata alla disequazione non ammette soluzioni reali, quindi il segno del trinomio è uguale al segno di a .

ESEMPI

- a. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 + x + 1 > 0$.

Risulta $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$; dunque le soluzioni della disequazione sono $\forall x \in \mathbb{R}$.

- b. Risolvere la seguente disequazione: $-x^2 + x - 1 > 0$.

Risulta $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$; dunque la disequazione non ammette soluzioni.

1.7.9 Sistemi di disequazioni

Si chiama *sistema di disequazioni* il problema della ricerca dei valori di x per cui risultino contemporaneamente soddisfatte un numero finito di disequazioni assegnate:

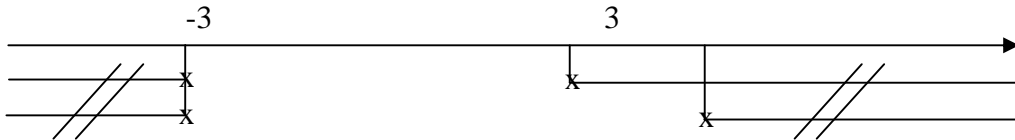
$$\begin{cases} p_1(x) < 0 \\ p_2(x) \geq 0 \\ \vdots \\ p_r(x) > 0 \end{cases}.$$

ESEMPI

- a. Risolvere il sistema :

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) > 0 \\ \Delta = 49 - 48 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3, & x_2 = 3 \\ x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3, & x > 3 \\ x < 3, & x > 4 \end{cases} .$$

Graficamente si ha:



quindi, il sistema dato ha come soluzioni: $x < -3, x > 4$.

b. Risolvere la disequazione $|x+1| + x^2 \leq 4$.

Questa disequazione è equivalente all'unione dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1+x^2 \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1+x^2 \leq 4 \end{cases}$$

che hanno come soluzioni

$$-1 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \cup \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \leq x \leq -1$$

per cui le soluzioni della disequazione iniziale sono

$$\frac{1 - \sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} .$$

c. Risolvere la seguente disequazione : $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12} > 0$.

La disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3, & x > 3 \\ x < 3, & x > 4 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 < x < 3 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x < -3, x > 4) \cup (\Phi) ,$$

per cui le soluzioni della disequazione iniziale sono: $x < -3, x > 4$.

1.7.10 Equazioni e disequazioni irrazionali

Si definisce *equazione irrazionale* un'equazione del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $A(x)$ e $B(x)$ sono due polinomi nella variabile x . La risoluzione di tale equazione dipende dall'indice n .

Precisamente l'equazione considerata è equivalente (a meno di verifica finale) a:

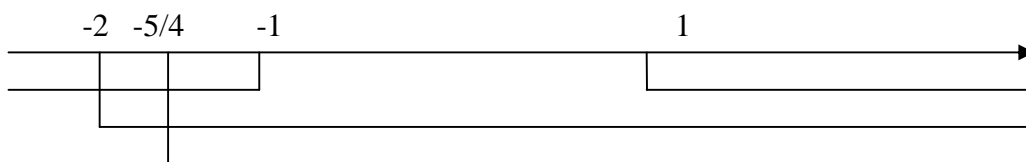
- se n è pari al sistema:
$$\begin{cases} A(x) = [B(x)]^n \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$
- se n è dispari all'equazione: $A(x) = [B(x)]^n$.

ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione: $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$

Essa è equivalente al sistema:
$$\begin{cases} x^2 - 1 = (x + 2)^2 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 0 \\ x \leq -1, \quad x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ x \leq -1, \quad x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$
 Graficamente si ha:



per cui l'unica soluzione è $x = -\frac{5}{4}$; lasciamo al lettore la verifica finale (osserva che l'elevamento a potenza di un polinomio porta generalmente all'introduzione di soluzioni spurie).

Un tipo di *disequazione irrazionale* è:

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x).$$

Si possono presentare due diversi casi:

- Se n è dispari, occorre risolvere la disequazione: $A(x) > [B(x)]^n$
- Se n è pari, occorre risolvere i due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}.$$

L'equivalenza ovviamente è a meno di verifica finale.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1$.

La disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 1, x \geq 2 \\ x < -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1, x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x < 2 - \sqrt{3}, x > 2 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \cup -1 \leq x < 2 - \sqrt{3}.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione data è formato dalle x : $x < 2 - \sqrt{3}$.

1.7.11 Equazioni e disequazioni esponenziali

Si chiama equazione (disequazione) *esponenziale* un'equazione (una disequazione) in cui la variabile x (oppure un polinomio da essa dipendente) figura come base o esponente di una potenza.

L'equazione $a^{p(x)} = b$, $b > 0$ è equivalente a risolvere l'equazione algebrica $p(x) = \log_a b$.

La disequazione $a^{p(x)} > b$ è equivalente, se $b > 0$, alla disequazione $p(x) > \log_a b$ se $a > 1$ oppure alla disequazione $p(x) < \log_a b$ se $0 < a < 1$; mentre è sempre verificata se $b \leq 0$.

ESEMPI

a. Risolvere la seguente equazione esponenziale $2^{x^2-1} = 3$. L'equazione equivale a $x^2 - 1 = \log_2 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \log_2 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1 + \log_2 3}$.

b. Risolvere la seguente equazione esponenziale: $3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 12 = 0$. L'equazione equivale a $\begin{cases} 3^x = t \\ t^2 + 4t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t \\ t = -6, t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -6 \\ t = -6 \end{cases} \cup \begin{cases} 3^x = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \Phi \cup x = \log_3 2$, per cui la soluzione dell'equazione è $x = \log_3 2$.

c. Risolvere la seguente disequazione esponenziale: $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0$.

La disequazione equivale a:

$$3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t \\ t^2 - 5t + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = t \\ t < 2, t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x < 2 \cup 3^x > 3 \Leftrightarrow$$

$$x < \log_3 2, \quad x > \log_3 3 = 1,$$

per cui la soluzione della disequazione iniziale è $x < \log_3 2, \quad x > 1$.

d. Risolvere la seguente disequazione esponenziale: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)} < (2)^{x+4}$.

La disequazione equivale a:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-(x-4)} \Leftrightarrow 2(x-1) > -(x+4) \Leftrightarrow 2x-2 > -x-4 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

per cui le soluzioni sono $x > -\frac{3}{2}$.

1.7.12 Equazioni e disequazioni logaritmiche

Si chiama equazione (disequazione) *logaritmica* un'equazione (una disequazione) in cui la variabile x (oppure un polinomio da essa dipendente) figura come argomento o base di un logaritmo.

L'equazione $\log_a p(x) = b$ con $a > 0$, $a \neq 1$ è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) = a^b \end{cases}$$

La disequazione $\log_a p(x) < b = \log_a a^b$ con $a > 0$, $a \neq 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) < a^b \end{cases} \text{ se } a > 1$$

oppure al sistema

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) > a^b \end{cases} \text{ se } 0 < a < 1.$$

ESEMPI

a. Risolvere la seguente equazione logaritmica: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 2) = 0$. Essa equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 2 = 3; & x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{3}, & x > 1 + \sqrt{3} \\ x = -1, & x = 3 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono: $x = -1$, $x = 3$.

b. Risolvere la seguente disequazione: $\log_5(x^2 + x - 1) < 1$. Essa è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, & x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ -3 < x < 2 \end{cases}$$

da cui, tramite intersezione grafica delle soluzioni, si ottiene:

$$-3 < x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x < 2.$$

c. La disequazione: $(\lg x)^2 - 1 < 0$ equivale a risolvere

$$\begin{cases} \lg x = t \\ t^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = t \\ -1 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x < 1 \\ \lg x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < e \\ x > \frac{1}{e} \end{cases},$$

le cui soluzioni sono: $\frac{1}{e} < x < e$.

d. Risolvere la seguente disequazione : $\lg_e(25^x - 2 \cdot 5^x + 2) > 0$. Essa equivale al sistema

$$\begin{cases} 25^x - 2 \cdot 5^x + 2 > 0 \\ 25^x - 2 \cdot 5^x + 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ponendo } 5^x = t \begin{cases} t^2 - 2t + 2 > 0 \\ t^2 - 2t + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \\ (t-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 1 \end{cases}$$

per cui deve essere $5^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$.

1.8 Insiemi limitati

Sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$;

DEFINIZIONE. Un numero reale L si dice un maggiorante (minorante) per l'insieme X se $x \leq L$ ($l \leq x$) $\forall x \in X$.

È bene notare esplicitamente che un insieme X non sempre ammette maggioranti o minoranti. Se, ad esempio, $X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, X non ammette maggioranti, mentre lo zero (ed anche un qualsiasi numero reale negativo) è un minorante di X .

DEFINIZIONE. Diremo che X è limitato superiormente (inferiormente) se ammette un maggiorante (minorante) e si dice limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente

$$\Leftrightarrow \exists l, L \in \mathbb{R} : l \leq x \leq L, \forall x \in X.$$

Proposizione 1.3 X è limitato $\Leftrightarrow \exists H > 0 : -H \leq x \leq H, \forall x \in X$.

Dimostrazione: Dalla definizione, X è limitato $\Leftrightarrow \exists l, L \in \mathbb{R} : l \leq x \leq L \forall x \in X$; d'altra parte $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ pertanto :

$$l \leq x \leq L, \forall x \in X \Leftrightarrow -(|l| + |L|) \leq x \leq |L| \leq |l| + |L| \quad \forall x \in X, \text{ da cui l'affermazione per } H = |l| + |L|.$$

OSSERVAZIONE. Se K è un maggiorante di X (h un minorante di X) allora un qualunque $k' > k$ ($h' < h$) è ancora un maggiorante (minorante) di X .

Assegnato $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$,

DEFINIZIONE. $M \in \mathbb{R}$ si dice massimo di X se:

1. $x \leq M \quad \forall x \in X$ (M è un maggiorante)
2. $M \in X$.

Analogamente, $m \in \mathbb{R}$ si dice minimo di X se :

1. $m \leq x \quad \forall x \in X$ (m è un minorante)
2. $m \in X$.

OSSERVAZIONE. Non tutti i sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R} hanno massimo e minimo. Ad esempio se $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, A non ha né massimo né minimo (non esiste il più piccolo numero reale positivo; ad esempio lo zero è un minorante ma non è minimo perché non appartiene ad A).

OSSERVAZIONE. Si verifica facilmente che quando esistono, il massimo ed il minimo sono unici.

Teorema 1.4 (*esistenza dell'estremo superiore*) Sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$, limitato superiormente; allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di X .

Tale numero, denotato con $\sup X$, viene chiamato *estremo superiore* di X , e, risulta evidente che (*prop. caratteristiche dell'estremo sup.*):

$$L = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} 1) x \leq L \quad \forall x \in X \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > L - \varepsilon \end{cases}$$

infatti la proprietà 1) afferma che L è un maggiorante mentre la proprietà 2) equivale a dire che L è il più piccolo dei maggioranti. In maniera analoga si prova

Teorema 1.5 (*esistenza dell'estremo inferiore*) Sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$ limitato inferiormente; allora esiste il massimo dell'insieme dei minoranti di X .

Tale numero, che si denota con $\inf X$, si chiama l'*estremo inferiore* di X . Evidentemente (*prop. caratteristiche dell'estremo inf.*):

$$l = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} 1') l \leq x \quad \forall x \in X \\ 2') \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in X : \bar{x} < l + \varepsilon \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Se un insieme $X \neq \Phi$ ha massimo M (minimo m) allora $M = \sup X$ ($m = \inf X$), infatti M è un maggiorante di X ed $M \in X$ pertanto sono verificate le due proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (la prima è ovvia, la seconda per $\bar{x} = M$).

Infine, sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$

DEFINIZIONE. X si dice non limitato superiormente (inferiormente) se non ammette maggioranti (minoranti) $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > k$ (risp. $\forall h \in \mathbb{R} \quad \exists x^* \in X : x^* < h$).

OSSERVAZIONE. Nelle relazioni precedenti ci si può limitare a considerare $k > 0$ ed $h < 0$.

ESEMPIO

Dire se l'insieme numerico $X = \left\{ \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1 \right\}$ è limitato superiormente e/o inferiormente e calcolare, in caso affermativo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se sono minimo e massimo rispettivamente.

Osserviamo che $1 \leq \frac{1}{x} \quad \forall x: 0 < x \leq 1$ da cui X è limitato inferiormente e poiché $1 \in X \Rightarrow 1 = \min X = \inf X$.

Proviamo che X non è limitato superiormente $\Leftrightarrow \forall k > 0 \quad \exists \bar{x}: 0 < \bar{x} \leq 1 \rightarrow \frac{1}{\bar{x}} > k$.

Osserviamo che il sistema $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} > k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x < \frac{1}{k} \end{cases}$ ammette, qualunque sia $k > 0$, infinite soluzioni.

Capitolo 2. Matrici e Sistemi lineari

2.1 Matrici e determinanti

Si chiama *matrice* ($m \times n$) una tabella costituita da $m \times n$ numeri reali, a_{ij} , disposti su m righe orizzontali e su n colonne verticali del tipo :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

gli indici i, j indicano rispettivamente la riga e la colonna di appartenenza dell'elemento, ad esempio a_{23} appartiene alla seconda riga ed alla terza colonna.

Nella matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che è del tipo 2×3 , l'elemento a_{22} vale 1, l'elemento a_{23} vale 0, ...,etc.

DEFINIZIONE. Una matrice si dice *nulla* se tutti i suoi elementi sono nulli, cioè se

$$a_{ij} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

DEFINIZIONE. Una matrice si dice *quadrata* (di ordine n) se $n = m$; altrimenti si dice *rettangolare*.

DEFINIZIONE. Una matrice quadrata di ordine n si dice *matrice scalare* quando

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \\ a_{ij} = k_i & \text{se } i = j, k_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

In particolare se $k_i = 1 \quad \forall i = 1 \dots n$ la matrice si dice *identica*.

ESEMPIO

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è la matrice identica di ordine tre.}$$

D'ora in poi, per brevità, indicheremo la matrice A di elementi a_{ij} con $A = (a_{ij})$.

2.1.1 Operazioni con le matrici

- Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici $m \times n$, si chiama *somma* di A e B , e si indica con $C = A + B$ la matrice $m \times n$ il cui elemento c_{ij} è dato da $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Se $\lambda \in \mathbb{R}$, si chiama *prodotto* di λ per $A = (a_{ij})$, λA , la matrice $m \times n$ il cui elemento di posto ij vale λa_{ij} .
- Se $A = (a_{ij})$ è di tipo $m \times q$ e $B = (b_{ij})$ è di tipo $q \times n$ si definisce *prodotto righe per colonne* di A per B , e si indica con $C = A \cdot B$ la matrice $m \times n$ il cui elemento $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj}$ (prodotto della riga i -esima di A per la colonna j -esima di B).

Osserviamo che nel prodotto tra matrici (righe per colonne) occorre che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B ; quindi se è possibile calcolare $A \cdot B$, non è detto che sia possibile calcolare $B \cdot A$, ed inoltre se entrambi i prodotti hanno senso, in generale $A \cdot B \neq B \cdot A$.

ESEMPI

a. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risulta $C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Se consideriamo $\lambda = -2$ risulta $\lambda A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -10 & -16 \\ -6 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$.

b. Siano $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Risulta $A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; è possibile calcolare $B \cdot A$ che ovviamente sarà diversa da $A \cdot B$ in quanto $B \cdot A$ è quadrata di ordine tre.

Le operazioni fra matrici così definite godono delle seguenti proprietà:

- P1. $A + B = B + A$ *prop. commutativa*
- P2. $A + 0 = 0 + A = A$ *0 è l'elemento neutro della somma*
- P3. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *prop. associativa*
- P4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ “ “
- P5. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ *I_n è l'elemento neutro del prodotto*

2.1.2 Determinante

Data una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n ad essa è possibile associare in modo univoco un numero reale detto *determinante* di A ($|A| = \det A$).

Distinguiamo vari casi:

- se $n = 1$, $A = (a_{11})$ si chiama determinante di A il numero a_{11} ;
- se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si chiama determinante di A il numero $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

ESEMPIO

sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det A = 2 - 0 = 2$;

- se $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ si chiama determinante di A il numero
 $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

ESEMPIO

sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 0 + 1 + 6 - 0 + 4 - 1 = 10$;

Nel caso $n = 3$, il calcolo del determinante può essere effettuato tramite la “regola di Sarrus”: si aggiungono alla matrice le prime due colonne; si somma al prodotto degli elementi della diagonale principale i prodotti degli elementi delle altre due diagonalì ad essa parallele, quindi si sottrae il prodotto degli elementi della diagonale secondaria diminuito dei prodotti degli elementi delle due diagonalì ad essa parallele:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

- in generale (Teorema di Laplace) scelta una riga (o indifferentemente una colonna), ad esempio quella i -esima $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, il determinante è il numero:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in},$$

dove A_{ij} , $j = 1, \dots, n$ è la matrice che si ottiene da quella data sopprimendo la riga i -esima e la colonna j -esima (osserviamo che A_{ij} è di ordine $n-1$), mentre il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è detto “*complemento algebrico*” di a_{ij} ; pertanto il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della riga $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ per i rispettivi complementi algebrici (tale calcolo, è bene precisare, non dipende dalla riga o dalla colonna scelta):

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{abbiamo scelto la riga } i\text{-esima}).$$

Risulta evidente che per il calcolo di un determinante di ordine quattro si ricorre al calcolo dei determinanti di ordine tre, così, in generale, per il calcolo di un determinante di ordine n si ricorre al calcolo di determinanti di ordine $n-1$.

2.1.3 Proprietà dei determinanti

Le principali proprietà dei determinanti sono le seguenti:

- il valore di un determinante è nullo se tutti gli elementi di una linea sono nulli;
- il valore di un determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne;
- se la matrice A' si ottiene da A scambiando fra loro due file parallele, allora $\det A' = -\det A$
- se la matrice A' si ottiene da A moltiplicando tutti gli elementi di una fila (riga o colonna) per una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\det A' = \lambda \det A$;
- se nella matrice A due file parallele sono proporzionali allora il determinante è nullo;
- la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (o colonna) è uguale a zero.

Le proprietà a), b) e d) sono di facile verifica. Per la proprietà c) possiamo procedere per induzione. È immediato vedere che essa vale per $n = 2$ allora supponiamo che sia vera per $n-1$ e proviamo che è vera per n . Sviluppiamo $\det A$ e $\det A'$ secondo una riga (o colonna) diversa da quelle scambiate tra loro:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

$$\det A' = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a'_{ij} \det A'_{ij}.$$

Poiché A_{ij} e A'_{ij} hanno ordine $n-1$ e due righe scambiate tra di loro, dall'ipotesi di induzione si ha $\det A_{ij} = -\det A'_{ij}$ da cui l'asserto. La proprietà e) è una conseguenza della d) e del fatto che se in A due file parallele sono uguali allora $\det A = 0$ (infatti dalla c) si ha che $\det A = -\det A$).

Infine, per provare la proprietà f), osserviamo che una somma del tipo $\sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} A_{jk}$ ($i \neq j$) è lo sviluppo del determinante della matrice A' che si ottiene da A sostituendo al posto degli elementi della riga j -esima quelli della riga i -esima. Pertanto A' ha due righe eguali e dunque $\det A' = 0$.

Osserviamo che se A è una matrice diagonale, $A = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

ESEMPIO

Calcolare il determinante della seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Addizioniamo alla terza riga la prima riga, ottenendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcolando $|A|$ secondo la prima riga,

$$|A| = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 32 + 16 - 2) = -48.$$

2.1.4 Matrice inversa

Sia A una matrice quadrata di ordine n .

DEFINIZIONE. Diremo che A è invertibile se esiste una matrice B di ordine n tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

La matrice B si chiama *matrice inversa* di A e si indica con A^{-1} . Se A^{-1} esiste essa è unica, infatti se C è tale che $A \cdot C = C \cdot A = I_n$ allora

$$A^{-1} = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1} \cdot (A \cdot C) = (A^{-1} \cdot A) \cdot C = I_n C = C.$$

Vale il seguente

Teorema 2.1 Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di ordine n con $\det A \neq 0$, allora A è invertibile e gli elementi b_{ij} della matrice inversa A^{-1} sono definiti da

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

ESEMPIO

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Risulta $|A| = 3$; $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 1$.

Pertanto $b_{11} = \frac{3}{3} = 1$, $b_{12} = 0$, $b_{21} = -\frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3}$, $b_{22} = \frac{1}{3}$ e quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2.1.5 Caratteristica di una matrice

Data una matrice rettangolare di tipo $m \times n$, da essa si possono estrarre delle matrici quadrate i cui determinanti si dicono *minori* di A . Il numero di righe (o colonne) della matrice estratta si chiama ordine del minore. Si chiama “*caratteristica*” di A l’ordine massimo dei minori non tutti nulli che si possono estrarre da A .

Pertanto l’intero positivo $k \leq \min\{m, n\}$ è la caratteristica di A se:

1. esiste almeno un minore di ordine k in A con determinante non nullo,
2. tutti i minori in A di ordine maggiore di k hanno determinante nullo.

ESEMPIO

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ risulta che $\text{caratt}A \leq 3$.

Consideriamo tutti i minori di ordine 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 40 + 6 + 24 - 48 - 12 - 10 = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 12 - 24 + 12 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 24 + 40 - 12 + 10 - 16 = 0,$$

pertanto $\text{caratt}A \leq 2$ e poiché $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$ si ha che $\text{caratt}A = 2$.

2.2 Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ha la forma :

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove x_1, x_2, \dots, x_n sono le n incognite, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ si chiamano i *coefficienti del sistema* e $b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$ è il *termine noto*.

Risolvere (S) significa determinare una n -upla $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ tale che $a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \dots + a_{in}\bar{x}_n = b_i$ $\forall i = 1, \dots, m$.

Accanto al sistema (S) si considerano le due matrici :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ detta matrice completa}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ detta matrice incompleta.}$$

2.2.1 Metodi di risoluzione

Affrontiamo ora il problema della risoluzione del sistema (S). Cominciando dal caso $m = n$. Vale il seguente

Teorema 2.2 (di Cramer) *Se $\det A \neq 0$, il sistema lineare (S) ammette una ed una sola soluzione data da*

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A},$$

dove B_i è la matrice che si ottiene dalla matrice A sostituendo gli elementi della colonna i -esima con quella dei termini noti.

ESEMPIO

$$\text{Consideriamo il sistema } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}.$$

Risulta $\det A = 13 \neq 0$ pertanto

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{17}{13}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{6}{13}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{13} = \frac{10}{13}.$$

In generale, se il numero delle equazioni m è diverso dal numero delle incognite n , si può tentare di applicare il seguente

Teorema 2.3 (di Rouchè - Capelli) *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (S) abbia soluzioni è che le matrici completa ed incompleta del sistema abbiano la stessa caratteristica.*

In tal caso se k è la caratteristica delle due matrici, per risolvere il sistema si procede nel seguente modo:

1. si scelgono k delle m equazioni in modo tale che la matrice dei coefficienti di queste abbia caratteristica uguale a k ;
2. nel nuovo sistema ottenuto, avente k equazioni in n incognite, si scelgono k incognite, in modo tale che il determinante dei loro coefficienti sia non nullo ed alle rimanenti $n-k$ incognite si attribuiscono valori arbitrari;
3. si risolve questo sistema di k equazioni in k incognite con $\det \neq 0$ attraverso, ad esempio, Cramer;
4. gli n numeri così trovati costituiscono una soluzione del sistema (S).

ESEMPI

- Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 6y = -1 \\ 5x + 19y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Risulta } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det B \neq 0 \Rightarrow \text{caratt}A = \text{caratt}B = 2$.

Consideriamo allora il sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 6y = -1 \end{cases}$ che ha soluzione $x = \frac{25}{11}, \quad y = -\frac{6}{11}$.

- Considerato il sistema
$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ x + 6y - z = -1 \\ 5x + 19y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Risulta } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & 19 & 1 \end{pmatrix};$$

Poiché l'ultima riga di B è combinazione lineare delle prime due, $\text{caratt}B = \text{caratt}A = 2$; consideriamo allora il sistema :

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ x + 6y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 - 4z \\ x + 6y = -1 + z \end{cases}$$

e per Cramer si ha :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-4z & 1 \\ -1+z & 6 \end{vmatrix}}{11} = \frac{25-25z}{11}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4-4z \\ 1 & -1+z \end{vmatrix}}{11} = \frac{-6+6z}{11}$$

pertanto le infinite soluzioni del sistema dato si ottengono al variare di $z \in \mathbb{R}$ nella terna $\left(\frac{25-25z}{11}, \frac{-6+6z}{11}, z\right)$.

Infine ricordiamo che per risolvere un sistema è sempre valido il *metodo di sostituzione*

ESEMPIO

Risolvere il sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$.

Si ha :

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ 2(2 - y) - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 4 - 2y - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ -5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

2.2.2 Sistemi lineari omogenei

Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ il sistema lineare (S) si dice *omogeneo*. Tale sistema ha sempre la soluzione $(0,0,0,\dots,0)$ inoltre è di semplice verifica che se $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0,0,\dots,0)$ è soluzione allora anche $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ è soluzione al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per la risoluzione di un tale sistema supporremo $m = n$; in tal caso dal Teorema di Cramer se $\det A \neq 0$ il sistema omogeneo ha la sola soluzione nulla, mentre se $\det A = 0$, differendo A da B per una colonna di elementi nulli, risulta $\text{caratt}A = \text{caratt}B$ e quindi il sistema è risolubile tramite Rouchè - Capelli.

ESEMPIO

Risolvere il sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$.

Risulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$. Poiché $\text{caratt}A = \text{caratt}B = 2$ il sistema

assegnato è equivalente (per Rouchè - Capelli) al sistema seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -3z \\ x - y = -z \end{cases}$$

e per Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{5z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{2z}{3}$$

pertanto le soluzioni sono tutte le terne del tipo : $\left(-\frac{5z}{3}, -\frac{2z}{3}, z\right)$ al variare di $z \in \mathbb{R}$.

Capitolo 3. Elementi di geometria analitica

3.1 Sistema di riferimento sulla retta

Assegnata una retta r per fissare su di essa un sistema di riferimento (*retta coordinata*) occorre:

1. fissare un punto O di r detto origine,
2. fissare un'unità di misura u ,
3. scegliere un verso di percorrenza sulla retta

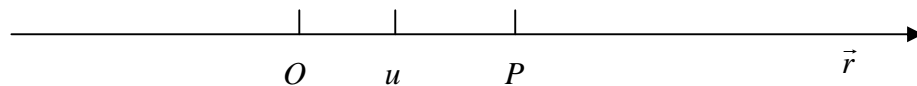


Figura 3.10 Retta coordinata.

Preso $P \in \vec{r}$ diremo che O precede P se percorrendo la retta lungo il verso scelto (positivo) si incontra prima O e poi P .

Ad ogni punto $P \in \vec{r}$ possiamo associare un numero reale x (*ascissa* di P) nella seguente maniera:

- se $P \equiv O$ associamo a P $x = 0$;
- se O precede P associamo a P la lunghezza del segmento congiungente O con P misurata rispetto ad u ;
- se P precede O associamo a P la lunghezza del segmento congiungente O con P misurata rispetto ad u e cambiata di segno;

Evidentemente se O precede P sarà $x > 0$ invece se P precede O sarà $x < 0$.

Viceversa ad ogni numero reale x possiamo associare un punto P sulla retta in tale maniera:

- ad $x = 0$ associamo il punto O ;
- ad $x > 0$ associamo il punto P tale che O precede P e la lunghezza del segmento congiungente O e P misura x ;
- ad $x < 0$ associamo il punto P tale che P precede O e la lunghezza del segmento congiungente O e P misura $-x$.

In tale maniera si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e l'insieme dei numeri reali:

$$\vec{r} \leftrightarrow \mathbb{R}$$

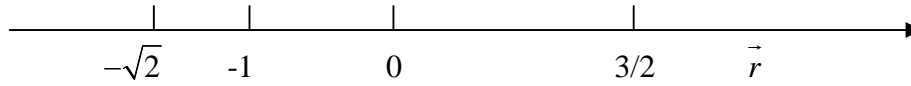


Figura 3.2

3.1.1 Distanza tra due punti e loro punto medio

Assegnati P_1 di ascissa x_1 e P_2 di ascissa x_2 si definisce *distanza* tra P_1 e P_2 ($d(P_1, P_2)$) la lunghezza del segmento che li congiunge ; risulta $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$.

Il punto di ascissa $M \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}$ risulta il punto medio del segmento congiungente P_1 e P_2 .

3.2 Il piano cartesiano

Assegnato un piano π per fissare su di esso un s.d.r. occorre considerare due rette coordinate \bar{x} ed \bar{y} perpendicolari tra loro (*assi coordinati*) ed aventi origine in comune:

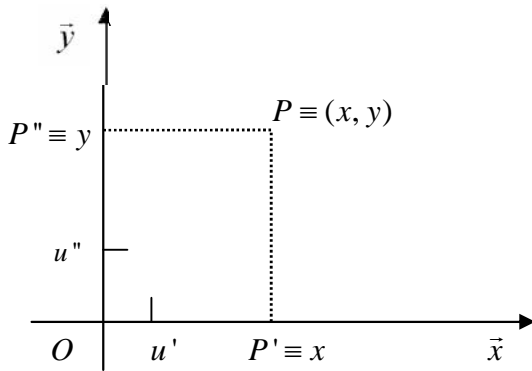


Figura 3.3 Piano coordinato

Ad ogni punto $P \in \pi$ possiamo associare due numeri reali (*ascissa* ed *ordinata*) nella maniera seguente: da P si conducono le rette parallele agli assi coordinati; detti P' e P'' le intersezioni rispettivamente con l'asse \bar{x} ed \bar{y} , a P assoceremo le ascisse x ed y di P' e P'' (rispetto alle unità di misura u' ed u'' scelte sui due assi)

Viceversa presa una coppia di numeri reali (x,y) ad essa associamo un punto nel piano nella seguente maniera: se $(x,y) = (0,0)$ associamo l'origine O ; se $(x,y) \neq (0,0)$ individuiamo sull'asse \bar{x} il punto P' di ascissa x e sull'asse \bar{y} il punto P'' di ascissa y ; ad (x,y) associamo il punto P intersezione delle rette parallele agli assi coordinati condotte da P' e P'' .

In tale maniera si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano π e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $\{\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2\}$.

Il piano π con il s.d.r. $\bar{x}\hat{O}\bar{y}$ costruito si chiama piano coordinato. Osserviamo che il s.d.r. suddivide π in quattro parti o quadranti numerati in verso antiorario e che un punto appartiene al primo quadrante se ha ascissa ed ordinata entrambe non negative,etc.

3.2.1 Distanza tra due punti e loro punto medio

Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ si chiama *distanza tra i due punti* la lunghezza del segmento che li congiunge.

Dall'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo P_1P_2Q (cfr. Figura 3.4) risulta:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

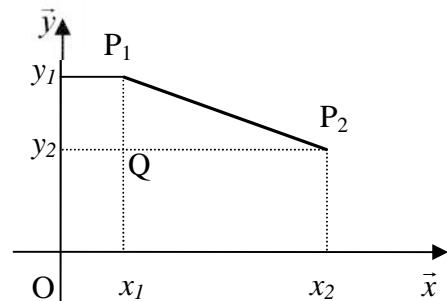


Figura 3.4

e tale formula vale qualunque siano i punti P_1 e P_2 del piano coordinato (anche in futuro ci riferiremo al primo quadrante senza perdere in generalità).

Il punto $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ risulta il *punto medio* del segmento congiungente P_1 e P_2 .

3.2.2 Coordinate polari

Assegnato un s.d.r. cartesiano ortogonale $\vec{x}\widehat{O}\vec{y}$, ogni punto P del piano è univocamente determinato da una coppia di numeri reali (x,y) .

Lo stesso punto può essere individuato da una coppia di numeri reali (ρ, ϑ) , dove $\rho \geq 0$ è la distanza di P da O e ϑ è l'angolo formato dal semiasse positivo delle \vec{x} con la semiretta OP , misurato in verso antiorario:

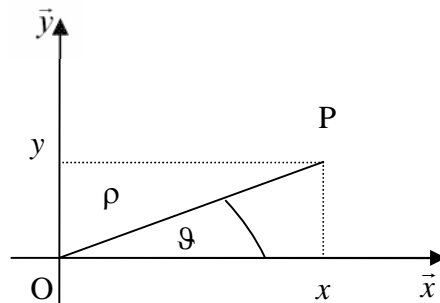


Figura 3.5

La coppia (ρ, ϑ) prende il nome di coordinate polari del punto P : ρ è detto *modulo* e ϑ l'*anomalia* di P (cfr. Figura 3.5).

Le relazioni tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari sono:

$$x = \rho \cos \vartheta \quad ; \quad y = \rho \sin \vartheta$$

da cui

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}$$

se $x \neq 0$, mentre se $x = 0$ si ha che $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oppure $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ secondo che $y > 0$ oppure $y < 0$.

3.2.3 Cambiamenti del sistema di riferimento

Vediamo, ora cosa accade se si passa dal s.d.r. ortogonale cartesiano $\vec{x}\widehat{O}\vec{y}$ al s.d.r. cartesiano ortogonale $\vec{x}'\widehat{O}'\vec{y}'$:

1° caso : traslazione

Il s.d.r. $\vec{x}'\widehat{O}'\vec{y}'$ ha assi paralleli ad $\vec{x}\widehat{O}\vec{y}$ ma $O \neq O'$ (cfr Figura 3.6).

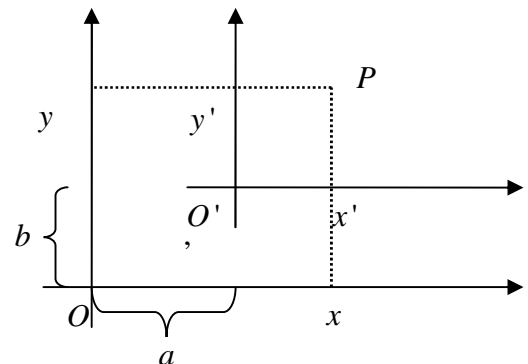


Figura 3.6

Preso un punto P sul piano e dette (x,y) , (x',y') le sue coordinate rispetto ai due riferimenti considerati si ha:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}, \text{dove } (a,b) \text{ sono le coordinate di } O' \text{ in } \bar{x}\hat{O}\bar{y}.$$

2° caso : rotazione

Il s.d.r. $\bar{x}'\hat{O}'\bar{y}'$ ha origine comune ad $\bar{x}\hat{O}\bar{y}$ e l'asse \bar{x} forma un angolo α (misurato in senso antiorario) con l'asse \bar{x}' (cfr Figura 3.7).

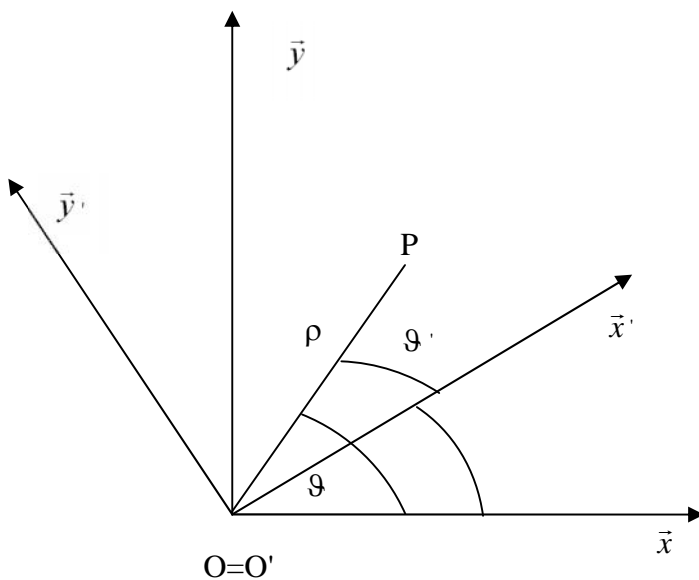


Figura 3.7

Preso un punto P di coordinate (x,y) ed (x',y') rispettivamente nei due s.d.r., ci proponiamo di determinare il legame che intercorre fra le coordinate. Introducendo le coordinate polari di P nei due riferimenti, siano (ρ, ϑ) e (ρ', ϑ') rispettivamente, osserviamo che $\rho' = \rho$ e $\vartheta' = \vartheta - \alpha$.

Poiché
$$\begin{cases} x' = \rho \cos \vartheta' \\ y' = \rho \sin \vartheta' \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}.$$

E da queste lasciamo che il lettore ricavi quelle inverse.

3° caso : caso generale (roto-traslazione)

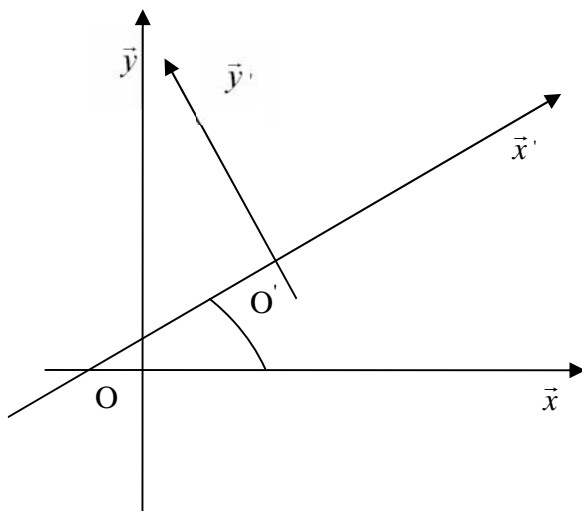


Figura 3.8

Preso un punto P (cfr Figura 3.8), combinando le formule dei due casi precedenti, le relazioni che legano le coordinate (x,y) rispetto ad $\bar{x}\hat{O}\bar{y}$ alle coordinate (x',y') rispetto ad $\bar{x}'\hat{O}'\bar{y}'$ sono:

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha \\ y' = (y - b) \cos \alpha - (x - a) \sin \alpha \end{cases}.$$

3.3 La retta

In un s.d.r. cartesiano ortogonale sia assegnata una retta r . Proveremo che un punto $P = (x,y)$ appartiene ad r se e solo se le sue coordinate soddisfano un'equazione lineare in x ed y del seguente tipo:

$$(3.1) \quad ax + by + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \text{ numeri reali,}$$

detta equazione della retta in *forma implicita*.

Nel caso in cui la retta è parallela all'asse \bar{x} , i suoi punti sono caratterizzati dall'aver la stessa ordinata, sia questa k ; pertanto la retta è individuata analiticamente dall'equazione $y = k$.

In maniera analoga se la retta è parallela all'asse \bar{y} i suoi punti sono caratterizzati dall'aver la stessa ascissa, sia questa h ; pertanto la retta è individuata analiticamente dall'equazione $x = h$.

Nel caso in cui r è obliqua (ovvero non è parallela a nessuno dei due assi coordinati) siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ due suoi punti:

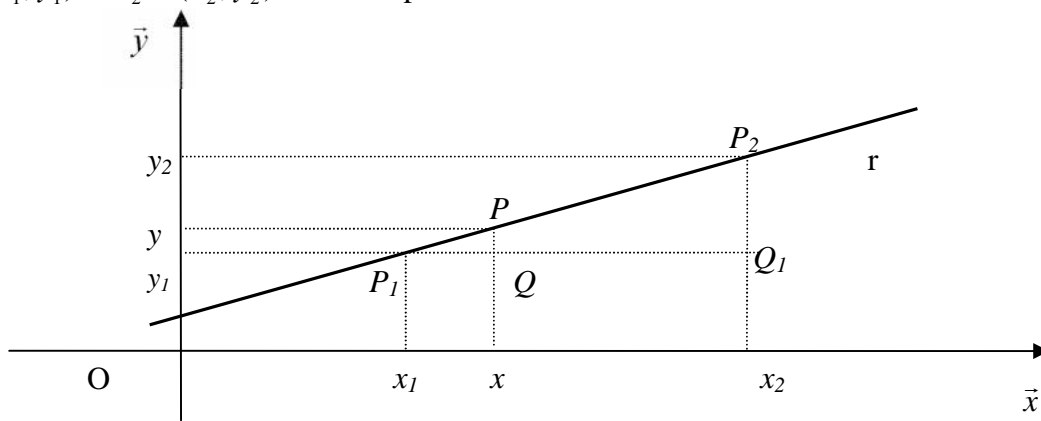


Figura 3.9

Se $P = (x, y) \in r$ dalla similitudine dei triangoli P_1QP e $P_1Q_1P_2$ risulta:

$$(3.2) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

da cui

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0.$$

Allora se indichiamo con $a = (y_2 - y_1)$, $b = (x_1 - x_2)$, $c = x_2y_1 - x_1y_2$, le coordinate del punto P soddisfano l'equazione $ax + by + c = 0$.

Viceversa sia $P = (\bar{x}, \bar{y})$ tale che

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c = 0 \quad \text{e quindi} \quad \bar{y} = \frac{-a\bar{x} - c}{b}.$$

Proviamo che P appartiene alla retta r (cfr Figura 3.10).

Se per assurdo P non appartenesse ad r , consideriamo il punto $Q \in r$, avente la stessa ascissa \bar{x} di P :

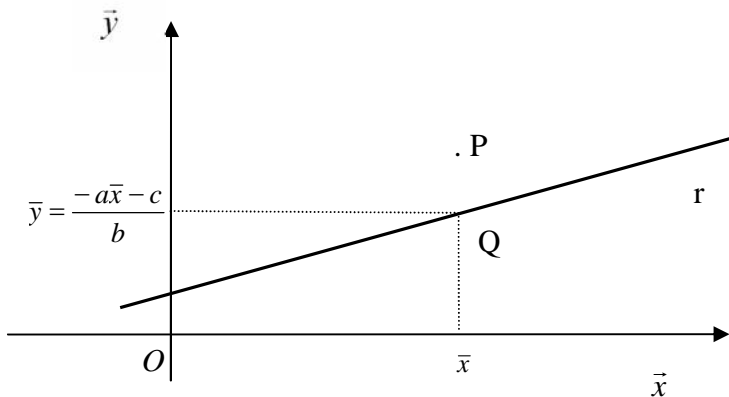


Figura 3.10

Ovviamente $P \neq Q$. Poiché $Q \in r$ le sue coordinate soddisfano l'equazione $ax + by + c = 0$ da cui essendo \bar{x} l'ascissa di Q ricaviamo

$$a\bar{x} + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-c - a\bar{x}}{b} \quad (\text{ordinata di } Q)$$

per cui $Q = (\bar{x}, \frac{-c - a\bar{x}}{b})$. Confrontando le coordinate di P e Q si ha $P = Q$: *assurdo!*

L'assurdo è nato dall'aver assunto che P non appartiene alla retta r .

La (3.2) prende il nome di *equazione della retta per due punti*. Inoltre dall'equazione (3.1), se $b \neq 0$, ricaviamo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

e ponendo $m = -\frac{a}{b}$ ed $n = -\frac{c}{b}$ otteniamo

$$(3.3) \quad y = mx + n, \text{ equazione della retta in } \textit{forma esplicita}.$$

OSSERVAZIONE. La (3.3) non può rappresentare una retta parallela all'asse \bar{y} . Inoltre se la retta passa per O dovrà essere $c = 0$.

ESEMPIO

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A = (-1, 2)$ e $B = (3, -2)$; dalla formula (3.2) si ha:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{-2-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-4} \Leftrightarrow x+1 = -y+2 \Leftrightarrow x+y-1=0$$

$\Leftrightarrow y = -x + 1$; graficamente:

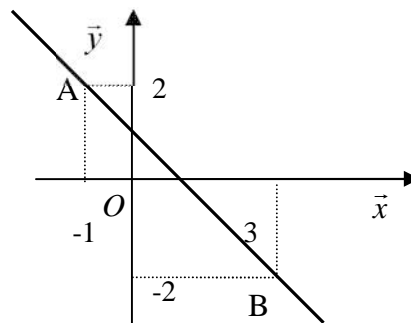


Figura 3.11

3.3.1 Coefficiente angolare

Sia assegnata una retta r non parallela all'asse \bar{y} e siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ tre punti distinti di tale retta (cfr Figura 3.12):

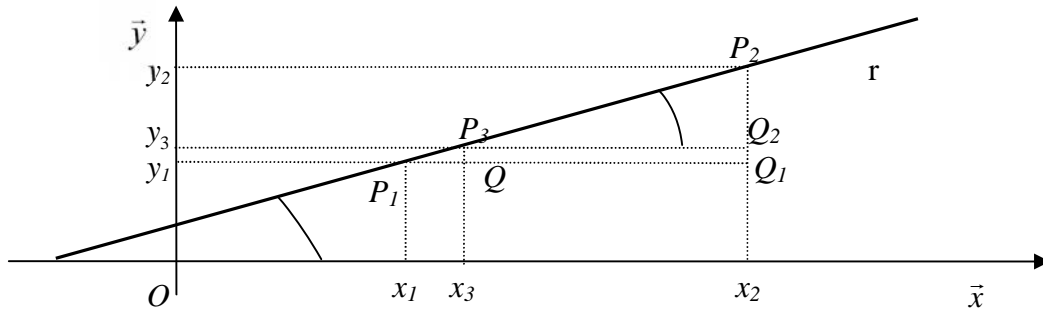


Figura 3.12

Dai teoremi di similitudine dei triangoli rettangoli $P_1Q_1P_2$, P_1QP_3 e $P_3Q_2P_2$ risulta che

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

da cui il calcolo del numero $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ non dipende dalla coppia di punti scelti su r .

Tale numero si chiama il *coefficiente angolare* della retta r e rappresenta (vedi Figura 3.12), per una nota proprietà dei triangoli rettangoli, la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse \bar{x} , quindi "misura" la pendenza della retta rispetto all'asse. Se la retta r ha equazione $ax + by + c = 0$ è facile verificare che $m = -\frac{a}{b}$ da cui l'equazione esplicita può essere scritta :

$$y = mx + q \quad \text{con} \quad q = -\frac{c}{b} .$$

Osserviamo che se la retta è parallela all'asse \bar{x} il suo coefficiente angolare vale zero, mentre non ha senso calcolare il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse \bar{y} .

3.3.2 Intersezione tra due rette

Siano assegnate due rette $r : ax + by + c = 0$ ed $s : a'x + b'y + c' = 0$.

Un punto $P = (x, y)$ appartiene alle due rette se le sue coordinate soddisfano le equazioni di entrambe, ovvero se il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{ammette soluzioni le due rette si intersecano. Pertanto, si ha:}$$

- se $ab' - a'b \neq 0$ (vd. Teorema di Cramer) il sistema considerato ammette una ed una sola soluzione, ne segue che le due rette sono *incidenti* in un punto le cui coordinate (x, y) sono la soluzione del nostro sistema;
- Se invece $ab' - a'b = 0 \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \rho \neq 0$ il sistema diviene:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ ax + by = -\frac{c'}{\rho} \end{cases}$$
 da cui avremo infinite soluzioni se $\frac{c'}{c} = \rho$ oppure nessuna soluzione se $\frac{c'}{c} \neq \rho$ (vd. Teorema di Rouchè - Capelli).

Poiché geometricamente due rette si dicono *parallele* se non hanno alcun punto a comune o se sono coincidenti, risulta evidente che le rette sono parallele nel caso in cui

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

cioè se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Assegnata, infine, la retta $r: ax + by + c = 0$ ed il punto $P_0 = (x_0, y_0)$, l'equazione della retta passante per P_0 e parallela ad r è:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

3.3.3 Rette perpendicolari

Nel piano, riferito ad un s.d.r., siano assegnate due rette r, s ortogonali fra loro (cfr Figura 3.13).

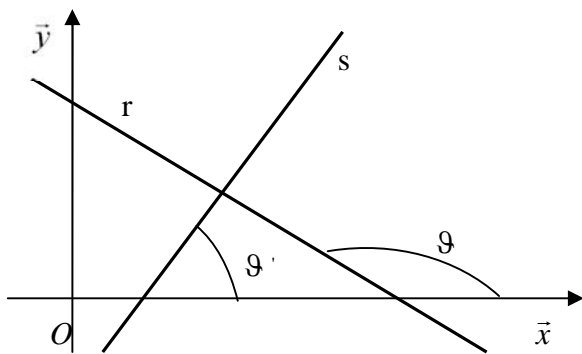


Figura 3.13

Diciamo ϑ e ϑ' rispettivamente gli angoli che le rette r ed s formano con l'asse \bar{x} .

Risulta

$$\vartheta' + (\pi - \vartheta) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(la somma degli angoli interni di un qualsiasi triangolo vale π), da cui $\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}$. Ricordando che

$\operatorname{tg}\vartheta' = m'$ (coefficiente angolare di s) e $\operatorname{tg}\vartheta = m$ (coefficiente angolare di r), si ha che:

$$m' = \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\sin\vartheta'}{\cos\vartheta'} = \frac{\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\vartheta \cos\frac{\pi}{2} - \cos\vartheta \sin\frac{\pi}{2}}{\cos\vartheta \cos\frac{\pi}{2} + \sin\vartheta \sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta} = -\frac{1}{m}$$

e viceversa.

Da ciò la condizione analitica di perpendicolarità tra due rette di coefficienti angolari m ed m'

è:

$$m' = -\frac{1}{m} \quad \text{ovvero} \quad m' \cdot m = -1.$$

Assegnata, infine, la retta $r: ax + by + c = 0$ ed il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ la retta passante per P_0 e perpendicolare ad r ha equazione:

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

3.3.4 Distanza punto - retta

Consideriamo, ora, nel nostro sistema di riferimento una retta $r: ax + by + c = 0$ ed un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ (cfr Figura 3.14).

Se $P_0 \in r$, per convenzione si pone $d(P_0, r) = 0$; se $P_0 \notin r$, conduciamo da P_0 la retta perpendicolare ad r e sia Q il punto di intersezione fra le due rette: $d(P_0, r) = d(P_0, Q)$.

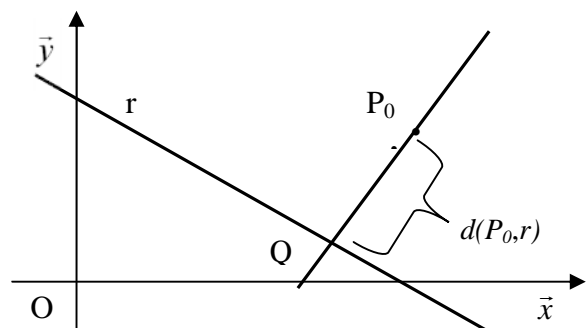


Figura 3.14

La seguente formula ci permette di calcolare in ogni caso la distanza di P_0 da r :

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ESEMPI

- a. Calcolare la distanza ed il punto medio fra i punti $A = -3$; $B = 5$.

Risulta che $d(A, B) = |-3 - 5| = |-8| = 8$ e che $P_M = \frac{5-3}{2} = 1$.

- b. Calcolare la distanza ed il punto medio fra i punti $A = (-1, -2)$; $B = (3, 7)$.

Risulta che $d(A, B) = \sqrt{(3+1)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$

mentre $P_M = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{7-2}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$.

- c. Determinare il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A = (-1, 2)$, $B = (-3, 1)$.

Risulta che $m = \frac{1-2}{-3+1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

- d. Determinare un'equazione per la retta passante per i punti $A = (1, 2)$ e $B = (2, 4)$.

Risulta $\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-1}{2-1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{2} = x-1 \Leftrightarrow y-2 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x$.

- e. Determinare un'equazione per la retta passante per il punto $A = (2, -3)$ e coefficiente angolare

$m = \frac{3}{2}$. L'equazione richiesta è $y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 6$.

- f. Determinare il coefficiente angolare delle seguenti rette: $r: x + 2y - 1 = 0$ ed $s: 2x + 3y - 1 = 0$.

Si ha rispettivamente che: $m_r = -\frac{1}{2}$, $m_s = -\frac{2}{3}$.

- g. Dire se le seguenti rette sono parallele: $r: x + y + 1 = 0$, $s: 2x + 2y + 1 = 0$

Le due rette sono distinte e parallele essendo i loro coefficienti angolari entrambi pari a -1 e $\frac{c'}{c} \neq 2$.

- h. Scrivere l'equazione della retta passante per $A = (1, -2)$ e parallela alla retta $r: 2x + 3y - 3 = 0$.

Si ha $2(x-1) + 3(y+2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 4 = 0$.

- i. Scrivere l'equazione della retta passante per $A = (-1, 2)$ e perpendicolare alla retta $r: 2x + y - 1 = 0$.

Risulta che $(x+1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0$.

j. Calcolare la distanza del punto $P_0 = (1,1)$ dalla retta $r : y - x + 1 = 0$.

$$\text{Si ha } d(P_0, r) = \frac{|-1+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.4 Coniche

Le curva piane rappresentabili da equazioni di secondo grado in x ed y del tipo:

$$(3.4) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

si dicono *coniche*.

Alla conica definita dalla (3.4) è associata la matrice quadrata (simmetrica)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};$$

la conica si dice singolare (o degenera) se $\det M = 0$, altrimenti si dice non singolare (o non degenera).

Le coniche non singolari sono suddivise in : ellissi, iperboli o parabole; precisamente, detto

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se accade che :

- a) $\det A_{33} > 0$ ed $a_{33} \cdot \det M \leq 0 \Rightarrow$ la conica è un'ellisse.
- b) $\det A_{33} < 0 \Rightarrow$ la conica è un'iperbole.
- c) $\det A_{33} = 0 \Rightarrow$ la conica è una parabola.

In seguito ritorneremo più in dettaglio sui luoghi geometrici introdotti tramite tale classificazione (affine). Dallo schema precedente resta escluso il caso $\det A_{33} > 0$ ed $a_{33} \cdot \det M > 0$; in tal caso l'equazione (3.4) rappresenta l'insieme vuoto, ad esempio l'equazione: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ non è soddisfatta da alcun punto del piano coordinato

ESEMPI

Eeguire la classificazione delle seguenti coniche:

A) $x^2 + 3xy + 2y^2 + 1 = 0$

B) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

C) $x^2 + 2xy + y^2 + y - 1 = 0$.

Risulta per A): $M = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det A_{33}$ ed $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

quindi la conica A) è un'iperbole.

Risulta per B): $M = \begin{vmatrix} 1 & -3\sqrt{2} & 0 \\ -3\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

quindi la conica B) è degenera (in effetti è spezzata nelle due rette di equazioni $x = y$ ed $x = 2y$).

Risulta per C): $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1\sqrt{2} \\ 0 & 1\sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} = -5\sqrt{2}$ ed $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

quindi la conica C) è una parabola.

3.4.1 Circonferenza

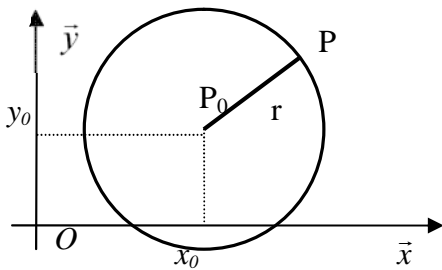


Figura 3.15

Fissato un punto $P_0 \in \pi$ ed un numero reale $r > 0$, la circonferenza Γ di centro P_0 e raggio r è il luogo geometrico dei punti del piano π la cui distanza da P_0 vale r . Introdotto su π un s.d.r., dette (x_0, y_0) le coordinate di P_0 , un punto P di coordinate (x, y) appartiene a Γ se e solo se:

$$d(P_0, P) = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

L'equazione così determinata si chiama equazione cartesiana della circonferenza di centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raggio r .

Dalla suddetta equazione, sviluppando i quadrati, otteniamo:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

ed anche

$$(3.5) \quad x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{dove } \alpha = -2x_0, \beta = -2y_0, \gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2.$$

L'equazione (3.5) è del tipo (3.4).

Chiediamoci ora, se un'equazione del tipo (3.5) rappresenta sempre una circonferenza. L'equazione (3.5), tramite il completamento dei quadrati, diviene:

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma.$$

Tale equazione rappresenta:

1. Φ (insieme vuoto) se $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$
2. il punto $\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ se $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = 0$
3. la circonferenza di centro $\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$ se $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$.

Pertanto l'equazione (3.5) rappresenta una circonferenza se e solo se $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0$.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$ rappresenta una circonferenza?

Risulta che $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(1)^2}{4} + 2 = 1 + \frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} > 0$

pertanto l'equazione rappresenta la circonferenza di centro $C \equiv (1, -1/2)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

3.4.2 Circonferenza e retta

Assegnate sul piano π una circonferenza Γ ed una retta s può accadere che :

- I. circonferenza e retta si intersecano in due punti distinti: sono dette *secanti*
- II. circonferenza e retta si intersecano in due punti coincidenti: sono dette *tangenti*
- III. circonferenza e retta non si intersecano : sono dette *esterne*

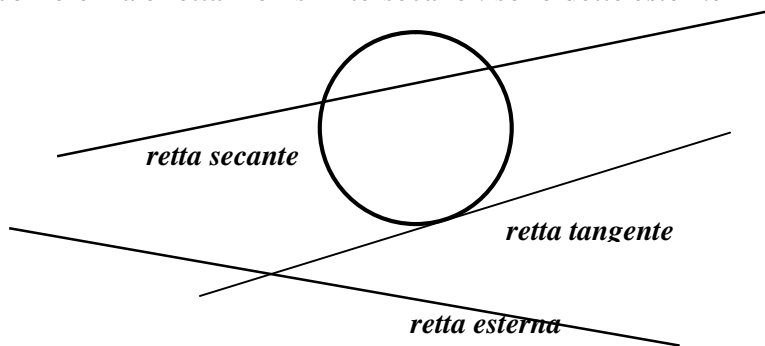


Figura 3.16 Retta e circonferenza.

Determiniamo la condizione analitica per cui Γ ed s sono secanti, tangenti o esterne. Introdotto un s.d.r. e considerate le equazioni rispettivamente di Γ ed s :

$$(\Gamma): x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$(s): ax + by + c = 0$$

il problema di determinare gli eventuali punti a comune fra Γ ed s è ricondotto alla risoluzione del seguente sistema :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0; \\ ax + by + c = 0 \end{cases};$$

tale sistema si può risolvere per sostituzione, ad esempio se $a \neq 0$ ricaviamo dalla seconda equazione $x = \frac{-by - c}{a}$ che sostituito nella prima equazione ci da:

$$\left(\frac{-by - c}{a}\right)^2 + y^2 + \alpha\left(\frac{-by - c}{a}\right) + \beta y + \gamma = 0;$$

l'equazione così ottenuta, detta *risolvente*, è un'equazione di secondo grado in y , quindi ammette o meno soluzioni secondo il segno di Δ , pertanto:

- i) se $\Delta > 0 \Rightarrow$ l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte in corrispondenza delle quali il sistema ammette due soluzioni distinte: Γ ed s sono secanti;

- ii) se $\Delta = 0 \Rightarrow$ l'equazione risolvente ha due soluzioni coincidenti in corrispondenza delle quali il sistema ammette due soluzioni coincidenti: Γ ed s sono tangenti;
- iii) se $\Delta < 0 \Rightarrow$ l'equazione risolvente non ha soluzioni quindi il sistema non ammette soluzioni Γ ed s sono esterne.

3.4.3 Rette tangenti ad una circonferenza

- Da un punto B della circonferenza una sola tangente (*due coincidenti*)
- Da un punto esterno A esistono due rette tangenti
- Da un punto interno nessuna retta (*reale*) tangente

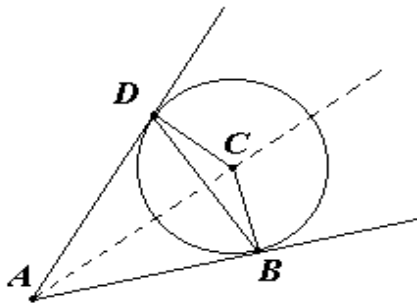


Figura 3.17 Rette tangenti ad una circonferenza.

3.4.4 Ellisse

Assegnati sul piano π due punti distinti F_1 ed F_2 , ed il numero reale $a > 0$, si chiama *ellisse* E di fuochi F_1 ed F_2 il luogo geometrico dei punti di π la cui somma delle distanze da F_1 ed F_2 valga $2a$.

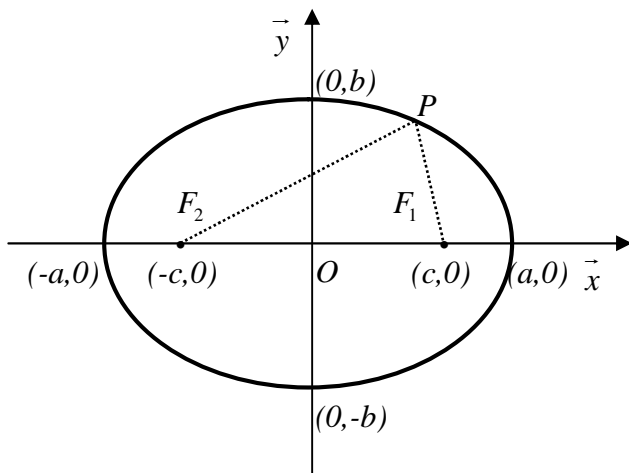


Figura 3.18

Fissiamo su π un s.d.r. in modo tale che l'asse \bar{x} passi per i due fuochi e l'asse \bar{y} coincida con l'asse del segmento F_1F_2 . Con tale scelta se $F_1 = (c, 0)$ ($a > c > 0$) allora sarà $F_2 = (-c, 0)$;

un punto del piano $P = (x, y) \in E$ se e solo se $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, ovvero

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Tale relazione, posto $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ diviene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

equazione canonica dell'ellisse.

Osserviamo che l'ellisse considerata interseca gli assi cartesiani nei punti $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ che sono detti vertici dell'ellisse; inoltre è evidente che $a > b$ da cui il nome per a di semiasse maggiore e per b di semiasse minore.

DEFINIZIONE. Si chiama *eccentricità dell'ellisse* la quantità $e = \frac{c}{a} < 1$.

Essa, in un certo senso, misura la differenza dei semiassi, e quindi di quanto l'ellisse si differenzia dall'essere una circonferenza, infatti se $e = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = b$ ovvero l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro l'origine e raggio a .

3.4.5 Iperbole

Assegnati sul piano π due punti distinti F_1 ed F_2 ed il numero reale $a > 0$, si chiama *iperbole I di fuochi F_1 ed F_2* il luogo geometrico dei punti di π la cui differenza in valore assoluto delle distanze da F_1 ed F_2 valga $2a$.

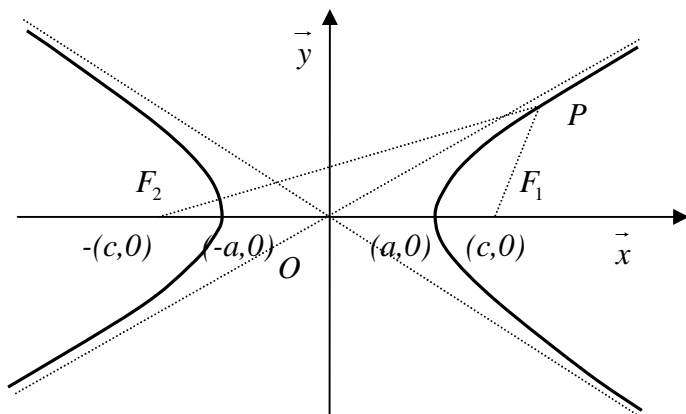


Figura 3.19

Fissiamo su π un s.d.r. in modo tale che l'asse \bar{x} passi per i due fuochi e l'asse \bar{y} coincida con l'asse del segmento F_1F_2 . Con tale scelta se $F_1 = (c, 0)$ ($c > a > 0$) allora sarà $F_2 = (-c, 0)$ ed un punto del piano $P = (x, y) \in E$ se e solo se $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, ovvero

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Ponendo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ tale relazione diviene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

equazione canonica dell'iperbole.

L'iperbole considerata interseca l'asse \bar{x} cartesiani nei punti $(\pm a, 0)$ che sono detti vertici dell'iperbole, mentre non interseca l'asse \bar{y} . Le rette di equazione $y = \pm \frac{b}{a}x$ si dicono *asintoti*.

L'iperbole che ha come asintoti gli assi cartesiani si chiama *iperbole equilatera*, la sua equazione è $xy = k$.

3.4.6 Parabola

Assegnati sul piano π una retta d (*direttrice*) ed un punto F (*fuoco*) si chiama *parabola P di fuoco F e direttrice d* il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da F e da d .

La retta ortogonale alla retta d e passante per F si chiama *asse della parabola*.

Se scegliamo su π un s.d.r. in maniera tale che l'asse della parabola sia parallelo all'asse \bar{y} ; avremo che un punto $P = (x, y)$ appartiene a P se e solo se $d(P, F) = d(P, d)$; da questa relazione otteniamo

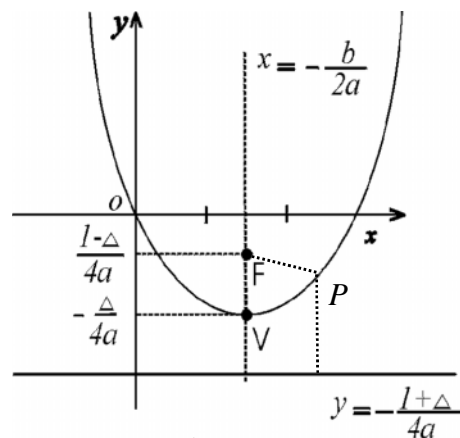


Figura 3.20

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{equazione canonica della parabola};$$

i coefficienti a, b, c di tale equazione sono legati al fuoco ed alla direttrice d dalle formule:

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

$$d: y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Si chiama *vertice* della parabola il punto V di intersezione della parabola con il suo asse, e risulta:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right).$$

Osserviamo che la concavità della parabola sarà rivolta verso l'alto o verso il basso secondo che a sia rispettivamente maggiore o minore di zero

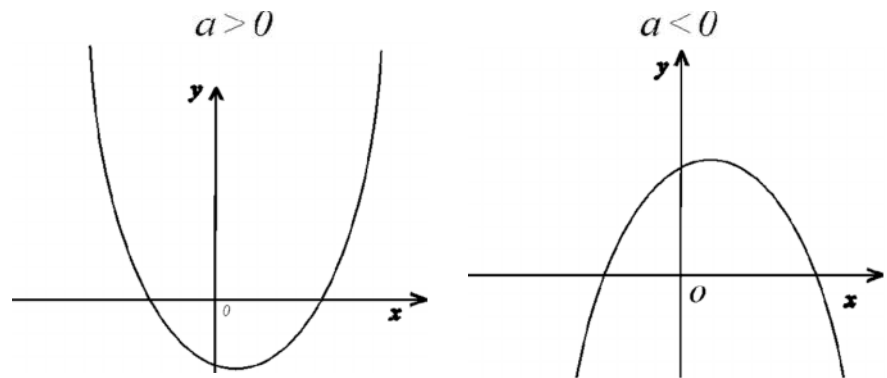


Figura 3.21 Vari tipi di concavità

ESEMPI

- a. Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti $A = (0,1)$; $B = (-1,0)$; $C = (2,1)$.

L'equazione della generica circonferenza di centro $\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$ e raggio $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$ è

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0;$$

imponendo che tale circonferenza passi per A risulta: $1 + \beta + \gamma = 0$;

analogamente, imponendo il passaggio per B e C si ottiene rispettivamente:

$$1 - \alpha + \gamma = 0; \quad 2\alpha + \beta + 5 = 0$$

pertanto α, β e γ sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 1 + \beta + \gamma = 0 \\ 1 - \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

pertanto la circonferenza voluta avrà equazione: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$.

- b. Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C = (1,1)$ e tangente alla retta $r: 2x - y + 1 = 0$.

$$\text{Dall'eguaglianza } \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = (1,1) \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ e } \beta = -2$$

affinché la circonferenza sia tangente ad r è sufficiente che

$$d(C,r) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}} - \gamma \Leftrightarrow \frac{|2-1+1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{2-\gamma} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = (2-\gamma) \Leftrightarrow \gamma = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}.$$

La circonferenza è rappresentata dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - \frac{6}{5} = 0.$$

- c. Tra le equazioni che seguono individuare quelle che rappresentano una circonferenza e determinare centro e raggio:

i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

ii) $x^2 + y^2 + 3x - 4y - 2 = 0$

iii) $2x^2 + y^2 - 1 = 0$

iv) $2x^2 + 2y^2 = 4$.

La i) rappresenta una circonferenza in quanto $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$ e precisamente è la circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio 1;

La iii) non rappresenta una circonferenza, in quanto sono differenti i coefficienti di x^2 e di y^2 . Lasciamo allo studente la risoluzione di ii) e di iv).

- d. Determinare l'equazione dell'ellisse di fuochi $F_1 = (-1,0)$, $F_2 = (1,0)$ e costante $2a = 4$.

L'equazione cercata è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dove $a = \frac{4}{2} = 2$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$.

Ne segue che l'ellisse ha equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- e. Determinare i fuochi ed i vertici della seguente ellisse: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Risulta $a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow$ i vertici sono i punti $(\pm 4, 0), (0, \pm 3)$; inoltre essendo $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 7$, pertanto i fuochi sono i punti $F_1 = (\sqrt{7}, 0)$ $F_2 = (-\sqrt{7}, 0)$.

- f. Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse \bar{y} , di vertice $V = (1,0)$ e passante per il punto $P = (0,1)$.

La parabola cercata ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$;

imponendo il passaggio per $P = (0,1) \Rightarrow c = 1$; dall'eguaglianza

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \quad (\text{si è tenuto conto che } c = 1)$$

si ha che la parabola richiesta ha equazione $y = x^2 - 2x + 1$.

- g. Scrivere le equazioni delle rette passanti per $P = (2,5)$ e tangenti a $\Gamma: x^2 + y^2 = 4$.
 La generica retta passante per $P = (2,5)$ ha equazione $s: a(x-2) + b(y-5) = 0$;
 la circonferenza Γ ha centro in $C = (0,0)$ e raggio $r = 2$.
 Affinché s sia tangente a Γ è sufficiente che

$$d(s, C) = r \Leftrightarrow \frac{|-2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow 4a^2 + 25b^2 + 20ab = 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 + 20ab + 23b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases} \cup \begin{cases} b \neq 0 \\ 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 20\left(\frac{a}{b}\right) + 23 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 46}}{2} = \frac{-10 \pm 3\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \pm 3\sqrt{6} \\ b = 2 \end{cases}$$

le rette cercate sono :

$$s_1: (-10 - 3\sqrt{6})(x-2) + 2(y-5) = 0$$

$$s_2: (-10 + 3\sqrt{6})(x-2) + 2(y-5) = 0 .$$

- h. Determinare le intersezioni fra $r: y = 2x - 1$ e $P: y = -x^2 + 2x + 3$.
 Occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

la retta r interseca la parabola P nei punti $A = (2,3)$ e $B = (-2,5)$.

- i. Assegnata la circonferenza $\Gamma: x^2 + y^2 = 3$ e la retta $r: kx + y - 1 = 0$, determinare $k \in \mathbb{R}$ affinché r sia secante Γ .

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ kx + y - 1 = 0 \end{cases}$; le eventuali soluzioni rappresentano i punti di interse-

zione tra r e Γ .

L'equazione risolvente il sistema è :

$$x^2 + (1 - kx)^2 - 3 = 0 \quad \text{il cui} \quad \Delta = k^2 + 2(1 + k^2) = 3k^2 + 2$$

è sicuramente sempre positivo. Pertanto r è secante Γ qualunque $k \in \mathbb{R}$.

Capitolo 4. Funzioni reali

4.1 Generalità

Sia dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$

DEFINIZIONE. Una funzione f su X a valori in \mathbb{R} ($f: X \rightarrow \mathbb{R}$) è una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un solo numero reale $f(x)$.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x}$ è la funzione che ad ogni $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$ associa il suo reciproco.

L'insieme X si chiama *dominio* o *insieme di definizione* di $f(x)$, mentre si chiama *codominio* o *immagine di f* il sottoinsieme di \mathbb{R} costituito dai valori assunti da $f(x)$ al variare di $x \in X$:

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Le funzioni si distinguono in :

- *razionali algebriche* se le operazioni che le definiscono sono quelle elementari ovvero somma, differenza, prodotto e quoto;

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} : X = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R};$$

- *irrazionali algebriche* se tra le operazioni che le definiscono figura un'espressione di radice algebrica (o potenza ad esponente frazionario);

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^3}} : X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < 0, x \geq \frac{1}{2} \right\};$$

- *esponenziali* se tra le operazioni che li definiscono figura un'elevamento a potenza ;

ESEMPIO

$$f(x) = (2x-1)^x : X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{2} \right\};$$

- *logaritmiche* se tra le operazioni che le definiscono figura l'operazione di logaritmo;

ESEMPIO

$$f(x) = \log\left(\frac{2x+1}{4x^2}\right) : X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{2}, x \neq 0 \right\};$$

- *trigonometriche* se tra le operazioni che vi figurano ci sono quelle trigonometriche;

ESEMPIO

$$f(x) = \sin 2x - \cos 2x : X = \mathbb{R}.$$

Naturalmente una funzione può essere contemporaneamente di più tipi, ad esempio $f(x) = \sqrt{\sin(\log x)}$ è una funzione irrazionale algebrica, logaritmica e trigonometrica.

Osserviamo che quando si assegna una funzione, si stabilisce una legge di definizione, ma bisogna calcolare il dominio, dando senso alle operazioni che figurano in tale legge.

Indichiamo di seguito le limitazioni da imporre per determinare il dominio rispetto alle operazioni usuali:

- l'operazione di divisione richiede che il divisore sia diverso da zero;
- l'elevamento a potenza reale vuole la base positiva;
- il calcolo del logaritmo richiede l'argomento positivo e la base positiva e diversa da uno;
- l'estrazione di radice di indice pari vuole il radicando maggiore o uguale a zero, mentre quella di indice dispari è definita qualunque sia il segno del suo radicando.

DEFINIZIONE. Una funzione $f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *pari (dispari)* se $f(-x) = f(x)$ [$f(-x) = -f(x)$] $\forall x \in X$.

DEFINIZIONE. Una funzione $f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo T* se $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in X$.

ESEMPI

- $f(x) = |x|$ è pari infatti $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$;
- $f(x) = x^3$ è dispari, infatti $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
- $f(x) = \sin x$ è una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$ essendo $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notiamo che una funzione può essere pari o dispari oppure nessuno dei due tipi.

4.1.1 Grafico

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE. Si chiama *grafico della funzione $f(x)$* il sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definito da:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in X, y = f(x)\}$$

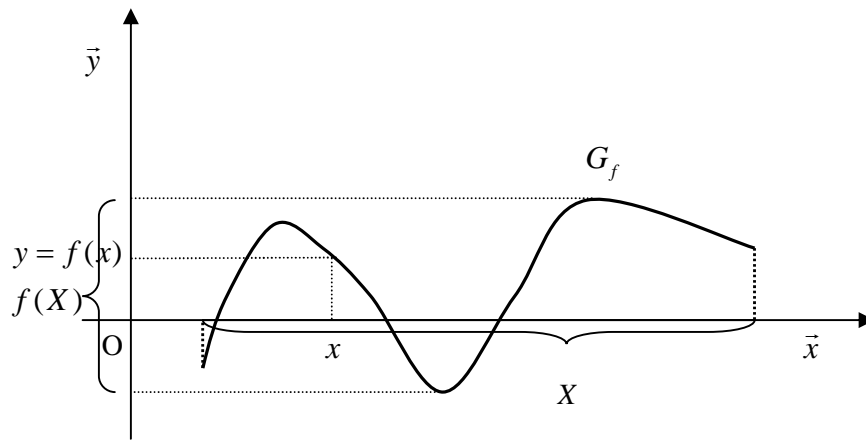


Figura 4.1

ESEMPI

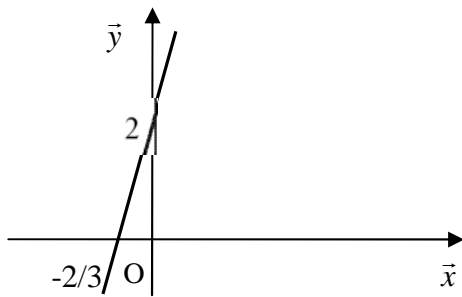


Figura 4.2 Grafico di $f(x) = 3x + 2$.

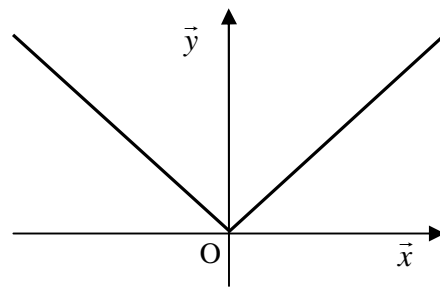


Figura 4.3 Grafico di $f(x) = |x|$.

Osserviamo, infine, che il grafico di una funzione pari (dispari) è simmetrico rispetto all'asse \bar{y} (all'origine).

ESEMPI

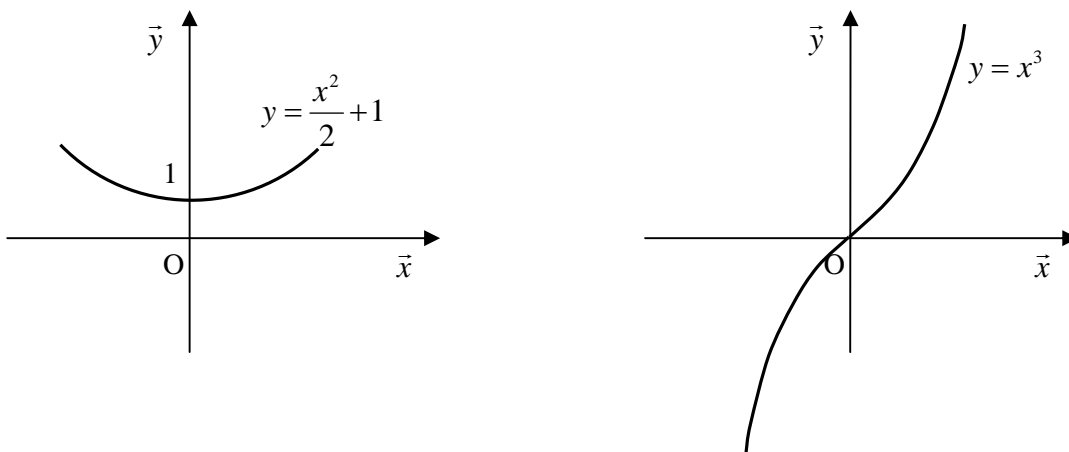


Figura 4.4 (a) è il grafico di una funzione pari, (b) è il grafico di una funzione dispari.

4.2 I simboli $-\infty$ e $+\infty$

Introduciamo i simboli $+\infty$ e $-\infty$ con le seguenti proprietà (tale algebra troverà applicazione nel calcolo dei limiti):

- $\forall a \in \mathbb{R}, -\infty < a < +\infty$
- $\forall a \in \mathbb{R}, a \pm \infty = \pm \infty$
- $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, a \cdot +\infty = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$ ed $a \cdot -\infty = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- $\pm \infty + (\pm \infty) = \pm \infty$
- $\pm \infty \cdot (\pm \infty) = +\infty$; $\pm \infty \cdot (\mp \infty) = -\infty$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \frac{a}{\pm \infty} = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \frac{a}{0} = \infty$.

4.3 Intervalli di \mathbb{R}

Siano a e $b \in \mathbb{R}, a < b$.

DEFINIZIONI.

- Si chiama *intervallo aperto (chiuso) di estremi a e b* , e lo si denota con $]a, b[$ ($[a, b]$) il sottoinsieme di \mathbb{R} definito da :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad ([a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}).$$

Ovviamente, l'intervallo aperto (chiuso) sulla retta rappresenta il segmento di estremi esclusi (inclusi) a e b .

- Si chiama *intervallo aperto a sinistra (destra) di estremi a e b* l'insieme:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad ([a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}).$$

- Si chiama *intervallo non limitato a destra (sinistra)* uno dei due seguenti insiemi :

$$\begin{aligned}]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} & ([a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}) \\ (]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} & (]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}) \end{aligned}$$

Infine, si conviene che $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ e con il simbolo (a, b) intenderemo un intervallo qualsiasi limitato oppure non limitato.

4.4 Funzioni limitate

Sia data una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE. Si dice che f è limitata superiormente (inferiormente) se

$$\exists k \in \mathbb{R} : f(x) \leq k \quad \forall x \in X \quad (\exists h \in \mathbb{R} : f(x) \geq h \quad \forall x \in X).$$

Il numero k (h) si chiama un maggiorante (minorante) di $f(x)$ ed ovviamente non è unico, infatti se $k' > k$ ($h' < h$) allora k' è un maggiorante (h' è un minorante).

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} : X = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[;$$

risulta $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$, pertanto 0 è un minorante, 1 è un maggiorante.

DEFINIZIONE. Si dice che $f(x)$ non è limitata superiormente (inferiormente) se $\nexists k$ maggiorante (h minorante) di $f(x)$, ovvero

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) > k \quad (\forall h \in \mathbb{R} \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) < h).$$

Ad esempio la funzione $f(x) = x$ non è limitata né superiormente né inferiormente.

DEFINIZIONE. Una funzione limitata superiormente ed inferiormente si dice limitata.

OSSERVAZIONE. Una funzione potrebbe essere limitata superiormente e non inferiormente o viceversa, limitata sia superiormente che inferiormente ed, infine, non limitata inferiormente e superiormente.

DEFINIZIONE. Se M è un maggiorante per $f(x)$ ($f(x) \leq M \quad \forall x \in X$) ed inoltre $\exists x_1 \in X : f(x_1) = M$ allora M si dice MASSIMO di $f(x)$ $\left(\max_x f(x) \right)$.

Osserviamo che il massimo (se esiste) è unico.

Analogamente, diremo che m è MINIMO di $f(x)$ $\left(\min_x f(x) \right)$, se m è un minorante ($m \leq f(x) \quad \forall x \in X$) ed inoltre $\exists x_2 \in X : f(x_2) = m$.

Anche il minimo, se esiste, è unico.

ESEMPIO

$$\text{Sia } f(x) = \frac{1}{1+x^2} : X =]-\infty, +\infty[.$$

$$\text{Poiché } 1 = f(0) \geq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[\Rightarrow 1 = \max f(x);$$

mentre $f(x)$ non ha minimo perché se fosse $l = \min f(x) > 0$, $l \leq \frac{1}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$ avremmo $x^2 + 1 \leq \frac{1}{l} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{l} - 1 \forall x \in \mathbb{R}$ che ovviamente è assurdo.

4.4.1 Esistenza dell'estremo superiore (inferiore)

Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ limitata superiormente (inferiormente), si prova che esiste un unico numero reale L (l) tale che :

$$\left(\begin{array}{l} (1) f(x) \leq L \quad \forall x \in X; \\ (2) \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) > L - \varepsilon \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} (1') l \leq f(x) \quad \forall x \in X; \\ (2') \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} \in X : f(\bar{x}) < l + \varepsilon \end{array} \right).$$

Tale numero L (l) si chiama *estremo superiore* (*estremo inferiore*) di $f(x)$ e lo si indica con $\sup_x f(x)$ ($\inf_x f(x)$); ovviamente L (l) è un maggiorante (minorante) ed è il più piccolo dei maggioranti (il più grande dei minoranti).

Se $f(x)$ non è limitata superiormente (inferiormente) per definizione poniamo $\sup_x f(x) = +\infty$ ($\inf_x f(x) = -\infty$).

OSSERVAZIONE. Se $M = \max_x f(x) \Rightarrow \sup_x f(x) = M$, mentre $f(x)$ potrebbe essere limitata superiormente e non avere massimo. Analoghe considerazioni per il minimo.

ESEMPI

- Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2} :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$;

risulta $1 = \sup f(x)$ in quanto $1 = \max f(x)$, mentre $0 = \inf f(x)$, infatti :

$$1') \quad 0 \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

2') fissato $\varepsilon > 0$ consideriamo la disequazione:

$$\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow 1+x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ se } \varepsilon > 1 \\ \forall x \neq 0 \text{ se } \varepsilon = 1 \\ |x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \text{ se } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$$

quindi in ogni caso è possibile determinare $\bar{x} \in \mathbb{R} : \frac{1}{1+\bar{x}^2} < \varepsilon$.

- Sia $f(x) = x^2 :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; risulta $0 = f(0) \leq x^2 \forall x \in]-\infty, +\infty[$ pertanto $0 = \min f(x) = \inf f(x)$; invece $f(x)$ non è limitata superiormente infatti preso $\forall k \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^2 > k$ ammette infinite soluzioni, quindi $\sup f(x) = +\infty$.

OSSERVAZIONE. Le definizioni di funzione limitata superiormente e/o inferiormente, di massimo e di minimo, di estremo superiore ed inferiore sono strettamente legate a quelle introdotte nel paragrafo 1.8 del Capitolo 1, riguardante gli insiemi limitati, infatti si ottengono da quelle riferendosi al condominio di $f(x)$.

4.5 Funzione composta

Siano $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(y) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$; se $codf \subseteq (c, d)$ è possibile definire la funzione

$$F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ con la legge } F(x) = g(f(x)).$$

La funzione $F(x)$ si dice composta dalle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e si suole denotare con $(g \circ f)(x)$.

ESEMPIO

Siano $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(y) = \cos y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

poiché $codf =]0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$ è lecito considerare la funzione composta

$$F(x) = g(f(x)) = (\cos x^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

OSSERVAZIONE. Se è possibile considerare $g \circ f$ ed $f \circ g$, in generale $g \circ f \neq f \circ g$; infatti nell'esempio precedente $(g \circ f)(x) = (\cos x)^2 \neq \cos x^2$.

4.6 Funzioni monotone

Sia $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$;

DEFINIZIONI.

- $f(x)$ si dice crescente (decescente) in (a, b) se:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_2) < f(x_1));$$

- $f(x)$ si dice non decrescente (non crescente) in (a, b) se:

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_2) \leq f(x_1)).$$

ESEMPI

- $f(x) = x^2 + 1$ cresce in \mathbb{R}_0^+ infatti

$$\text{se } 0 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) = 1 + x_1^2 < 1 + x_2^2 = f(x_2);$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$ decresce in \mathbb{R}^+ , infatti se $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) = \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} = f(x_1)$.

Una funzione costante è al tempo stesso non crescente e non decrescente, così una funzione non è detto che sia crescente o decrescente nel suo insieme di definizione; ad esempio $f(x) = x^2 + 1$ è crescente in $[0, +\infty[$ ma è decrescente in $]-\infty, 0]$.

Una funzione del tipo precedente sarà detta “*monotona*”.

OSSERVAZIONE. Vedremo in seguito come è possibile riconoscere gli *intervalli di monotonia* di una funzione (ovvero gli intervalli contenuti nell’insieme di definizione dove la funzione cresce (non decresce) o decresce (non cresce)) a prescindere dalle definizioni date, che, nella maggior parte dei casi non sono di facile verifica.

4.7 Funzione invertibile

Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$;

DEFINIZIONE. $f(x)$ si dice invertibile in (a, b) se $\forall y \in \text{codf}(x) \exists_1 x \in (a, b): f(x) = y$.

In tal caso è possibile definire $g(y): \text{codf} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(y) = x$ con x tale che $f(x) = y$. La funzione $g(y)$ si chiama la *funzione inversa* di $f(x)$ e la si denota con $f^{-1}(y)$.

Osserviamo che se $f(x)$ è invertibile, il codominio di $f(x)$ diviene il dominio di $f^{-1}(y)$ e viceversa.

ESEMPI

- Sia $f(x) = \sqrt{x}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$; risulta $\text{codf}(x) = [0, +\infty[$, allora se $y \in [0, +\infty[$ l’equazione $\sqrt{x} = y$ ammette come unica soluzione $x = y^2$, pertanto $f(x)$ è invertibile e la sua funzione inversa è $g(y) = f^{-1}(y) = y^2$.
- La funzione $f(x) = x^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è invertibile, infatti se $y \in \text{codf}(x) = [0, +\infty[$, l’equazione $x^2 = y$ ammette due soluzioni $x = \pm\sqrt{y}$.

Teorema 4.1 Se $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente (decrescente) allora $f(x)$ è invertibile.

Dimostrazione: Sia $y \in \text{codf}(x)$, se $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$ t.c. $f(x_1) = f(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$ in quanto dalla stretta monotonia di $f(x)$ se fosse $x_1 \neq x_2$ avremo $f(x_1) \neq f(x_2)$.

OSSERVAZIONE. Se $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile $\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$ ed $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = \text{identità}$.

4.8 Limiti

Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$ con la proprietà che in un qualunque intervallo che lo contiene è possibile trovare almeno un punto di X diverso da esso (diremo in tal caso che x_0 è un *punto di accumulazione* per X).

DEFINIZIONE. La funzione $f(x)$ si dice che converge ad $l \in \mathbb{R}$ al tendere di x ad x_0 e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

Osserviamo che il calcolo del limite è indipendente dal valore che la funzione assume se definita in x_0 .

DEFINIZIONE. La funzione $f(x)$ si dice che diverge a $+\infty$ ($-\infty$) al tendere di x ad x_0 e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

se

$$\begin{aligned} \forall k > 0 \exists \delta' > 0 : \forall x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta' \Rightarrow f(x) > k \\ (\forall h > 0 \exists \delta'' > 0 : \forall x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta'' \Rightarrow f(x) < -h). \end{aligned}$$

Osserviamo che nelle definizioni precedenti il δ dipende da ε o da k (h), ed inoltre il risultato del limite, sia esso finito o meno, ci dà l'idea del valore finito o infinitamente grande (piccolo) che la funzione assume quando la calcoliamo per x prossimo ad x_0 .

ESEMPI

- Sia $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$; risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$, infatti fissato $k > 0$ la disequazione $\frac{1}{|x|} > k$ è soddisfatta per $|x| < \frac{1}{k}$ allora è sufficiente prendere $\delta \leq \frac{1}{k}$.
- Risulta che $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$ infatti fissato $\varepsilon > 0$ la disequazione $|x-1-1| < \varepsilon$ equivale a $|x-2| < \varepsilon$, pertanto sarà sufficiente scegliere $\delta \leq \varepsilon$.

Sia ora $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, X non limitato superiormente.

DEFINIZIONE. Diremo che $f(x)$ converge ad l al tendere di x a $+\infty$ ed indicheremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

DEFINIZIONE. Diremo che $f(x)$ diverge a $+\infty$ ($-\infty$) al tendere di x a $+\infty$ e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

se

$$\begin{aligned} \forall k > 0 \exists \delta' > 0 : \forall x \in X, x > \delta' \Rightarrow f(x) > k \\ (\forall h > 0 \exists \delta'' > 0 : \forall x \in X, x > \delta'' \Rightarrow f(x) < -h). \end{aligned}$$

ESEMPI

- Risulta che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ infatti fissato $\varepsilon > 0$ la disequazione $\frac{1}{x} > \varepsilon$ è verificata da $x < \frac{1}{\varepsilon}$ allora sarà sufficiente scegliere $\delta \leq \frac{1}{\varepsilon}$.
- Risulta che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; infatti fissato $k > 0$ la disequazione $x^2 > k$ è soddisfatta da x tale che $|x| > \sqrt{k}$ quindi l'asserto seguirà scegliendo $\delta \geq \sqrt{k}$.

Osserviamo che il δ dipende, anche in questo caso, da ε oppure da k (h).

Infine, sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, X non limitato inferiormente. Allora è possibile definire il

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

potendo questo valere un numero oppure i simboli $\pm \infty$, con definizioni analoghe a quelle viste in precedenza.

OSSERVAZIONE. Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$; detto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.) il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ potrebbe non esistere.

ESEMPIO

$$\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \text{ e } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Vale il seguente

Teorema 4.2 (Unicità del limite) Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.). Se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esso è unico.

Ad esempio proviamo che non è possibile che : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$; $x_0, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione: Sia $l_1 < l_2$; scegliendo $\varepsilon = l_2 - l_1$ risulta dalla definizione di limite :

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{ed} \quad |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } |x - x_0| < \delta_2;$$

allora per $|x - x_0| < \bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\begin{aligned} l_2 - l_1 &= |l_2 - l_1| = |l_2 - l_1 + f(x) - f(x)| = |(l_2 - f(x)) + (f(x) - l_1)| \leq |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1| = \\ &= |f(x) - l_2| + |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = l_2 - l_1 \end{aligned}$$

In definitiva avremo provato che $l_2 - l_1 < l_2 - l_1$: assurdo!

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è utile considerare anche i cosiddetti limite destro $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e limite sinistro $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, ovvero studiamo il comportamento di $f(x)$ quando ci avviciniamo ad x_0 per valori di x rispettivamente solo maggiori di x_0 o solo minori. Così, ad esempio, l'espressione $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ equivale a dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

Il legame tra il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ed il limite destro ed il limite sinistro è espresso dal seguente :

Teorema 4.3 Siano $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per X ; allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l .$$

Sia ad esempio $l \in \mathbb{R}$,

Dimostrazione (condizione necessaria):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

da cui al tempo stesso $|f(x) - l| < \varepsilon$ vale sia per x tale che $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

sia per $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$.

Dimostrazione (condizione sufficiente):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in X - \{x_0\}, x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon ,$$

ed analogamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in X - \{x_0\}, x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon ;$$

pertanto in corrispondenza di $\varepsilon > 0$, detto $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

se $x \in X - \{x_0\}$, con $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

OSSERVAZIONE. Tale teorema può essere usato in senso “*distruttivo*” ovvero se accade che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ allora potremo affermare che $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ad esempio $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$; infatti $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$.

4.8.1 Comportamento al limite di alcune funzioni elementari

Di seguito riportiamo il comportamento al limite delle funzioni x^α , $\log_a x$, a^x , $\sin x$, $\cos x$.

- Sia $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, la funzione $f(x) = x^\alpha$ è definita in $]0, +\infty[$ (in $\forall x_0 \in \mathbb{R}$) e risulta per essa $\forall x_0 > 0, \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

ovviamente se $\alpha = 0$, qualunque sia il limite considerato per x^α il risultato sarà sempre 1, mentre, in particolare, se $\alpha = m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, si ha : $\lim_{x \rightarrow x_0} x^m = x_0^m \quad \forall x_0 < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in \mathbb{Z}, m \text{ pari} \\ -\infty & \text{se } m \in \mathbb{Z}, m \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } m < 0 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in \mathbb{Z}_-, m \text{ pari} \\ -\infty & \text{se } m \in \mathbb{Z}_-, m \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } m > 0 \end{cases}$$

- Sia $a > 0, a \neq 1$, la funzione $f(x) = a^x$ definita in \mathbb{R} ha il seguente comportamento al limite:

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, e si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- Sia $a > 0, a \neq 1$, la funzione $f(x) = \log_a x$ definita in \mathbb{R}^+ ha il seguente comportamento al limite:

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+, \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, e si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

- Le funzioni trigonometriche $\sin x, \cos x$ sono definite in \mathbb{R} ; si prova che :

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, mentre come già detto

$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ e $\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$.

Altri *limiti notevoli*, ovvero il cui valore non è di immediato calcolo ma che possono essere utilizzati per risolvere altri limiti assegnati sono:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (numero di Nepero);
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_a e \quad (a > 0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$.

Risulta che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = (\log_e 2) \cdot 1 = \log_e 2$.

La giustificazione del risultato precedente, oltre che dai limiti notevoli sopra indicati, segue dai risultati contenuti nel prossimo paragrafo.

4.8.2 Operazioni con i limiti

Avendo definito un'algebra con i simboli $\pm \infty$ possiamo affermare che :

Proposizione 4.4 *Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto e quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei limiti, purché non sia una delle forme indeterminate:*

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0} \quad .$$

Proviamo, ad esempio, che se

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di X e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \left(\frac{n}{\infty} = 0 \right).$$

Dimostrazione: Dalla definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, in corrispondenza del numero reale positivo

$|l| + 1$ si ha

$$\exists \delta_1 > 0 : x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l - |l| - 1 < f(x) < l + |l| + 1 \Rightarrow$$

$$|f(x)| < 2|l| + 1 \quad \text{se} \quad |x - x_0| < \delta_1, x \in X - \{x_0\}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, in corrispondenza del numero positivo $\frac{(2|l|+1)}{\varepsilon}$

$$\exists \delta_2 > 0 : x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > \frac{(2|l|+1)}{\varepsilon} (> 0) \Leftrightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{(2|l|+1)},$$

pertanto, posto $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$,

$$\text{se } x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 2|l| + 1 \text{ e } \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2|l| + 1};$$

dalle ultime due relazioni, moltiplicando membro a membro, si ha:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta, \text{ ovvero } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

ESEMPI

- Calcolare il $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)$;

risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, per cui $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

- Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1}$;

risulta $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 0$ pertanto $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty$; per dare il segno ad ∞ conside-

riamo la disequazione $\frac{x}{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ ed $x > 1$, ne segue che il valore del limite assegnato è $+\infty$.

- Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x}$;

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x} = 0$.

OSSERVAZIONE. Se si presenta una delle quattro “forme indeterminate” indicate in precedenza non significa che il limite non esiste, ma semplicemente che non si può stabilire a priori, come negli altri casi, il risultato del limite; in tal caso occorre, mediante trasformazioni e semplificazioni o ricorrendo ai limiti notevoli, eliminare l’indeterminazione (se possibile).

Ad esempio considerate $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $h(x) = x^2$ le funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{f(x)}{h(x)}$, $\frac{h(x)}{g(x)}$

al tendere di x a $+\infty$, si presentano in forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ ma

$\frac{f(x)}{g(x)} = -1$, $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{1}{x}$, $\frac{h(x)}{g(x)} = -x$ e quindi le forme indeterminate vengono, in realtà, eliminate.

4.8.3 Teoremi sui limiti

Fissato $\delta > 0$, indicheremo: $I_\delta(x_0) = \begin{cases}]x_0 - \delta, x_0 + \delta[& \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\]\delta, +\infty[& \text{se } x_0 = +\infty ; \\]-\infty, -\delta[& \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$

Teorema 4.5 (permanenza del segno) Siano $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.); supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ allora :

$\exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap X \quad f(x) \cdot l > 0$ (ovvero $f(x)$ “conserva” il segno del limite).

Dimostrazione: Siano, ad esempio, $X = (a, b)$, $l \in \mathbb{R}^+$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$;

in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{l}{2}$, dalla definizione di limite,

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b) - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < f(x).$$

Teorema 4.6 (*I° teorema del confronto o dei carabinieri*) Siano $f(x), g(x), h(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.); supponiamo che $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in X$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

Dimostrazione: Siano $X = (a, b)$ ed $x_0, l \in \mathbb{R}$; la definizione di limite, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ implica che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (a, b) - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon ;$$

analogamente da $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ si ha che :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (a, b) - \{x_0\}, |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

Allora, fissato $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\text{se } x \in (a, b) - \{x_0\} \text{ ed } |x - x_0| < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

ESEMPIO

Poiché risulta $0 \leq \sin x \leq x \quad \forall x : 0 < x < \frac{\pi}{2}$, dal teorema del confronto $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$.

Corollario 4.7 Siano $f(x), g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.); se $f(x)$ è limitata in X ($\Leftrightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$) e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Dimostrazione: Risulta $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M |g(x)| \quad \forall x \in X$;

poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$, l'asserto segue dal teorema dei carabinieri.

Teorema 4.8 (*II° teorema del confronto*) Siano $f(x), g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.); se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$. Allora :

- se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

OSSERVAZIONE. È possibile richiedere, nei teoremi precedenti, che i confronti tra le funzioni considerate valgano $\forall x \in I_\delta(x_0)$ per qualche $\delta > 0$ e non necessariamente su tutto X , questo perché, lo ricordiamo, il calcolo del limite di una funzione è un'indagine sul comportamento di essa "vicino ad x_0 ".

Corollario 4.9 Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del caso trattato, X non limitato inf. e/o sup.); se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora

$$\exists \delta > 0 \text{ ed } \exists M > 0: \forall x \in I_\delta(x_0) \cap X \quad |f(x)| \leq M \quad (\text{cioè } f(x) \text{ è localmente limitata}).$$

Dimostrazione: Siano $X = (a, +\infty[$, $x_0 = +\infty$; dalla definizione di limite, in corrispondenza di $\varepsilon = 1$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in (a, +\infty[$, $x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < 1 \Leftrightarrow \forall x \in I_\delta(x_0) \quad (=]\delta, +\infty[) \quad l - 1 < f(x) < l + 1$.

Sarà, allora, sufficiente scegliere $M = |l| + 1$.

Corollario 4.10 Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del caso trattato, X non limitato inf. e/o sup.); se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$) allora $f(x)$ è localmente limitata inferiormente (superiormente) ma non è limitata superiormente (inferiormente).

Dimostrazione: Siano $X = (a, +\infty[$, $x_0 = +\infty$; dalla definizione di limite, in corrispondenza di $k = 1$,

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (a, +\infty[$$
, $x > \delta \Rightarrow f(x) > 1$; pertanto 1 è un minorante di $f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0)$;

d'altra parte $\forall k > 0$ esiste almeno un $\bar{x} \in (a, +\infty[$, $\bar{x} > \delta$ tale che $f(\bar{x}) > k \Rightarrow f(x)$ non è limitata superiormente in $(a, +\infty[$.

4.8.4 Alcuni limiti particolari

In questo paragrafo vedremo come si risolve una forma indeterminata nel caso di alcuni limiti particolari.

- *Limite di un polinomio*

Sia $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_\gamma x^\gamma$, $a_\gamma \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, \dots, \gamma$,

nel calcolo del $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x)$ si può presentare la forma indeterminata $[\infty - \infty]$ per risolvere la quale occorre procedere nella maniera seguente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r \left(a_r + \frac{a_{r-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{r-1}} + \frac{a_0}{x^r} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_r > 0 \\ -\infty & \text{se } a_r < 0 \end{cases}$$

essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_s}{x^{\gamma-s}} = 0, \quad \forall s = 0, 1, \dots, \gamma - 1$$

ed anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_r x^r = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_r > 0 \\ -\infty & \text{se } a_r < 0 \end{cases}.$$

Il procedimento è analogo per $x \rightarrow -\infty$.

• *Limite di un rapporto di polinomi*

Siano $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_r x^r$, $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_s x^s$ due polinomi con $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $a_r, b_s \neq 0$, $\forall i = 0, 1, \dots, r$ $\forall j = 0, 1, \dots, s$.

Nel calcolo del $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ si presenta la forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ che può essere risolta nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r \left(a_r + \frac{a_{r-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{r-1}} + \frac{a_0}{x^r} \right)}{x^s \left(b_s + \frac{b_{s-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^s} \right)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > n \text{ ed } a_r b_s > 0 \\ -\infty & \text{se } m > n \text{ ed } a_r b_s < 0 \\ \frac{a_r}{b_s} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_p}{x^{\gamma-p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_q}{x^{s-q}} = 0 \quad \forall p = 0, 1, \dots, \gamma - 1 \quad \forall q = 0, 1, \dots, s - 1$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\gamma}{x^s} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \gamma > s \\ 1 & \text{se } \gamma = s \\ -\infty & \text{se } \gamma < s \end{cases};$$

ovvie modifiche se si affronta il limite per $x \rightarrow -\infty$.

ESEMPI

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = -\infty$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = 1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 6x + 5}{-x^3 + 2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)}{x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{+2}{-1} = -2$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = 2 - 0 + 0 = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = -1 + 0 - 0 = -1.$$

Teorema 4.11 (*cambiamento di variabile nel limite*) Sia $g(y) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con y_0 punto di accumulazione per (c, d) se $y_0 \in \mathbb{R}$, e con ovvie modifiche se $y_0 = \pm\infty$); supponiamo che

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Siano $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$: $\text{cod}f \subseteq (c, d)$ (quindi ha senso considerare $F(x) = g(f(x)) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$) ed $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (x_0 punto di accumulazione per (a, b) se $x_0 \in \mathbb{R}$, e con ovvie modifiche se $x_0 = \pm\infty$) tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = l.$$

Non riportiamo la dimostrazione di tale teorema ma faremo un esempio pratico del suo utilizzo.

Calcoliamo il $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$.

Risulta che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$, in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, allora sarà

sufficiente applicare il Teorema 4.11 con: $g(y) = \frac{\sin y}{y}$; $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = +\infty$, $y_0 = 0$.

Il comportamento al limite delle funzioni elementari a^x , x^α , $\log_a x$, $\cos x$, $\sin x$, ed il Teorema 4.11 ci permettono di tabulare il comportamento al limite delle funzioni composte $a^{f(x)}$, $[f(x)]^\alpha$, $\log_a f(x)$, $\cos f(x)$, $\sin f(x)$.

Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (x_0 punto di accumulazione per (a, b) se $x_0 \in \mathbb{R}$, e con ovvie modifiche se $x_0 = \pm\infty$);

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\alpha = l^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0, \alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases},$$

in particolare se $\alpha = n \in \mathbb{Z}_-$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = +\infty$ se n pari, mentre se n dispari è importante per il calcolo di tale limite conoscere il segno di $f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases},$$

in particolare se $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$.

ESEMPIO

Risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^{\frac{1}{2}} = +\infty$, essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) = \log_a l \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a > 0, a \neq 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

ESEMPIO

Risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^3 + 2x - 1}{x + 2} \right) = -\infty$ poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = +\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^l \quad \forall a > 0,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases},$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}.$

ESEMPIO

Risulta $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 0$ poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty.$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin f(x) = \sin l \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \cos f(x) = \cos l \end{cases}.$

ESEMPIO

Risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right) \pi \right] = 0$ poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \pi = -\pi.$

4.8.5 Interpretazione grafica del limite

Nel grafico seguente si è dato un'interpretazione di alcuni risultati riguardanti il calcolo del $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e del $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$:

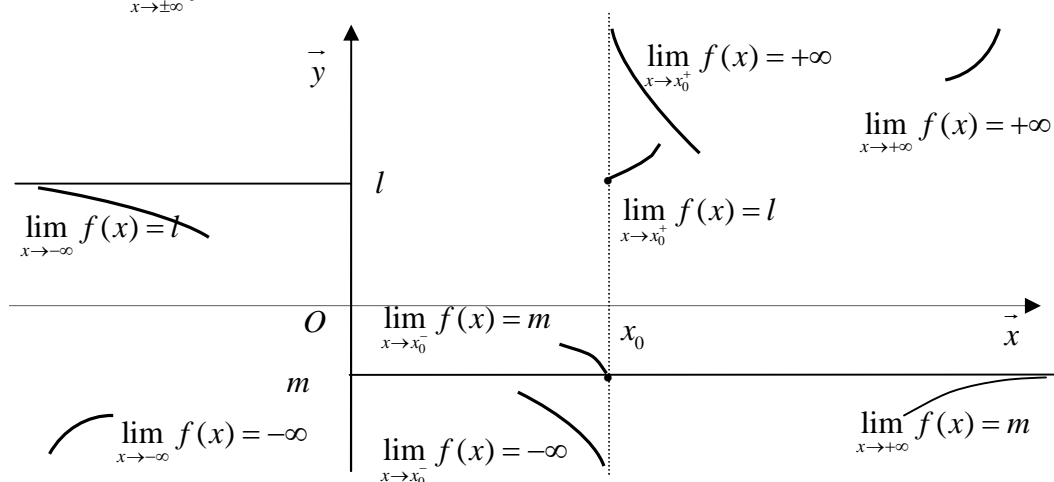


Figura 4.5 Interpretazione grafica del limite.

4.9 Successioni numeriche

Una *successione numerica* è una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} , quindi è una legge che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa un solo numero reale y_n .

Indichiamo una successione con $(y_n)_n$, o per esteso con

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

Esempi di successioni sono :

$$y_n = n^2 + 1 \quad \text{ovvero} \quad 2, 5, 10, 17, \dots, (n^2 + 1), \dots$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$y_n = (-1)^n \quad \text{ovvero} \quad -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

DEFINIZIONE. Una successione $(y_n)_n$ si dice *limitata superiormente* (*inferiormente*) se $\exists k \in \mathbb{R}$ ($h \in \mathbb{R}$): $y_n \leq k$ ($y_n \geq h$) $\forall n \in \mathbb{N}$, e, *semplicemente, limitata* se è limitata superiormente ed inferiormente.

Proponiamo allo studente di verificare che

$$(y_n)_n \text{ è limitata} \Leftrightarrow \exists M > 0 : |y_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

OSSERVAZIONE. Le definizioni precedenti si ricavano da quelle introdotte nel paragrafo riguardante gli insiemi limitati (paragrafo 1.8, Capitolo 1), infatti, basterà riferirsi ad $X = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ (*sostegno della successione*).

Così, ad esempio, diremo che $M = \sup_n y_n$ ($m = \inf_n y_n$), se $(y_n)_n$ è limitata superiormente (inferiormente), ed M (m) soddisfa le due seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} 1) y_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} & \quad [1') y_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}] \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : y_{\bar{n}} > M - \varepsilon & \quad [2') \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N} : y_{\bar{\bar{n}}} < m + \varepsilon]. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE. Si dice che la successione $(y_n)_n$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ e si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \forall n > v \quad |y_n - l| < \varepsilon.$$

ESEMPIO

Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, infatti, fissato $\varepsilon > 0$, la disequazione $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ è soddisfatta da $\forall x > (\sqrt{\varepsilon})^{-1}$;

allora preso $\bar{n} \in \mathbb{N}$, $\bar{n} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (*principio di Archimede*), qualunque sia $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

DEFINIZIONE. Si dice che la successione $(y_n)_n$ diverge a $+\infty$ ($-\infty$) e si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ($-\infty$) se

$$\forall k > 0 \exists v_1 \in \mathbb{N}: \forall n > v_1 \quad y_n > k$$

$$(\forall h > 0 \exists v_2 \in \mathbb{N}: \forall n > v_2 \quad y_n < -h).$$

ESEMPIO

Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} n - 1 = +\infty$, infatti, fissato $k > 0$, la disequazione $x - 1 > k$ è soddisfatta da $\forall x > 1 + k$; allora preso $v_1 \in \mathbb{N}$, $v_1 > 1 + k$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$:
 $n \geq v_1 \Rightarrow n > 1 + k \Rightarrow n - 1 > k$.

Ovviamente una successione $(y_n)_n$ potrebbe non avere limite; ma se converge o diverge si dice *regolare*.

OSSERVAZIONE. Poiché una successione $(y_n)_n$ è una particolare funzione, possiamo affermare che se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, finito o meno, allora esso è unico (Teorema di unicità del limite); così come possiamo parlare di permanenza del segno, confronto tra limiti, operazioni con i limiti, etc...

Corollario 4.12 Sia $(y_n)_n$ una successione convergente ad $l \in \mathbb{R} \Rightarrow (y_n)_n$ è limitata.

Dimostrazione: Dalla definizione di convergenza, in corrispondenza di $\varepsilon = 1$

$$\exists v \in \mathbb{N}: \forall n > v \quad l - 1 < y_n < l + 1,$$

allora posto $h = \min(l - 1, y_1, \dots, y_{v-1})$ e $k = \max(l + 1, y_1, \dots, y_{v-1})$ risulta $h \leq y_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$; infatti se $n \geq v \quad h \leq l - 1 < y_n < l + 1 \leq k$; invece, se $1 \leq n < v \quad h \leq y_n \leq k$.

Il viceversa non è vero: è possibile considerare una successione limitata ma non convergente.

ESEMPIO

$y_n = (-1)^n$; risulta $y_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ e quindi $-1 \leq y_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ma verificheremo in seguito che $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$.

Teorema 4.13 (di caratterizzazione del limite) Siano $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (con x_0 punto di accumulazione di X se $x_0 \in \mathbb{R}$ o, a secondo del limite considerato, X non limitato inf. e/o sup.); allora c.n.s. affinché $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ è che

$$\forall (x_n)_n, x_n \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} (\text{se } x_0 \in \mathbb{R}), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{si ha: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

Non dimostreremo il teorema, ma cercheremo di mettere in evidenza il risultato da esso fornito con qualche esempio.

Sono immediata conseguenza i seguenti risultati :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

ESEMPI

- Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$; infatti, poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ sarà sufficiente applicare il teorema 4.13 con $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{n}$, $l = 1$.

- Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_e \left(\frac{n+1}{n^3-1} \right) = -\infty$; infatti, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^3-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} \right)} = 0$ e

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_e x = -\infty$ sarà sufficiente applicare il teorema precedente con $f(x) = \log_e x$, $x_0 = 0$,

$$x_n = \frac{n+1}{n^3-1}, l = -\infty.$$

4.9.1 Successioni monotone

DEFINIZIONI.

- Una successione $(y_n)_n$ si dice monotona crescente (decrescente) se e solo se $y_n < y_{n+1}$ ($y_n > y_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$
- Una successione $(y_n)_n$ si dice monotona non decrescente (non crescente) se e solo se $y_n \leq y_{n+1}$ ($y_n \geq y_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

OSSERVAZIONE. Una successione $(y_n)_n$ monotona crescente (non decrescente) è limitata inferiormente, infatti da $y_n < y_{n+1}$ ($y_n \leq y_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_1 < y_2 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$ ($y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq y_{n+1} \leq \dots$), pertanto y_1 è l'estremo inferiore (anche minimo).

Analogamente, una successione $(y_n)_n$ monotona decrescente (non crescente) è limitata superiormente con $y_1 = \max_n y_n$.

Teorema 4.14 (regolarità delle successioni monotone) Sia $(y_n)_n$ successione monotona crescente o non decrescente (decrescente o non crescente) allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup_n y_n = \begin{cases} l & \text{se } (y_n)_n \text{ è limitata superiormente} \\ +\infty & \text{se } (y_n)_n \text{ non è limitata superiormente} \end{cases}$$

$$\left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_n y_n = \begin{cases} l & \text{se } (y_n)_n \text{ è limitata inferiormente} \\ -\infty & \text{se } (y_n)_n \text{ non è limitata inferiormente} \end{cases} \right).$$

Come sempre preferiamo, alla dimostrazione del teorema, riportare alcuni esempi che ne evidenziano l'importanza:

ESEMPI

- La successione $y_n = \frac{1}{n}$ è monotona decrescente, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow 0 = \inf_n y_n$.
- La successione $y_n = n^2 + 1$ è monotona crescente, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 1) = +\infty \Rightarrow +\infty = \sup_n y_n$, pertanto $(y_n)_n$ non è limitata superiormente.

4.9.2 Successione estratta

Sia data $(y_n)_n$ e sia $(n_k)_k$ una successione crescente di interi ($n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$), ad esempio

$$n_k = 2k \Rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots, 2k, \dots$$

$$n_k = 2k - 1 \Rightarrow 1, 3, 5, 7, \dots, 2k - 1, \dots$$

allora la successione $(y_{n_k})_k$ che si ottiene da quella data considerando i termini con indice corrispondente ad n_k (nei due esempi considerati avremo la successione dei termini di posto pari $y_2, y_4, y_6, \dots, y_{2k}, \dots$ e la successione dei termini di posto dispari $y_1, y_3, y_5, \dots, y_{2k-1}, \dots$) si chiama successione estratta da $(y_n)_n$.

Il legame tra il comportamento al limite di una successione e di una sua estratta è espresso dal seguente teorema:

Teorema 4.15 Sia $(y_n)_n$ una successione convergente (divergente $\pm \infty$) $\Rightarrow (y_{n_k})_k$ converge (diverge a $\pm \infty$), ovvero $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

OSSERVAZIONE. Possiamo utilizzare tale teorema in senso “distruttivo” ovvero se determiniamo due successioni estratte da $(y_n)_n$, siano $(y_{n_k})_k$ ed $(y_{r_k})_k$, tali che $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} y_{r_k}$ allora $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, perché se tale limite esistesse dal teorema precedente le due successioni estratte dovrebbero avere lo stesso limite.

OSSERVAZIONE. Abbiamo visto che se una successione è limitata non è detto che converga, però da ogni successione limitata se ne può estrarre una convergente (Teorema di Bolzano-Weierstass).

ESEMPIO

Abbiamo affermato che $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$, infatti se consideriamo due successioni estratte da $(-1)^n$

$$y_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k} = 1 \quad \text{mentre se consideriamo}$$

$$y_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k-1} = -1, \text{ da cui l'asserto.}$$

A conclusione riportiamo il calcolo di alcuni limiti:

ESEMPI

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} - (n+1)^{\frac{1}{2}} = [\infty - \infty]$;
 scriviamo $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n}{n-1}} = e$ in quanto
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(1 - \frac{1}{n})} = 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 3n + 5) = [\infty - \infty]$;
 come per i polinomi scriviamo
 $(n^3 - 3n + 5) = n^3 \left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right)$ e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right) = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 3n^2 + 4}{3n^5 + 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(1 - \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^5}\right)}{n^5 \left(3 + \frac{4}{n^4}\right)} = \frac{1}{3}$.

4.10 Funzioni continue

DEFINIZIONE. Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$; $f(x)$ si dice continua in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se ciò accade $\forall x_0 \in (a, b)$ la funzione $f(x)$ si dice continua in (a, b) .

ESEMPIO

Le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, a^x , x^α sono funzioni continue nel loro insieme di definizione.

ESEMPI

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ è definita in $[-1, 1]$. Sia $x_0 \in [-1, 1]$: essendo $\lim_{x \rightarrow x_0} (1-x^2) = (1-x_0^2)$
 risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1-x_0^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x)$ è continua $\forall x_0 \in [-1, 1] \Rightarrow$
 $f(x)$ è continua in $[-1, 1]$.
- Sia $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; essa risulta definita in \mathbb{R} , ma non è continua in $x_0 = 0$ infatti
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 5 = f(0)$.

4.10.1 Proprietà delle funzioni continue

Dalle operazioni con i limiti ricaviamo che :

I la somma (differenza) di due o più funzioni continue è una funzione continua

$$\text{(risulta } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{),}$$

II il prodotto di due o più funzioni continue è una funzione continua,

III il quoto di due funzioni continue è una funzione continua in tutti i punti in cui il denominatore è non nullo,

IV la composizione di due funzioni continue è una funzione continua.

ESEMPI

- La funzione $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}$ è definita in $\mathbb{R} - \{-2\}$ ed è ivi continua in quanto rapporto di due polinomi (osserviamo che ogni polinomio $P(x)$ è una funzione continua in quanto somma e/o differenza di potenze della x).

- La funzione $f(x) = \log\left(\frac{2x^2 + 3}{x^2 + x + 1}\right)$ è definita in \mathbb{R} ed è ivi continua in quanto composizione delle due funzioni continue $g(y) = \log y$ ed $h(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x + 1}$ (osserviamo che $x^2 + x + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$).

- La funzione $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 0 \\ x + 5 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è definita in \mathbb{R} ;
 $f(x)$ è continua in $]-\infty, 0[$, in quanto restrizione di 2^x che è definita e continua su tutto \mathbb{R} , così $f(x)$ è continua in $]0, +\infty[$ in quanto restrizione del polinomio $(x + 5)$ che è definito e continuo su tutto \mathbb{R} ; poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 5) = 5$ $f(x)$ non è continua in $x_0 = 0$ (osserviamo che $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$).

4.10.2 Classificazione dei punti di discontinuità

Siano $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di (a, b) .

DEFINIZIONE. Il punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} \text{ con } l_1 \neq l_2$$

Graficamente si ha:

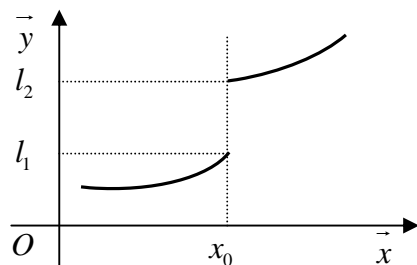


Figura 4.6 Discontinuità di I specie.

In tal caso $|l_1 - l_2|$ si chiama “salto della funzione” in x_0 .

ESEMPIO

$$\text{Sia } f(x) = \frac{|x|}{x} : \mathbb{R} - \{0\}$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ il punto $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie, ed il salto vale 2.

DEFINIZIONE. Il punto x_0 si dice un punto di discontinuità di seconda specie se almeno uno dei due limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ non esiste oppure esiste ma non finito.

ESEMPIO

$$\text{Sia } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x > 1 \\ 2x-2 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}, \text{ è definita in } \mathbb{R};$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ il punto $x_0 = 1$ è una discontinuità di seconda specie.

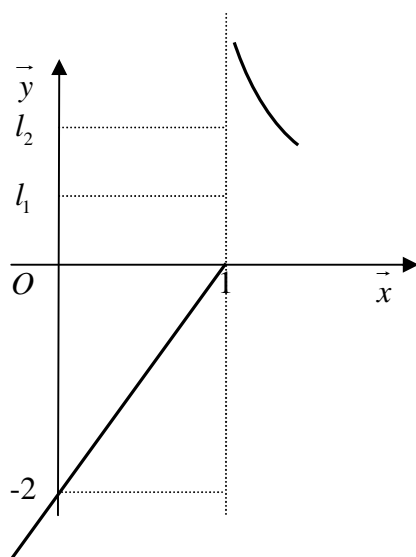


Figura 4.7 Discontinuità di II specie.

DEFINIZIONE. Il punto x_0 si dice un punto di discontinuità di terza specie o eliminabile se $f(x)$ è definita in x_0 e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ con $l \neq f(x_0)$ oppure $f(x)$ non è definita in x_0 ma $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

In tal caso definendo la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (a, b); x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

si ottiene una funzione continua in x_0 (da cui il nome di discontinuità eliminabile) infatti,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = F(x_0).$$

ESEMPIO

Sia $f(x) = \frac{\sin x}{x} : \mathbb{R} - \{0\}$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ il punto $x_0 = 0$ è una discontinuità eliminabile.

Ricordiamo che data $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ limitata superiormente (inferiormente) il numero reale M (m) è tale che $M = \max_{(a, b)} f(x)$ ($m = \min_{(a, b)} f(x)$) se

- 1. $f(x) \leq M \quad \forall x \in (a, b)$ [1'] $m \leq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$
- 2. $\exists \bar{x} \in (a, b) \text{ t.c. } f(\bar{x}) = M$ [2'] $\exists \bar{\bar{x}} \in (a, b) \text{ t.c. } f(\bar{\bar{x}}) = m$

Inoltre, in generale, una funzione $f(x)$ non è necessariamente limitata superiormente (inferiormente) e se lo fosse non è detto che abbia massimo (minimo).

I teoremi che ora dimostreremo riguardano le funzioni continue in $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato.

Teorema 4.16 (*I° teorema di Weierstrass*) Sia $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora

i $f(x)$ è limitata $\Leftrightarrow \exists \bar{h}, \bar{k} \in \mathbb{R} : \bar{h} \leq f(x) \leq \bar{k} \quad \forall x \in [a, b]$

ii posto $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ allora $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$f(x_1) = m \quad (\Rightarrow \quad m = \min f(x))$$

$$f(x_2) = M \quad (\Rightarrow \quad M = \max f(x))$$

Dimostrazione i: Procediamo per assurdo;

supponiamo che $f(x)$ non sia limitata in $[a, b]$; allora $\forall k \in \mathbb{R} \exists x_k \in [a, b] : f(x_k) > k$;

siano: $k = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) > 1$

$k = 2 \Rightarrow \exists x_2 \in [a, b] : f(x_2) > 2$

.....
 $k = n \Rightarrow \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$

Poiché $x_n \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n)_n$ è una successione limitata allora (Teorema di Bolzano - Weierstrass) $\exists (x_{n_k})_k$ estratta tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$.

Essendo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$, dal teorema di caratterizzazione del limite, risulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(c).$$

D'altra parte $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_{n_k}) > n_k$, allora, dal teorema di confronto sui limiti si ha $f(c) \geq +\infty$, assurdo. L'assurdo è sorto dall'aver supposto che $f(x)$ non fosse limitata superiormente in $[a, b]$.

Dimostrazione ii: Detto $M = \sup f(x)$ risulta $f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$. Per assurdo, sia $f(x) < M \quad \forall x \in [a, b]$ allora la funzione $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ è definita e continua in $[a, b]$.

Dalla prima parte del teorema, la funzione $g(x)$ risulta limitata superiormente in $[a, b]$, cioè

$$\exists H \in \mathbb{R} : g(x) \leq H \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{H} \quad \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{H} \quad \forall x \in [a, b].$$

D'altra parte poiché $M = \sup f(x)$, in corrispondenza di $\varepsilon = \frac{1}{H} \exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) > M - \frac{1}{H}$.

L'ultima relazione porta ad una contraddizione in quanto otteniamo $M - \frac{1}{H} < f(\bar{x}) \leq M - \frac{1}{H}$.

Teorema 4.17 (esistenza degli zeri) Sia $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(a) \cdot f(b) < 0$; allora $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Dimostrazione: Sia ad esempio $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due intervalli di eguale ampiezza tramite il punto medio di $[a, b] : \gamma = \frac{a+b}{2}$.

Se $f(\gamma) = 0$ abbiamo provato l'asserto, in caso contrario diciamo $[a_1, b_1]$ l'intervallo della decomposizione tale che $f(a_1) > 0$ ed $f(b_1) < 0$, con $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

Decomponiamo ora $[a_1, b_1]$ tramite il punto medio $\gamma_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ in due intervalli di eguale ampiezza; se $f(\gamma_1) = 0$ abbiamo concluso, in caso contrario diciamo $[a_2, b_2]$ l'intervallo della decomposizione tale che $f(a_2) > 0$ ed $f(b_2) < 0$, con $a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b$ e $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$. Così determiniamo (se il procedimento non ha avuto termine) due successioni $(a_n)_n, (b_n)_n$ tali che :

$$a \leq a_n \leq b_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad a_{n-1} \leq a_n, \quad b_n \leq b_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad f(a_n) > 0, \quad f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed infine

$$b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $(a_n)_n$ è monotona non decrescente ed $a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$ dal teorema di regolarità delle successioni monotone $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \in [a, b]$.

$$\text{Risulta } b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{b-a}{2^n} \right) = c.$$

Dal teorema di caratterizzazione del limite e dalla continuità di $f(x)$ in c otteniamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= f(c) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= f(c) \end{aligned}$$

e, poiché $f(a_n) > 0, \quad f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dal teorema di confronto si ha :

$$f(c) \geq 0 \quad \text{ed} \quad f(c) \leq 0.$$

Le ultime due relazioni possono coesistere solo per $f(c) = 0$ c.v.d..

Teorema 4.18 (II° teorema di Weierstrass) Sia $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua; posto $m = \min f(x), \quad M = \max f(x)$ allora $\forall \gamma : m < \gamma < M \Rightarrow \exists c \in [a, b]: f(c) = \gamma$

Dimostrazione: Siano $x_1, x_2 \in [a, b], \quad x_1 < x_2 : f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M$ allora

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b].$$

Fissato $\gamma : m < \gamma < M$ definiamo $g(x) = f(x) - \gamma, \quad x \in [x_1, x_2]$. La funzione $g(x)$ è continua in $[x_1, x_2]$ in quanto differenza di funzioni continue; inoltre

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_1) - \gamma = m - \gamma < 0 \\ g(x_2) &= f(x_2) - \gamma = M - \gamma > 0 \end{aligned}$$

allora dal teorema di esistenza degli zeri $\exists c \in]x_1, x_2[\subseteq [a, b]$ tale che $g(c) = f(c) - \gamma = 0$, ovvero $f(c) = \gamma$.

OSSERVAZIONE. Il secondo teorema di Weierstrass afferma che se $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora $\text{cod } f(x) = [m, M]$ dove $m = \min f(x), \quad M = \max f(x)$. In generale se $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua si può provare che $\text{cod } f(x) = (\inf f(x), \sup f(x))$ potendo anche $\sup f(x)$ ed $\inf f(x)$ non essere finiti.

ESEMPI

- Determiniamo il codominio di $f(x) = \log(x+1)$ per $x \in [0, +\infty[$; risulta $f(x)$ continua in $[0, +\infty[$ in quanto restrizione e composizione di funzioni continue. Poiché $1 \leq x+1 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow 0 = \log 1 \leq \log(1+x) \quad \forall x \geq 0$ ovvero $0 = f(0) \leq \log(1+x) = f(x) \quad \forall x \geq 0$ cioè $0 = \min_{[0, +\infty[} f(x)$; d'altra parte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x+1) = +\infty \Rightarrow \sup_{[0, +\infty[} f(x) = +\infty$ pertanto $\text{cod } f(x) = [0, +\infty[$.

- L'equazione $x^3 + 2x + 1 = 0$ ha radici reali?

Sia $f(x) = x^3 + 2x + 1$; osserviamo che $f(x)$ è definita e continua in \mathbb{R} e risulta

$$f(-1) = -2 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

allora dal teorema di esistenza degli zeri $\exists \bar{x} \in]-1, 0[$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Pertanto l'equazione data ha almeno una radice reale $\bar{x} \in]-1, 0[$.

Capitolo 5. Calcolo infinitesimale

5.1 Derivazione

Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in]a, b[$.

DEFINIZIONE. Diremo che $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 se esiste finito il seguente limite

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e porremo per definizione $f'(x)$ oppure $D[f(x)]_{x=x_0}$ il valore di tale limite.

La funzione $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : (a, b) - \{x_0\}$ si chiama *rapporto incrementale* di $f(x)$ in x_0 ;

ponendo $x - x_0 = h$ il rapporto incrementale si può anche scrivere nella seguente maniera:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad h \neq 0, \quad h \in (a - x_0, b - x_0).$$

È di facile verifica che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

5.1.1 Significato geometrico della derivata

Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in]a, b[$; sia $x \in (a, b) - \{x_0\}$ e consideriamo sul grafico di $f(x)$ i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P = (x, f(x))$:

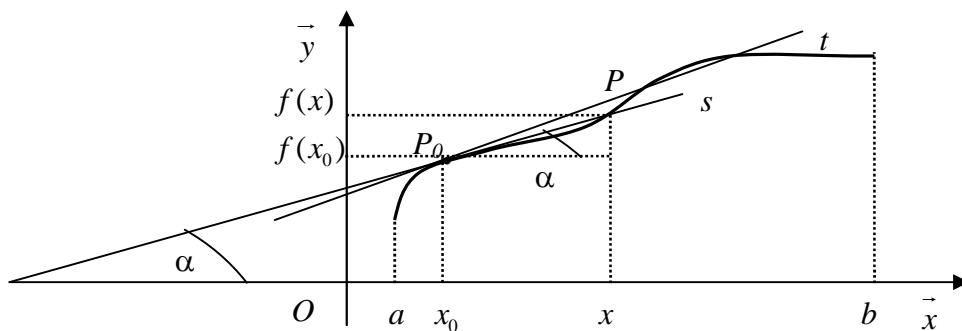


Figura 5.1 Significato geometrico della derivata in un punto.

Detta s la retta secante il grafico nei punti P_0, P ed α l'angolo che essa forma con l'asse \bar{x} , risulta $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Sia ora t la retta passante per P_0 , ed avente coefficiente angolare $f'(x_0)$:

$$t: y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ da cui deduciamo che al tendere di x ad x_0 il punto

P si muove sul grafico di $f(x)$ verso il punto P_0 e la retta s , ruotando intorno a P_0 si andrà a sovrapporre alla retta t che rappresenta, quindi, la sua posizione limite.

La retta t che ha la proprietà di intersecare il grafico di $f(x)$ nelle "vicinanze" di P_0 solo nel punto P_0 , viene detta la retta tangente al grafico in P_0 ; pertanto geometricamente la derivata di $f(x)$ in x_0 , $f'(x_0)$, rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

DEFINIZIONE. Se $f(x)$ è derivabile in ogni $x_0 \in]a, b[$ si dice che $f(x)$ è derivabile in $]a, b[$.

In tal caso possiamo definire la funzione che ad ogni $x_0 \in]a, b[$ associa la derivata di $f(x)$ in x_0 . Tale funzione si chiama la **funzione derivata prima** di $f(x)$ e si indica con $f'(x)$ oppure $D[f(x)]$.

5.1.2 Derivata delle funzioni elementari

- a) se $f(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ allora $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- b) se $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ allora $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;
- c) se $f(x) = a^x$ con $a > 0, a \neq 1$ allora $f'(x) = a^x \log a$; in particolare $D[e^x] = e^x$;
- d) se $f(x) = \log_a x$ con $a > 0, a \neq 1$ allora $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$; in particolare $D[\log x] = \frac{1}{x}$;
- e) se $f(x) = \sin x$ allora $f'(x) = \cos x$;
- f) se $f(x) = \cos x$ allora $f'(x) = -\sin x$;

5.1.3 Regole di derivazione

Siano $f(x), g(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabili in $]a, b[$, sia $k \in \mathbb{R}$, si prova che le funzioni $k \cdot f(x), f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ (con $g(x) \neq 0$) sono derivabili e valgono le seguenti

formule:

- $D[k \cdot f(x)] = k \cdot D[f(x)]$;
- $D[f(x) \pm g(x)] = D[f(x)] \pm D[g(x)]$;
- $D[f(x) \cdot g(x)] = D[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot D[g(x)]$;

$$\bullet \quad D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot D[g(x)]}{(g(x))^2},$$

Teorema 5.1 (derivazione della funzione composta) Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y): (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\text{cod}(f(x)) \subseteq (c, d)$. Consideriamo la funzione composta $F(x) = g(f(x)): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$; se $f(x)$ e $g(y)$ sono derivabili allora $F(x)$ è derivabile e risulta

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

ESEMPI

$$\bullet \quad D[\text{tg}x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\bullet \quad D[3x^2 + 5x - 1] = 3D[x^2] + D[5x] + D[-1] = 6x + 5.$$

$$\bullet \quad D[\sqrt{x}] = D\left[x^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\bullet \quad D[\log(x^2 - 1)] = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x; \text{ infatti la funzione } \log(x^2 - 1) \text{ è composta da } f(x) = x^2 - 1 \text{ e } g(y) = \log y; \text{ poich\u00e9 } D[f(x)] = 2x \text{ e } D[g(y)] = \frac{1}{y} \text{ si ha il risultato applicando la regola di derivazione della funzione composta.}$$

$$\bullet \quad D[e^{x^2}] = 2xe^{x^2} \text{ essendo } e^{x^2} \text{ composta da } f(x) = x^2 \text{ e } g(y) = e^y.$$

$$\bullet \quad D[x^2 \sin x] = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

5.1.4 Punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale

Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$;

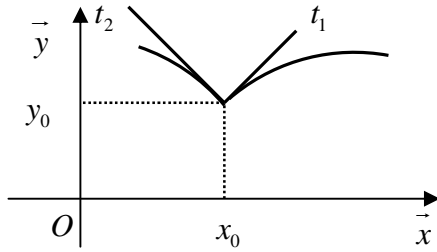
DEFINIZIONE. Si chiama derivata destra (sinistra) e la si indica con $f'_+(x_0)$ (rispettivamente $f'_-(x_0)$) il valore del $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (rispettivamente $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) se questo esiste ed \u00e8 finito.

OSSERVAZIONE. \u00c8 di facile verifica che: $f(x)$ \u00e8 derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ ed in tal caso $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$; $f(x)$ continua in x_0 ;

DEFINIZIONE. Il punto x_0 si dice punto angoloso se $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) \Rightarrow \nexists f'(x_0)$.

In tal caso nel punto $(x_0, f(x_0)) \in G_f$ possiamo tracciare una “doppia” retta tangente, graficamente si ha :



$$t_1 : y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$$

$$t_2 : y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$$

Figura 5.2 Punto angoloso.

ESEMPIO

Sia $f(x) = |x|$; $x_0 = 0$ è un punto angoloso essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

DEFINIZIONE. Il punto x_0 si dice punto di cuspide se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \quad (\mp\infty).$$

Graficamente si ha :

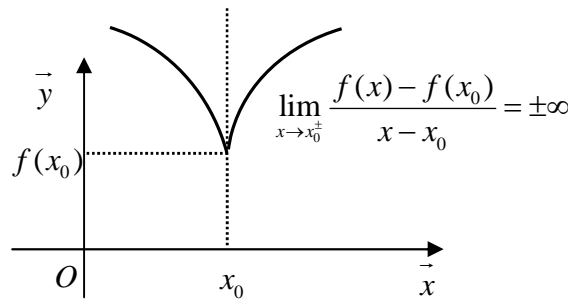


Figura 5.3 Punto di cuspide.

ESEMPIO

Sia $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$; $x_0 = 0$ è un punto di cuspide infatti $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{|x|}}{x} = \pm\infty$.

DEFINIZIONE. Il punto x_0 si dice un punto di flesso a tangente verticale se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad (-\infty).$$

Graficamente si ha:

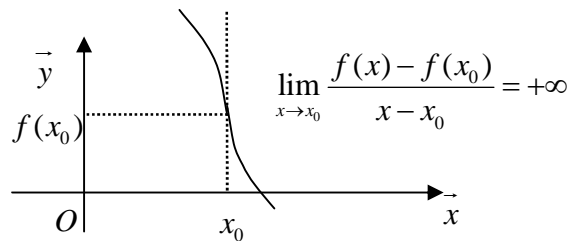


Figura 5.4 Punto di flesso a tangente verticale.

ESEMPIO

Sia $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$; $x_0 = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale infatti

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = +\infty .$$

OSSERVAZIONE. Nel caso in cui $f(x)$ è continua in x_0 ed uno dei due limiti $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ non è finito, per convenzione si dice che x_0 è un punto angoloso.

Il legame tra una funzione continua ed una derivabile è espresso dal seguente:

Teorema 5.2 Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in]a, b[$; se $\exists f'(x_0)$, allora $f(x)$ è continua in x_0 .

Dimostrazione: Scriviamo $f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in (a, b) - \{x_0\}$;

essendo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ dai teoremi sulle operazioni con i limiti

risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

OSSERVAZIONE. Il viceversa del teorema precedente in generale non è vero cioè è possibile che $f(x)$ sia continua in x_0 ma non ivi derivabile, ad esempio $f(x) = |x|$ è continua in $x = 0$ ma non è

derivabile, infatti $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{|x|}{x} = \pm 1$.

5.2 Teoremi fondamentali del calcolo differenziale

I teoremi che ora proveremo sono alla base del calcolo differenziale:

Teorema 5.3 (di Rolle) Sia $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\exists f'(x)$ in $]a, b[$; $f(a) = f(b)$ allora $\exists c \in]a, b[$: $f'(c) = 0$.

Dimostrazione: Essendo $f(x)$ continua in $[a, b]$ è ivi dotata di minimo e di massimo (primo teorema di Weierstrass), siano $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) = m = \min_{[a, b]} f(x)$, $f(x_2) = M = \max_{[a, b]} f(x)$.

Se $x_1 = a$ ed $x_2 = b$ (o viceversa) $\Rightarrow f(x)$ è costante in $[a, b]$, essendo $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ ed $m = f(a) = f(b) = M$ per cui $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

Se ciò non accade, allora, almeno uno dei due punti x_1 ed x_2 è interno ad $[a, b]$ sia ad esempio $x_2 \in]a, b[$.

Proviamo che $f'(x_2) = 0$; risulta

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x > x_2 \\ \geq 0 & \text{se } x < x_2 \end{cases}$$

in quanto $f(x) \leq M = f(x_2) \quad \forall x \in [a, b]$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'_-(x_2) \geq 0 \quad \text{ed} \quad \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'_+(x_2) \leq 0.$$

D'altra parte, poiché $f(x)$ è derivabile in x_2 , si ha $f'(x_2) = f'_-(x_2) = f'_+(x_2)$ da cui necessariamente $f'(x_2) = 0$.

OSSERVAZIONE. Graficamente il teorema di Rolle ha il seguente significato: esiste almeno un punto del grafico della funzione dove la retta tangente è parallela all'asse \bar{x} :

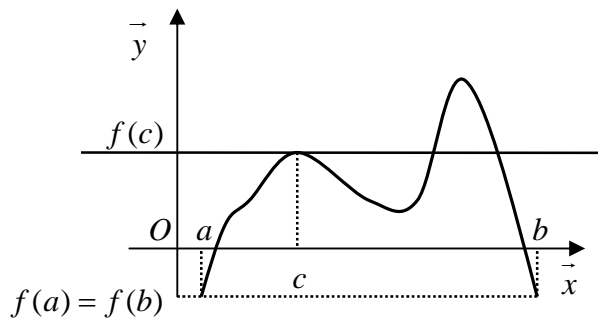


Figura 5.5

Teorema 5.4 (di Lagrange) Sia $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua; $\exists f'(x)$ in $]a, b[$ allora $\exists c \in]a, b[$: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dimostrazione: Consideriamo la funzione ausiliaria $F(x) = f(x) - kx \quad \forall x \in [a, b]$ dove la costante $k \in \mathbb{R}$ va scelta in maniera tale che $F(x)$ soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle.

Essendo differenza di funzioni continue in $[a, b]$ la $F(x)$ è continua in $[a, b]$, così essendo differenza di funzioni derivabili in $]a, b[$ la $F(x)$ è derivabile in $]a, b[$ con $F'(x) = f'(x) - k \quad \forall x \in]a, b[$.

Per applicare allora il Teorema di Rolle occorre che sia

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - ka = f(b) - kb \Leftrightarrow k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Con tale scelta di k , il teorema di Rolle ci assicura che:

$$\exists c \in]a, b[\text{ t.c. } F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{da cui l'asserto.}$$

OSSERVAZIONE. Il numero $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta s secante il grafico della funzione nei punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$; pertanto il teorema di Lagrange ci assicura che esiste almeno un punto del grafico in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta s secante il grafico nei suoi estremi:

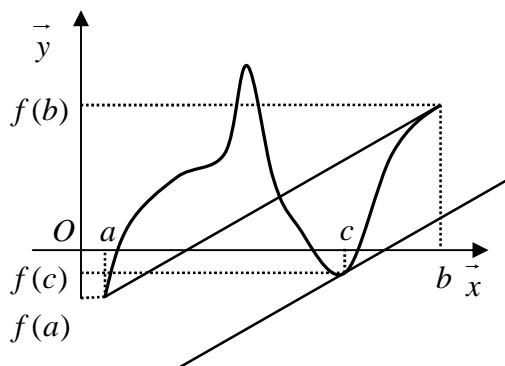


Figura 5.6

Corollario 5.5 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua; supponiamo che $\exists f'(x)$ in $]a, b[$ con $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora $f(x) = k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione: Siano $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ con, ad esempio, $x_1 < x_2$; consideriamo la restrizione di $f(x)$ ad $[x_1, x_2]$. Poiché per la restrizione di $f(x)$ ad $[x_1, x_2]$ sono valide le ipotesi del teorema di Lagrange, $\exists c \in]x_1, x_2[$ t.c. $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$;

d'altra parte $f'(c) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Dall'arbitrarietà di $x_1, x_2 \in (a, b)$ risulta $f(x)$ costante in (a, b) .

Corollario 5.6 Siano $f(x), g(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $\exists f'(x), g'(x)$ in $]a, b[$, $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in]a, b[$, allora $f(x) - g(x) = k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione: Sarà sufficiente applicare il Corollario 5.5 alla funzione $F(x) = f(x) - g(x)$.

Corollario 5.7 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua; supponiamo che $\exists f'(x)$ in $]a, b[$ con $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in (a, b)$ allora $f(x)$ cresce (decresce) in (a, b) .

Dimostrazione: Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$; consideriamo la restrizione di $f(x)$ in $[x_1, x_2]$ e ad essa applichiamo il teorema di Lagrange, allora $\exists c \in]x_1, x_2[$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \text{ da cui } f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Sono conseguenze del teorema di Lagrange i seguenti:

Teorema 5.8 : Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua; supponiamo che $\exists f'(x)$ in $]a, b[$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia crescente (decrescente) in (a, b) è che valgano

- 1) $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in]a, b[$
- 2) $\exists [\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$ t.c. $f'(x) = 0$ in $[\alpha, \beta]$.

Tale teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, ci permette di stabilire la stretta monotonia di funzioni $f(x)$ la cui derivata non è necessariamente sempre positiva (negativa).

ESEMPIO

Sia $f(x) = x^3 :]-\infty, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; risulta $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty, +\infty[$, inoltre $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pertanto $f(x)$ cresce in \mathbb{R} .

Teorema 5.9 (di De L'Hôpital) Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, e siano $f(x), g(x) : (a, b) - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (x_0 punto di accumulazione per (a, b) se $x_0 \in \mathbb{R}$ e con ovvie modifiche se $x_0 = \pm\infty$) tali che

i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$)

ii $\exists f'(x), g'(x) \quad \forall x \in (a, b) - \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0$ in almeno un intorno $I_\delta(x_0)$.

Allora, se esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

OSSERVAZIONE. Il Teorema 5.9 ci fornisce solo una condizione sufficiente, ovvero è possibile portare esempi dove dall'esistenza del limite del rapporto delle funzioni date non si deduce l'esistenza del limite del rapporto delle loro derivate.

OSSERVAZIONE. Il teorema 5.9 ci fornisce un utile strumento per risolvere le forme indeterminate

$\left[\frac{0}{0} \right]$ ed $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$:

ESEMPI

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad [(e^x - 1) \rightarrow +\infty; x \rightarrow +\infty]$;

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad [(x^2 + x - 6) \rightarrow 0, (x^2 - 4) \rightarrow 0]$

poiché $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{5}{4}$ si ha $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2)}{\log(1 - x^2)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{D}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x \cdot \frac{1 - x^2}{-2x} = -1$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x^2 + x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{D}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + x^2)(2x + 1)} = 1$.

OSSERVAZIONE. Se bisogna calcolare un limite del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$, dove $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow \pm\infty$, si può scrivere

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{oppure} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \quad \text{che si presenta sotto la forma } \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{oppure} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \right]:$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \log^2 x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^D = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\log x) \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \log x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]^D = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

OSSERVAZIONE. Se bisogna calcolare un limite del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$, dove $f(x)$ e $g(x)$ divergono entrambe a $+\infty$ o a $-\infty$, si scrive la differenza $[f(x) - g(x)]$ sotto forma di quoziente

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \quad \text{e così ci si riconduce alla forma } \left[\frac{0}{0} \right].$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 - (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(1 - x)}{(x^2 - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{x}{x^2 - 1} = -\infty.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right]^D = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(\sin x + x \cos x)(\cos x + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(\sin x + x \cos x)(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{\sin x + x \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1 + \frac{x}{\sin x} \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x + 1} = 0,$$

si è tenuto conto del limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

5.3 Estremi relativi

Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in]a, b[$;

DEFINIZIONE. Diremo che x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo per $f(x)$ se

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b), \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

ovvero “localmente”, in un intorno di x_0 , $f(x_0)$ è il massimo (minimo) valore assunto da $f(x)$.

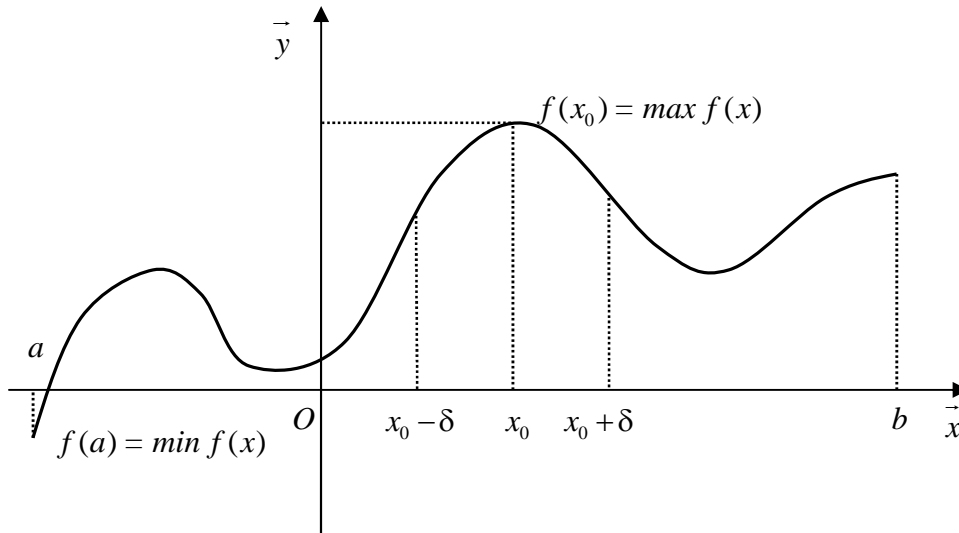


Figura 5.7

OSSERVAZIONE. Una funzione potrebbe essere priva di estremi relativi, ad esempio se è crescente o decrescente, inoltre al contrario degli estremi assoluti (minimo e massimo) gli estremi relativi potrebbero non essere unici. Nell'esempio grafico (cfr. Figura 5.7) $f(x)$ possiede due massimi relativi e due minimi relativi.

OSSERVAZIONE. Abbiamo osservato come una funzione potrebbe non avere il massimo (minimo) assoluto; però se questo esiste, può essere assunto in un punto qualsiasi dell'intervallo di definizione compresi gli estremi.

Evidenziamo che gli estremi relativi per definizione sono sempre interni all'intervallo di definizione, ed in particolare, mentre un estremo relativo non è detto che sia assoluto, un estremo assoluto è anche relativo se assunto in punto interno all'intervallo di definizione. Nell'esempio grafico (cfr. Figura 5.7) la funzione $f(x)$ possiede massimo assoluto che è anche relativo mentre il minimo assoluto ($f(a)$) non è relativo.

Teorema 5.10 (di Fermà) Siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in]a, b[$ [punto di massimo (minimo) relativo, allora se esiste $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Dalla definizione di x_0 punto di massimo relativo per $f(x)$ si ha che

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (a, b), |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0.$$

Pertanto il rapporto incrementale $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è non negativo per ogni x tale che

$x_0 < x < x_0 + \delta$ ed è non positivo per ogni x tale che $x_0 - \delta < x < x_0$.

Dai teoremi di confronto sui limiti risulta $f'_+(x_0) \leq 0$ ed $f'_-(x_0) \geq 0$.

D'altra parte poiché, per ipotesi esiste $f'(x_0)$, è necessario che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ da cui l'asserto.

Teorema 5.11 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $x_0 \in]a, b[$. Supponiamo che esista $f'(x) \forall x \in]a, b[- \{x_0\}$ ed esista $\delta > 0$ tale che $f'(x) > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$, $f'(x) < 0 \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$ allora x_0 è un punto di massimo relativo per $f(x)$.

Dimostrazione: Essendo $f'(x) > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$ la funzione $f(x)$ è crescente in $]x_0 - \delta, x_0[$ pertanto $f(x) < f(x_0) \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$ ed analogamente poiché $f'(x) < 0 \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$ risulta $f(x)$ decrescente in $]x_0, x_0 + \delta[$ pertanto $f(x) > f(x_0) \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$.

Si è così determinato un intorno completo di x_0 dove $f(x) \leq f(x_0)$ cioè x_0 è un massimo relativo per $f(x)$.

OSSERVAZIONE. Analogamente vale una condizione sufficiente per l'esistenza di un minimo relativo.

ESEMPIO

Determinare gli eventuali estremi relativi della funzione $f(x) = x \log^2 x$. La funzione è definita in $]0, +\infty[$, risulta

$$f'(x) = \log^2(x) + \frac{2x \log x}{x} = \log^2 x + 2 \log x = (\log x)(\log x + 2)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\log x)(\log x + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{1}{e^2}\right[\text{ oppure } x \in]1, +\infty[\text{ ed}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{e^2}, 1\right[,$$

in definitiva

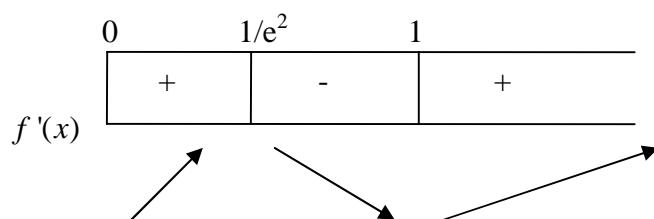


Figura 5.8

da cui $x = \frac{1}{e^2}$ è un massimo relativo per $f(x)$, $x = 1$ è un minimo relativo per $f(x)$.

5.4 Concavità, convessità e flessi

Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $x_0 \in]a, b[$ tale che esista $f'(x_0)$.

Consideriamo $t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, la retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$.

DEFINIZIONE. Diremo che in $P_0 = (x_0, f(x_0))$ la funzione $f(x)$ è convessa (concava) o che il grafico di $f(x)$ volge la concavità verso l'alto (verso il basso) se

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (a, b), \text{ con } |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0));$$

ovvero in un intorno di P_0 (localmente), i punti del grafico di $f(x)$ giacciono al di sopra (sotto) della retta tangente il grafico in P_0

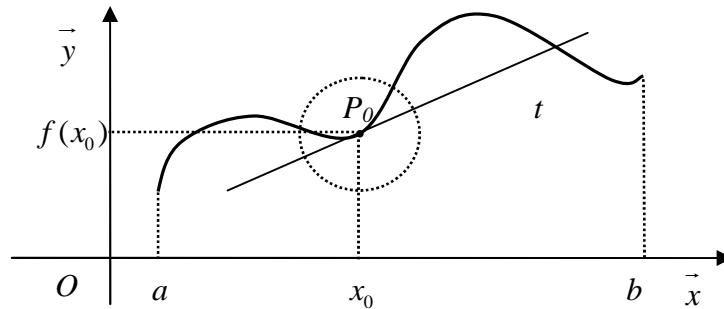


Figura 5.9

Se, invece, in P_0 non è verificata nessuna delle due precedenti disuguaglianze, il punto P_0 è detto *punto di flesso* per $f(x)$, ovvero in un qualunque intorno di P_0 il grafico della funzione cambia concavità passando per tale punto:

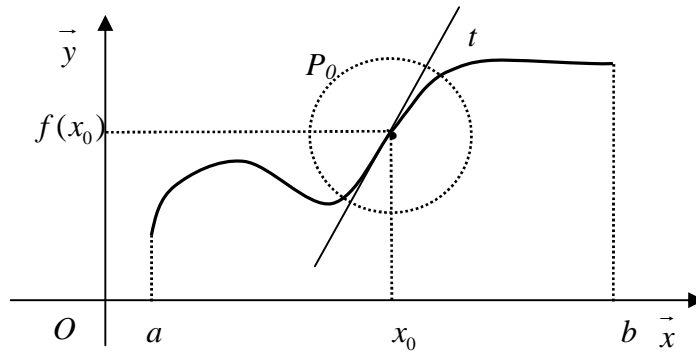


Figura 5.10

DEFINIZIONE. Diremo che $f(x)$ è convessa (concava) in (a, b) se è convessa in ogni $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $x_0 \in]a, b[$.

Figura 5.11 (a) grafico di una funzione convessa in (a, b) ; (b) grafico di una funzione concava in (a, b) .

5.5 Derivata seconda

Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che esista $f'(x) \quad \forall x \in]a, b[$.

Fissato $x_0 \in]a, b[$ se esiste ed è finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, denoteremo con $f''(x_0)$ tale valore e, per definizione, lo chiameremo “derivata seconda” di $f(x)$ in x_0 .

OSSERVAZIONE. Ovviamente, la derivata seconda di $f(x)$ in x_0 non è altro che la derivata della funzione $f'(x)$ nel punto x_0 :

$$f''(x_0) = D[f'(x)]_{x=x_0}.$$

Se $\forall x_0 \in]a, b[$ esiste $f''(x_0)$, definiamo “funzione derivata seconda” di $f(x)$, e la denoteremo con $f''(x)$, la funzione che ad ogni

$$x_0 \in]a, b[\rightarrow f''(x_0).$$

ESEMPIO

Sia $f(x) = x^4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Risulta $f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = D[f'(x)] = D(4x^3) = 12x^2$.

Teorema 5.12 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che $\exists f'(x), f''(x)$ in $]a, b[$, allora se $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) in $]a, b[$ allora $f(x)$ è convessa (concava) in (a, b) .

Corollario 5.13 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$; supponiamo che $\exists f'(x)$ in $]a, b[$, $f''(x)$ in $]a, b[- \{x_0\}$, ed inoltre

$$\exists \delta > 0: f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{in }]x_0 - \delta, x_0[\\ < 0 & \text{in }]x_0, x_0 + \delta[\end{cases}$$

allora $(x_0, f(x_0))$ è un punto di flesso.

Dimostrazione: Dal teorema precedente, $f(x)$ è convessa in $(x_0 - \delta, x_0)$ ed è concava in $(x_0, x_0 + \delta)$, pertanto il grafico della funzione nel passare per $(x_0, f(x_0))$ cambia concavità.

Teorema 5.14 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$; supponiamo che $\exists f'(x)$ in $]a, b[$, $f'(x_0) = 0$ ed $\exists f''(x_0) > 0$ (< 0) allora x_0 è un minimo (massimo) relativo.

ESEMPIO

Determinare la concavità, convessità e gli eventuali flessi della funzione $f(x) = \log(x^2 + 1)$.

La funzione $\log(x^2 + 1)$ è definita in $]-\infty, +\infty[$, risulta:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ed}$$

$$f'''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Poiché $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ ed

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1, x > 1$ si ha :

	-1	1	
$f''(x)$	-	+	-
	\cap	\cup	\cap

Pertanto $f(x)$ è convessa in $[-1, 1]$ ed è concava in $]-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty[$.

Inoltre $P_1 = (-1, \log 2)$ e $P_2 = (1, \log 2)$ sono punti di flesso.

5.6 Asintoti al grafico di una funzione

DEFINIZIONE. Sia $f(x): X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \Phi$; sul piano cartesiano assegnata la retta r e tracciato il grafico della funzione data (G_f), diremo che la retta è un asintoto di G_f se la distanza tra il generico punto $P = (x, f(x)) \in G_f$ e la retta "tende" ad essere nulla in corrispondenza al movimento di x , ovvero la retta tende ad appoggiarsi al grafico senza "toccarlo".

Si possono presentare tre diverse situazioni:

- **Asintoto verticale :**

Sia $f(x): (a, b) - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$; se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, la retta $x = x_0$ si dice un **asintoto verticale** per il grafico della funzione; graficamente la distanza tra il generico punto $P = (x, f(x)) \in G_f$ e la retta $x = x_0$ diminuisce al tendere di x ad x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} d(P, s) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$).

In figura è descritta la situazione $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$:

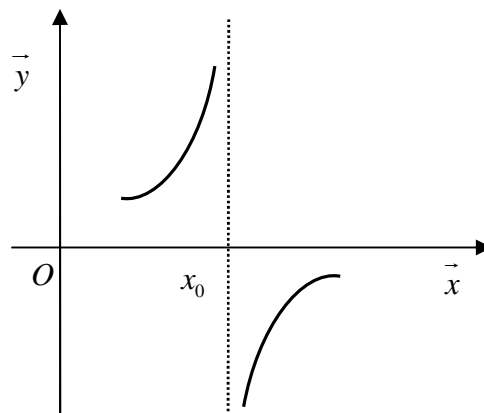


Figura 5.12 Asintoto verticale.

ESEMPIO

Sia $f(x) = \frac{1}{x} :]-\infty, +\infty[- \{0\}$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{pertanto} \quad x = 0 \quad \text{è un asintoto verticale per } G_f.$$

• **Asintoto orizzontale**

Sia $f(x)$ una funzione definita in X non limitato sup. e/o inf., per esempio $(a, +\infty[$; se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, la retta $s: y = l$ si dice asintoto orizzontale destro per il G_f ; graficamente la distanza tra il generico punto $P = (x, f(x)) \in G_f$ e la retta s ($d(P, s) = |f(x) - l|$) tende a diminuire (senza mai annullarsi) man mano che x cresce (nota che $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(P, s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0$).

Osserviamo che al “finito” G_f ed s possono intersecarsi in quando la condizione espressa dal $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ è valida per x “grande”.

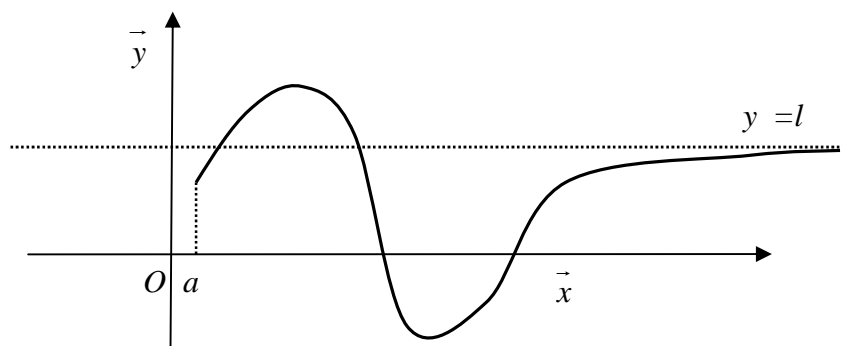


Figura 5.13 Asintoto orizzontale destro.

Se $f(x)$ è definito in un insieme X non limitato, ad esempio l'intervallo $]-\infty, +\infty[$, la curva $y = f(x)$ può ammettere due asintoti, uno relativo all'intervallo $(0, +\infty[$ (*asintoto orizzontale destro*) ed uno relativo all'intervallo $]-\infty, 0)$ (*asintoto orizzontale sinistro*). Asintoti che, ovviamente, potrebbero essere distinti.

ESEMPIO

Sia $f(x) = \frac{x+1}{x} :]-\infty, +\infty[- \{0\}$; poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale destro e sinistro per il grafico della funzione.

• **Asintoto obliquo**

Sia $f(x): (a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e sia assegnata la retta obliqua $r: y = mx + n$ ($m \neq 0$); se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ si prova che condizione necessaria e sufficiente affinché r sia un *asintoto (obliquo)* destro per G_f è che risulti:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Anche in tal caso alla parola “asintoto” diamo il significato visto in precedenza, ovvero al crescere di x il punto $P = (x, f(x)) \in G_f$ ha distanza da r che tende ad essere zero, ovvero G_f ten-

de ad “appoggiarsi” ad r senza mai intersecarla. Al solito la situazione descritta è valida per x “grande” infatti G_f ed r possono avere “al finito” intersezione :

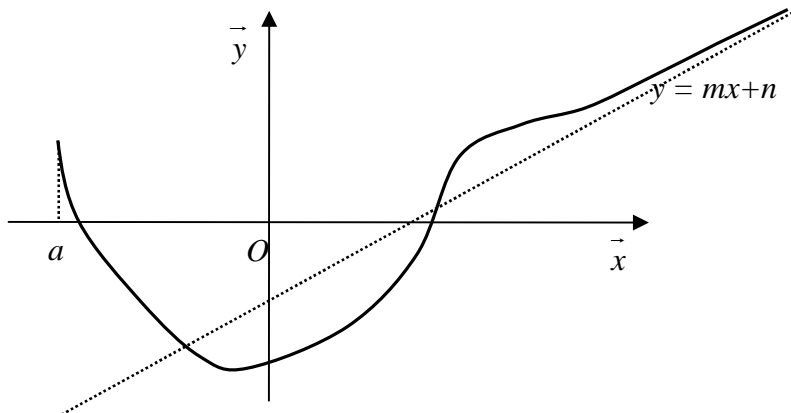


Figura 5.14 Asintoto obliquo destro.

Come osservato per l’asintoto orizzontale, se $f(x)$ è definita in $]-\infty, b)$ è possibile che esista un asintoto obliquo sinistro, del tutto differente da quello destro.

OSSERVAZIONE. Ovviamente, l’esistenza dell’asintoto orizzontale preclude quella dell’asintoto obliquo.

ESEMPIO

Sia $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} :]-\infty, +\infty[- \{-1\}$; poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \pm\infty$ e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x}{x + 1} = -1,$$

la retta $y = x - 1$ è asintoto obliquo destro e sinistro per G_f .

5.7 Studio del grafico di una funzione

I risultati di questo capitolo ci permettono di studiare e tracciare il grafico di una funzione $f(x)$. I passi da seguire a tale scopo sono :

- Si determina l’insieme di definizione o dominio della funzione $f(x)$;
- Si esamina se la funzione gode di qualche simmetria; ad esempio se è una funzione pari ($f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$) o è una funzione dispari ($f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$), in tal caso è possibile studiare $f(x)$ solo, ad esempio, per le $x \in D \cap \{x \geq 0\}$;
- Si studia, se è possibile farlo, il segno di $f(x)$ e si calcolano le eventuali intersezioni del grafico G_f con gli assi cartesiani ;
- Si studia il comportamento al limite di $f(x)$ e si determinano gli eventuali asintoti;
- Si determinano gli intervalli di monotonia di $f(x)$, dove la funzione è crescente o decrescente e gli eventuali estremi relativi studiando il segno della derivata prima $f'(x)$;

- Si determinano la concavità, convessità e gli eventuali punti di flesso, studiando il segno della derivata seconda $f''(x)$;
- Si riportano nel sistema di riferimento cartesiano le informazioni ottenute nei passi precedenti e si disegna il grafico della funzione;

Secondo tale schema ricaviamo i grafici, già disegnati nel Capitolo 1, relativi alle funzioni elementari a^x e $\log_a x$ nel caso, ad esempio, $a = e$.

- a. Sia $f(x) = e^x$; la funzione assegnata è definita per $x \in]-\infty, +\infty[$. Risulta $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow G_f$ non interseca l'asse \bar{x} , mentre $f(0) = e^0 = 1$ pertanto G_f interseca l'asse \bar{y} nel punto $(0,1)$.

La funzione non presenta simmetrie, essendo

$$f(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \neq \begin{cases} e^x = f(x) \\ -e^x = -f(x) \end{cases}.$$

Comportamento al limite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale sinistro

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto orizzontale destro;

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{D}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo destro; inoltre non esistono asintoti verticali.

Calcoliamo $f'(x)$ per $x \in \mathbb{R}$; risulta

$f'(x) = D[e^x] = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, pertanto $f(x)$ cresce in $]-\infty, +\infty[$ e quindi non ha estremi relativi.

Calcoliamo $f''(x)$ per $x \in \mathbb{R}$; risulta $f''(x) = D[e^x] = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ pertanto $f(x)$ è convessa in $]-\infty, +\infty[$.

Le informazioni precedenti sono riassunte nel seguente grafico

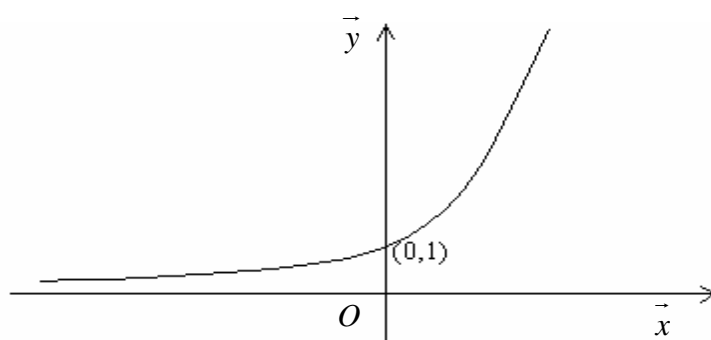


Figura 5.15 grafico di e^x .

- b. Sia $f(x) = \log x$; la funzione assegnata è definita in $D =]0, +\infty[$. Risulta che $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ed $\log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, pertanto $f(x) > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$ e G_f interseca l'asse \bar{x} nel punto $(1,0)$.

Poiché $x > 0$ non abbiamo intersezioni con l'asse \bar{y} . La funzione non presenta simmetrie, infatti se $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ e quindi non ha senso calcolare $f(-x)$.

Comportamento al limite:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty \Rightarrow x = 0$ è asintoto verticale destro;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto orizzontale destro e poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{D}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo destro.

Calcoliamo $f'(x)$ per $x > 0$; risulta $f'(x) = D[\log x] = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$ pertanto $f(x)$ cresce in $]0, +\infty[$ e quindi non ha estremi relativi.

Calcoliamo $f''(x)$ per $x > 0$; risulta $f''(x) = D\left[\frac{1}{x}\right] = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x > 0$ pertanto $f(x)$ è concava in $]0, +\infty[$. Riassumendo le informazioni ottenute nel diagramma cartesiano si ha:

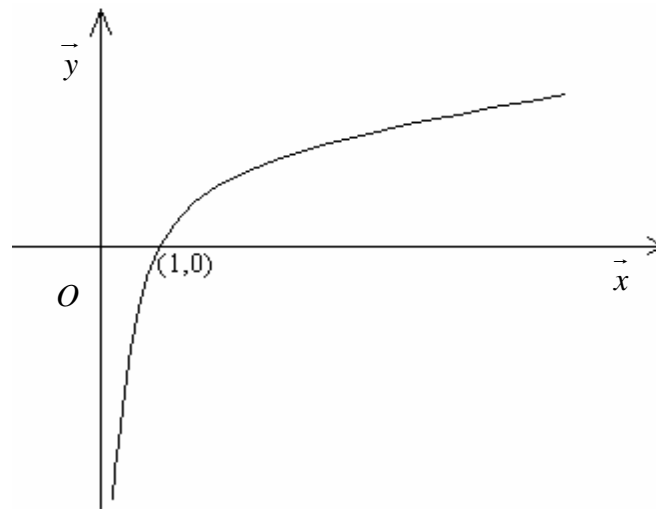


Figura 5.16 Grafico di $\log x$.

ESEMPI

- Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione $f(x) = x e^{\frac{1}{1-x}}$.

La funzione è definita in $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \neq 0\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Risulta $x e^{\frac{1}{1-x}} > 0 \Leftrightarrow x > 0, x \neq 1$ ed $x e^{\frac{1}{1-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pertanto $f(x) > 0$ in $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ ed $f(x) < 0$ in $] -\infty, 0[$; il grafico della funzione interseca l'asse \bar{x} nel punto $(0, 0)$. La funzione non presenta alcuna simmetria.

Studiamo il comportamento al limite per determinare eventuali asintoti:

$\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} \frac{1}{1-x} = \mp \infty$, da cui $\lim_{x \rightarrow 1^+} x e^{\frac{1}{1-x}} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} x e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$; con ciò si ha che la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale sinistro;

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{1}{1-x}} = \pm \infty$ per cui non esistono asintoti orizzontali.

Ricerchiamo gli eventuali asintoti obliqui: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = 1 = m$

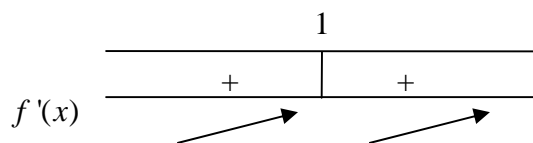
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{1}{1-x}} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{1-x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}} - 1}{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{x}{1-x} = -1$$

essendo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}} - 1}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1$;

pertanto la retta di equazione $y = x - 1$ è asintoto obliquo sinistro e destro per il grafico della funzione. Calcoliamo $f'(x)$ per $x \neq 1$:

$$f'(x) = D \left[x e^{\frac{1}{1-x}} \right] = e^{\frac{1}{1-x}} + x e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} (x^2 - x + 1);$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1, x > 1$, da cui



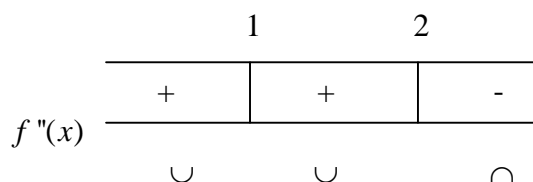
e quindi $f(x)$ cresce in $]-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty[$, non ha estremi relativi.

Calcoliamo $f''(x)$ per $x \neq 1$:

$$f''(x) = D \left[e^{\frac{1}{1-x}} \frac{(x^2 - x + 1)}{(1-x)^2} \right] = e^{\frac{1}{1-x}} \left[\frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{(x^2 - x + 1)}{(1-x)^2} + \frac{(2x-1)(1-x)^2 + 2(x^2 - x + 1)(1-x)}{(1-x)^4} \right] =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4} \{2-x\};$$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$, da cui



e quindi $f(x)$ è convessa in $]-\infty, 1[\cup]1, 2[$

ed è concava in $]2, +\infty[$;

il punto $P_1 = (2, f(2))$ è un punto di flesso.

Il grafico di $f(x)$ è il seguente:

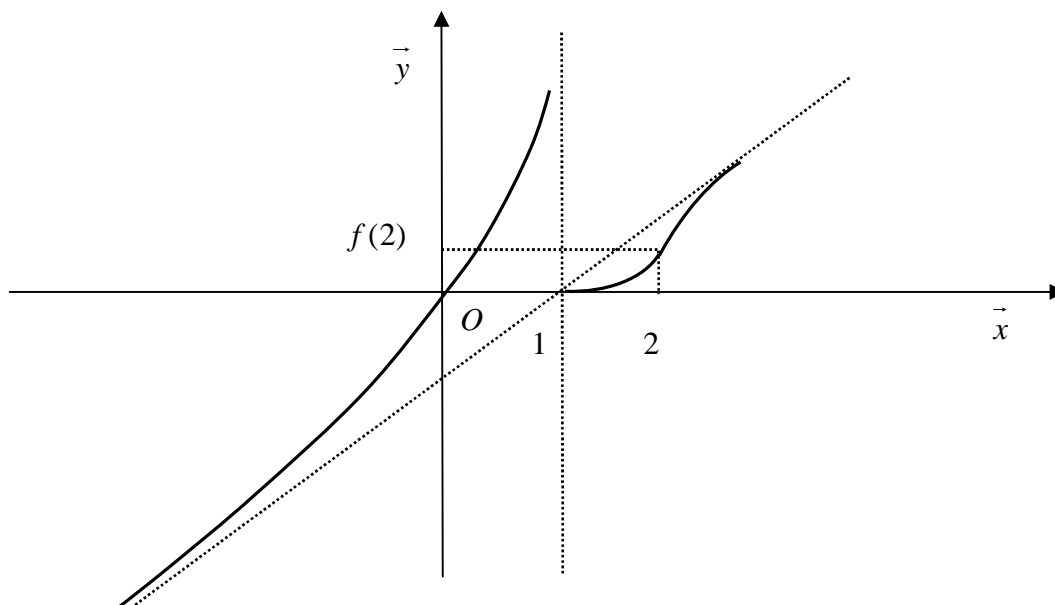


Figura 5.17 Grafico di $f(x) = xe^{\frac{1}{1-x}}$.

- Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

La funzione è definita in $D = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

Risulta $\frac{x^2}{x-3} > 0$ se $x > 3$, pertanto $f(x) > 0$ in $]3, +\infty[$, $f(x) < 0$ in $] -\infty, 3[$. Il G_f interseca l'asse \vec{x} nell'origine del s.d.r.. La funzione non presenta alcuna simmetria.

Studiamo il comportamento al limite per determinare eventuali asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x^2}{x-3} = \pm\infty \Rightarrow x=3 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(1-\frac{3}{x})} = \pm\infty \Rightarrow \vec{A} \text{ asintoto orizzontale dx. e sx.};$$

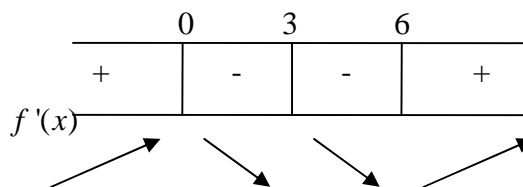
ricerchiamo gli eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-3} = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-3} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-3} = 3, \text{ pertanto la retta } y = x+3 \text{ è asintoto obliquo destro e sinistro.}$$

Calcoliamo $f'(x)$ per $x \neq 3$:

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2};$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < 0, x > 6$$



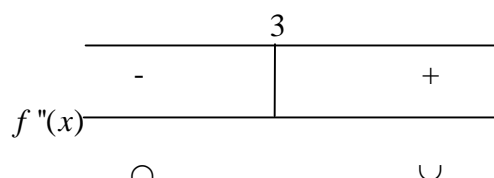
e quindi $f(x)$ cresce in $]-\infty, 0[$ e in $]6, +\infty[$, decresce in $]0, 3[$ e in $]3, 6[$; i punti $(0, 0)$ e $(6, 12)$ sono rispettivamente di massimo relativo e di minimo relativo.

Calcoliamo $f''(x)$ per $x \neq 3$:

$$f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x^2-6x)(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{18}{(x-3)^3};$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$$



quindi $f(x)$ è convessa in $]3, +\infty[$ ed è concava in $]-\infty, 3[$, non ha flessi.

Il grafico di $f(x)$ è il seguente

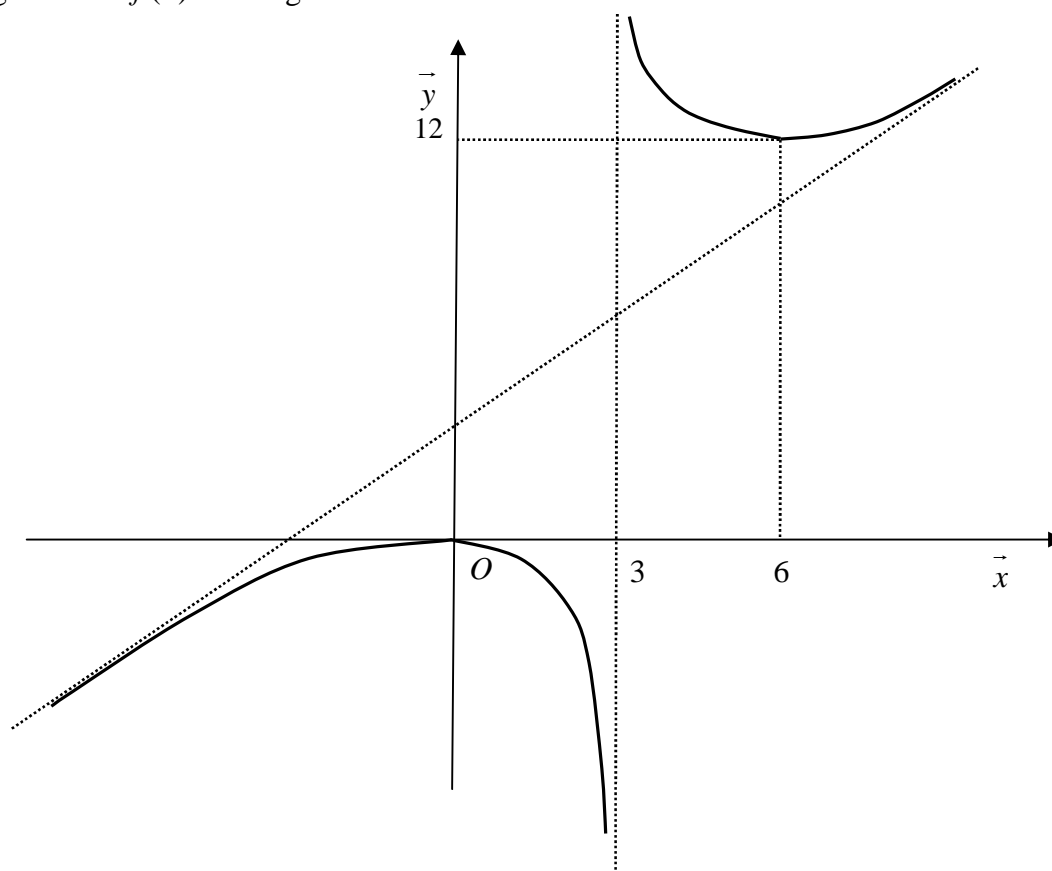


Figura 5.18 Grafico di $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

Capitolo 6. Integrazione

6.1 Integrale Indefinito

DEFINIZIONE. Sia $f(x): (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$; la funzione $F(x): (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **primitiva** della funzione $f(x)$ se $F(x)$ è derivabile in (a,b) ed

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

OSSERVAZIONE. In generale non tutte le funzioni sono dotate di primitiva, ad esempio consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

in particolare $F'(x) = 1 \quad \forall x > 0$ da cui $\exists c_1 \in \mathbb{R} : F(x) = x + c_1 \quad \forall x > 0$ ed
 $F'(x) = -1 \quad \forall x < 0$ da cui $\exists c_2 \in \mathbb{R} : F(x) = x + c_2 \quad \forall x < 0$.

D'altra parte, poiché $F(x)$ è continua (in quanto derivabile) in $x_0 = 0$, segue

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \quad \text{ovvero} \quad F(0) = c_1 = c_2.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & \text{se } x > 0 \\ c_1 & \text{se } x = 0 \\ -x - c_1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad F(x) = |x| + c_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se ne ricava che $|x| = F(x) - c_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e allora, poiché differenza di due funzioni derivabili, $|x|$ sarebbe derivabile in $x_0 = 0$: assurdo!

Ne consegue una contraddizione, ovvero $f(x)$ non ha primitive.

DEFINIZIONE. L'insieme delle primitive di $f(x)$ si chiama "l'integrale indefinito" di $f(x)$ e lo si denota con il simbolo

$$\int f(x) dx \left(= \int f(y) dy = \int f(t) dt = \dots \right).$$

Tale insieme che, come osservato, potrebbe essere l'insieme vuoto è caratterizzato dalla

Proposizione 6.1 Sia $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ allora

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

La suddetta eguaglianza è intesa dal punto di vista insiemistico.

Dimostrazione: Sia $G(x) \in \int f(x) dx$, allora $G(x)$ è definita e derivabile in (a, b) con $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$.

Poiché $G(x)$ ed $F(x)$ possiedono la stessa derivata, differiscono per una costante (Corollario 5.6) ovvero $\exists \alpha \in \mathbb{R}: G(x) = F(x) + \alpha \quad \forall x \in (a, b)$, per cui $G(x)$ appartiene all'insieme $\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$.

Viceversa sia $c_1 \in \mathbb{R}$ e consideriamo $F(x) + c_1$; poiché

$$D[F(x) + c_1] = D[F(x)] + D[c_1] = f(x), \text{ la funzione } F(x) + c_1 \in \int f(x) dx.$$

Ciò completa l'asserto.

Come abbiamo fatto per la derivazione, presentiamo gli integrali delle funzioni elementari e lasciamo al lettore la loro immediata verifica:

- Se $\alpha \neq -1$, $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos x dx = \text{sen}x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int (1 + \text{tg}^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg} x + c.$

6.1.1 Regole di integrazione

Le seguenti formule sono eguaglianze insiemistiche, ovvero sono intese nel senso che ogni elemento che appartiene all'insieme definito dal primo membro appartiene anche all'insieme definito dal secondo membro e viceversa, sottintendendo che se uno dei due insiemi è vuoto allora anche l'altro deve essere privo di elementi.

Siano $f(x), g(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$:

- i. se $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ (omogeneità dell'integrale indefinito);

ii. se almeno una delle due funzioni $f(x)$ o $g(x)$ è dotata di primitiva
 $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ (*linearità dell'integrale indefinito*).

Dalle 1) e 2) si ricava la *formula di integrazione per decomposizione in somma*

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

ed, in particolare, dalla 2) se $u(x)$ e $v(x)$ sono due funzioni derivabili in (a, b) , ricaviamo la formula di *integrazione per parti*

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

ESEMPI

a. $\int (3x^2 + \sin x) dx = 3 \int x^2 dx + \int \sin x dx = x^3 - \cos x + c.$

b. $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1) e^x + c$

posto $u(x) = x, \quad u'(x) = 1,$

$v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x.$

c. $\int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx =$

$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx$

posto $u(x) = \sin x, \quad u'(x) = \cos x,$

$v'(x) = \sin x, \quad v(x) = -\cos x;$

da cui $2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + c$ e quindi $\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + c.$

Infine vogliamo enunciare le *formule di integrazione per sostituzione* :

1° *formula di integrazione per sostituzione:*

siano $f(x): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t): (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, tale che $\text{cod}\varphi(t) \subseteq (a, b)$ allora

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \left(\int f(x) dx \right)_{x=\varphi(t)};$$

2° *formula di integrazione per sostituzione:*

se $\varphi(t)$, in aggiunta alle ipotesi precedenti, è dotata di funzione inversa $\psi(x)$ allora

$$\int f(x) dx = \left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \right)_{t=\psi(x)}.$$

ESEMPI

a. $\int 2te^{t^2} dt = \int e^{t^2} D(t^2) dt = \left(\int e^x dx \right)_{x=t^2} = e^x + c \Big|_{x=t^2} = e^{t^2} + c;$

$$\text{b. } \int \cos 2x dx = \left(\frac{1}{2} \int \cos t dt \right)_{t=2x} = \frac{1}{2} \sin t + c \Big|_{t=2x} = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

posto $2x = t, \quad x = \frac{t}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} dt$.

Dalle formule di integrazione per sostituzione e dagli integrali delle funzioni elementari ricaviamo i seguenti integrali indefiniti:

- se $\alpha \neq -1 \quad \int [\varphi(t)]^\alpha \varphi'(t) dt = \left(\int x^\alpha dx \right)_{x=\varphi(t)} = \frac{[\varphi(t)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \log|\varphi(t)| + c$
- $\int e^{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = e^{\varphi(t)} + c$
- $\int [\sin \varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = -\cos \varphi(t) + c$
- $\int [\cos \varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = \sin \varphi(t) + c$
- $\int [tg^2(\varphi(t))] dt = tg(\varphi(t)) + c$.

6.2 Integrale Definito: Il problema delle aree

DEFINIZIONE. Sia $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$; si chiama Rettangoloide relativo ad $f(x)$ di base $[a, b]$ il sottoinsieme del piano

$$R_f([a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

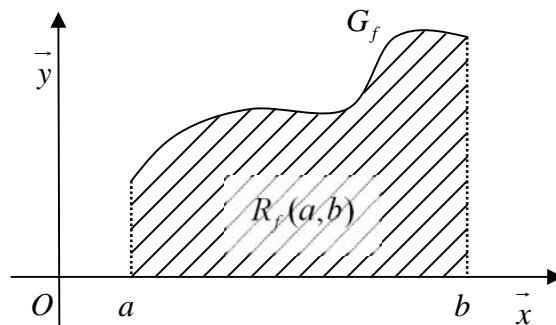


Figura 6.1 Rettangoloide relativo ad $f(x)$ di base $[a, b]$.

Analogamente data $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ si chiama pure rettangoloide relativo a $g(x)$ di base $[a, b]$ il sottoinsieme di \mathbb{R}^2

$$R_g([a, b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq 0\}$$

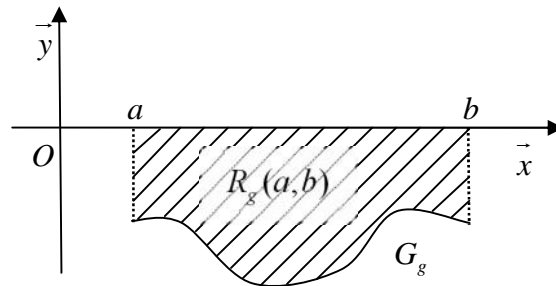


Figura 6.2 Rettangoloide relativo a $g(x)$ di base $[c,d]$.

È importante sapere che è possibile calcolare l'area di $R_f([a,b])$ (e quindi di $R_g([a,b])$) basandosi sul metodo introdotto da Archimede nel III secolo a.C.. (metodo di esaustione).

In generale assegnata $F(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, è possibile decomporre $[a,b]$ in un numero finito di sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, \dots, n$) a due a due privi di punti interni in comune in maniera tale che $F(x)$ sia di segno costante in ciascun $[x_{i-1}, x_i] \forall i=1, \dots, n$, così da poter considerare $R_F([x_{i-1}, x_i])$ (cfr. Figura 6.3).

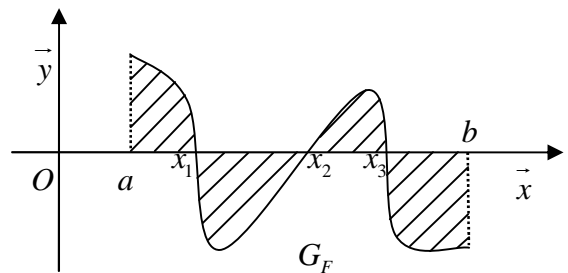


Figura 6.3

DEFINIZIONE. Poniamo
$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{i=1}^n \underset{[x_{i-1}, x_i]}{\text{seg } F(x)} \cdot \text{area } R_F([x_{i-1}, x_i])$$

$$\text{dove } \underset{[x_{i-1}, x_i]}{\text{seg } F(x)} = \begin{cases} +1 & \text{se } F(x) \geq 0 \text{ in } [x_{i-1}, x_i] \\ -1 & \text{se } F(x) \leq 0 \text{ in } [x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$

Tale definizione, ovviamente, non dipende dalla decomposizione di $[a,b]$. In particolare, se $F(x) \geq 0$ in $[a,b]$

$$\int_a^b F(x) dx = \text{area } R_F([a,b]).$$

Per definizione, infine, poniamo
$$\int_a^a F(x) dx = 0.$$

6.2.1 Proprietà dell'integrale definito

- *Additività dell'integrale rispetto all'intervallo:* Sia $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $c \in]a,b[$ allora

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

La dimostrazione è immediata nel caso in cui $f(x) \geq 0$ in quanto

$$\text{area } R_f([a,b]) = \text{area } R_f([a,c]) + \text{area } R_f([c,b]);$$

il lettore esamini il caso generale.

- *Teorema della media* : Sia $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora $\exists x_0 \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0)(b-a).$$

- *Proprietà distributiva dell'integrale* : Siano $f(x), g(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Concludiamo il capitolo con due teoremi importanti : il primo stabilisce un legame tra l'integrale definito e l'integrale indefinito, il secondo ci fornisce una formula utilissima per il calcolo dell'integrale definito.

Teorema 6.2 (*Esistenza della primitiva*) : Sia $f(x):(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora essa è dotata di primitive.

Dimostrazione: Sia $F(x):(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x_0 \in (a,b).$$

La definizione di $F(x)$ ha senso, infatti fissato $x \in (a,b)$ la funzione $f(t)$ è continua nell'intervallo di estremi x_0, x per cui $\int_{x_0}^x f(t) dt \in \mathbb{R}$.

Proviamo che $F(x)$, detta *funzione integrale* di $f(x)$ con origine in x_0 , è una primitiva di $f(x)$, ovvero che $F'(x) = f(x) \forall x \in (a,b)$.

Sia $x \in (a,b)$, consideriamo il rapporto incrementale di $F(x)$ in x :

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt}{h} = \\ &= \frac{f(\xi_h)h}{h} = f(\xi_h) \quad \text{con } \xi_h \text{ compreso tra } x \text{ ed } x+h. \end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato l'additività rispetto all'intervallo dell'integrale definito ed il teorema della media.

$$\text{Pertanto } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h).$$

Poiché ξ_h è compreso tra x ed $x+h$, al tendere di h a zero, $\xi_h \rightarrow x$ (teorema dei carabinieri), allora $\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x)$ (essendo $f(x)$ continua).

Si deduce, allora, che $\exists F'(x)$ ed $F'(x) = f(x)$.

Teorema 6.3 (*Teorema fondamentale del calcolo integrale*) : Sia $f(x):[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia $G(x)$ una primitiva di $f(x)$ allora

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione: Consideriamo $F(x) = \int_a^x f(t) dt \forall x \in [a, b]$; dal teorema precedente $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) - G(x) = \alpha \forall x \in [a, b]$, in particolare se $x = b$ allora

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = G(b) - G(a).$$

ESEMPI

- Calcolare l'area del rettangoloide relativo ad $f(x) = x^2 + 2$ di base $[0, 1]$.

$$\text{Risulta } \text{area } R_f([0, 1]) = \int_0^1 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

- Calcolare $\int_{-1}^2 x \log(x+2) dx$.

La funzione $f(x) = x \log(x+2)$ è definita e continua in $] -2, +\infty[$, pertanto è continua in

$$[-1, 2]. \text{ Risulta } \int x \log(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \log(x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^3}{x+2} dx$$

$$\text{posto } u(x) = \log(x+2), \quad u'(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$v'(x) = x, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+2} dx &= \int \frac{(x^2-4)}{x+2} dx + \int \frac{4}{x+2} dx = \int (x-2) dx + 4 \int \frac{1}{x+2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \log|x+2| + c \end{aligned}$$

sia ha

$$\int x \log(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \log(x+2) - \frac{1}{4} x^2 + x - 2 \log(x+2) + c$$

$$\text{e quindi } \int_{-1}^2 x \log(x+2) dx = \left[\frac{x^2}{2} \log(x+2) - \frac{1}{4} x^2 + x - 2 \log(x+2) \right]_{-1}^2.$$