Capitolo 1. Richiami di teoria elementare

1.1 Cenni di teoria degli insiemi

Il concetto di "insieme" è un concetto primitivo, cioè uno di quei presupposti o assiomi che in matematica costituiscono i fondamenti e dei quali non è data alcuna definizione.
Intuitivamente si può pensare ad un insieme come agli elementi che lo costituiscono, accomunati da una stessa natura o proprietà. Indicheremo gli insiemi con le lettere in maiuscolo (A,B,C,X,Y…) mentre gli elementi di esso verranno indicati in minuscolo (*a ,b, c, x, y…*). Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme, scriveremo $a \in A$; per indicare che un elemento non appartiene ad un insieme scriveremo $a \notin A$.

DEFINIZIONE. *L'insieme privo di elementi è detto insieme vuoto e lo indichiamo con il simbolo* Φ.

Dati due insiemi A e B se gli elementi di A appartengono anche all'insieme B ($\forall := per\ ogni\ x \in A \Rightarrow x \in B$) scriveremo che :

$A \subseteq B$ (A è contenuto in B) oppure $B \supseteq A$ (B contiene A).

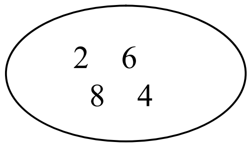
DEFINIZIONE. *A si dice sottoinsieme proprio di B se* $A \subseteq B$ *ed esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A* ($\exists (:= esiste)\, x \in B,\ |$ (: = tale che) $x \notin A$); *in tal caso indicheremo* $A \subset B$.

Se accade contemporaneamente che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$ cioè i due insiemi sono uguali. Se A e B non sono uguali scriveremo $A \neq B$ (A diverso da B).
Si noti che ogni insieme A ha come sottoinsiemi A stesso e Φ che vengono chiamati sottoinsiemi banali. Un insieme può essere rappresentato o per elencazione (elencando esplicitamente i suoi elementi) o per proprietà (enunciando la proprietà che i suoi elementi verificano) o tramite i diagrammi di Eulero-Venn.

ESEMPIO

A = {2,4,6,8}

B = {tutti i numeri interi pari compresi fra 2 ed 8}

C = 

Si noti che se un insieme è costituito da un numero finito di elementi lo si può indicare nei tre modi possibili; se invece è costituito da un numero infinito di elementi è conveniente indicarlo per proprietà o tramite diagramma.

1.1.1 *Operazioni tra insiemi*

DEFINIZIONE. *Dati due insiemi A e B si definisce unione tra A e B ($A \cup B$) l'insieme costituito da tutti gli elementi di A e da quelli di B presi una sola volta se eventualmente sono ripetuti:*

$$A \cup B = \{x \in A \text{ e/o } x \in B\}.$$

DEFINIZIONE. *Dati due insiemi A e B si definisce intersezione tra A e B ($A \cap B$) l'insieme costituito dagli elementi che contemporaneamente stanno in A ed in B:*

$$A \cap B = \{x : x \in A \; ed \; x \in B\}.$$

DEFINIZIONE. *Dati due insiemi A e B si definisce differenza tra A e B (A/B) l'insieme costituito dagli elementi di A che non appartengono a B:*

$$A / B = \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

ESEMPIO

Siano A = $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ B = $\{-3, 0, \sqrt{2}\}$.

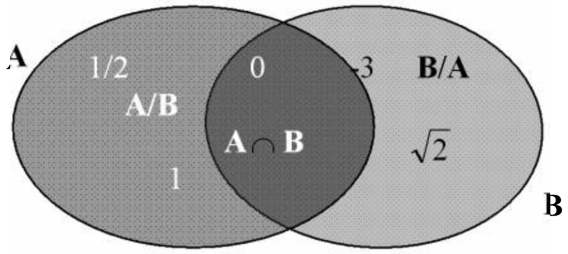
Si ha: $A \cup B = \{-3, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}\}$

$A \cap B = \{0\}$

$A / B = \{\frac{1}{2}, 1\}$

$B / A = \{-3, \sqrt{2}\}$.

Attraverso la rappresentazione grafica dei diagrammi di Eulero-Venn, lo stesso esempio diventa:



Da questo esempio si può notare che $A = (A / B) \cup (A \cap B)$; $A \cup B = B \cup A$ mentre $A / B \neq B / A$; questo significa che le operazioni di unione ed intersezione sono operazioni commutative, mentre la differenza non lo è.

DEFINIZIONE. *Dato un insieme A chiameremo insieme delle parti di A, P(A), l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A (compresi quelli banali):*

$$P(A)=\{X \mid X \subseteq A\}.$$

ESEMPIO

Sia A = {1, 2, 3, 4} determinare *P(A).*

Intanto Φ ed A stesso appartengono a *P(A);*

i sottoinsiemi formati da un solo elemento sono : {1}, {2}, {3}, {4};

i sottoinsiemi formati da due elementi sono {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4};

i sottoinsiemi formati da tre elementi sono {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}

quindi $P(A) = \{\Phi, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$; notare che *P(A)* contiene 16 ($=2^4$) elementi.

OSSERVAZIONE. In generale, se un insieme X ha r elementi allora *P(X)* avrà 2^r elementi.

Alcune tra le proprietà di cui godono le operazioni tra insiemi sono:

P1: $A \cap A = A$	
P2 : $A \cap \Phi = \Phi \cap A = \Phi$	
P3 : $A \cup \Phi = \Phi \cup A = A$	
P4 : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	*proprietà distributiva*
P5 : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	" "
P6 : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	*proprietà associativa*
P7 : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	" "
P8 : $A / (B \cup C) = (A / B) \cap (A / C)$	*formula di De Morgan*
P9 : $A / (B \cap C) = (A / B) \cup (A / C)$	" "

Dimostriamo, ad esempio, la P9, che essendo una uguaglianza insiemistica va provata facendo vedere che preso un qualunque elemento appartenente al primo membro, esso appartiene anche al secondo membro e viceversa.

Sia $x \in A/(B \cap C)$; allora $x \in A$ ed $x \notin B \cap C$, ovvero $x \notin B$ oppure $x \notin C$. Da cui $x \in A$ ed $x \notin B$ implica $x \in (A/B)$; $x \in A$ ed $x \notin C$ implica $x \in (A/C)$.

In definitiva $x \in (A/B)$ oppure $x \in (A/C)$ perciò $x \in (A/B) \cup (A/C)$. Viceversa, sia $x \in (A/B) \cup (A/C)$: allora $x \in (A/B)$ oppure $x \in (A/C)$. Se $x \in (A/B)$ allora $x \in A$ ed $x \notin B$; se $x \in (A/C)$ allora $x \in A$ ma $x \notin C$.

Da ciò $x \notin (B \cap C)$ ovvero $x \in A/(B \cap C)$.

DEFINIZIONE. *Si dice prodotto cartesiano di due insiemi A e B (e si denota con* $A \times B$*) l'insieme formato dalle coppie ordinate (a,b) con* $a \in A$ *e* $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

1.2 Teoria dei numeri

Consideriamo adesso particolari insiemi : gli insiemi numerici.

Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei *numeri naturali*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, \ldots\};$$

in tale insieme vengono definite le operazioni algebriche elementari dirette (somma e prodotto) e le relative operazioni inverse (differenza e divisione).

Osserviamo che le operazioni inverse non sempre sono eseguibili, infatti dati a e b appartenenti ad $\mathbb{N}$ la loro differenza è quel numero naturale c (se esiste) tale che $c+b=a$.

È chiaro che se $a \le b$ allora $\nexists\ c \in \mathbb{N}: c+b=a$ perché per ogni c intero, $c+b>b\ge a \quad \Rightarrow \quad c+b>a$.

Analogamente dati a e b interi non è detto che esista c (risultato della divisione di a per b) tale che $c \cdot b = a$, ovvero che a sia multiplo di b.

Dato che non è possibile in $\mathbb{N}$ effettuare tutte le operazioni di base, nel senso che il risultato non è detto che sia un numero intero, viene introdotto l'insieme dei numeri *interi relativi* $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0,\ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm n, \ldots\}.$$

Si guadagna così l'operazione di sottrazione, oltre le due operazioni dirette; ma ancora non è detto che il quoto di due interi relativi sia ancora dello stesso tipo.

Per tale motivo viene introdotto l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*, ossia delle frazioni aventi numeratore un intero relativo qualsiasi, e per denominatore un intero relativo diverso da zero

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \ne 0 \right\}.$$

È chiaro che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ nel sistema di numerazione decimale si può scrivere come $\pm M, c_1 c_2 \ldots c_r \ldots c_1 c_2 \ldots c_r = \pm M, \overline{c_1 c_2 c_r}$ dove M è un numero naturale, $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sono numeri interi compresi tra 0 e 9 e la barra sopra $c_1 c_2 \ldots c_r$ indica la periodicità, ovvero il loro ripetersi nella numerazione decimale.

L'insieme $\mathbb{Q}$ ci permette di eseguire tutte le operazioni algebriche di base; ricordiamo che dati *a, b, c,d* elementi di $\mathbb{Z}$ con c e d non nulli si ha:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad > bc.$$

Tuttavia si potrebbe provare che $\nexists\ r \in \mathbb{Q}: r^2 = 2$, mentre vedremo che un numero che verifica la suddetta eguaglianza è la radice quadrata aritmetica di 2 ($\sqrt{2}$).

Pertanto, si definisce $\mathbb{R}$ l'insieme dei *numeri reali*, ampliando $\mathbb{Q}$ con quei numeri che non si possono esprimere sotto forma di frazione, come $\sqrt{2}, \pi, e$ (*numeri irrazionali*):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{ \sqrt{2}, \pi, e, \ldots.. \right\}.$$

Chiameremo numero reale il seguente simbolo: $\pm M, c_1 c_2 \ldots c_r \ldots$ osservando che se la successione di cifre decimali dopo la virgola è periodica il numero è reale razionale, altrimenti il numero è irrazionale.

Lo zero avrà la seguente rappresentazione *0,00000…* ; mentre il numero reale si dirà positivo o negativo se il segno che lo precede è + oppure – .

Dato a numero reale si dice opposto del numero a lo stesso numero col segno cambiato ($-a$). Due numeri reali a e b si dicono uguali se hanno lo stesso segno, la stessa parte intera e la stessa successione di cifre decimale, ovvero se, sempre avendo lo stesso segno uno dei due numeri è periodico di periodo 9 e l'altro si ottiene da questo sostituendo il 9 con 0 ed aumentando di una unità la cifra che precede il periodo 9, per esempio +5,319999…= +5,32.

L'uguaglianza fra numeri reali gode delle seguenti tre proprietà:

P1: *riflessiva* : $a = a, \forall a \in \mathbb{R}$
P2: *simmetrica* : $a = b \Rightarrow b = a, \forall a, b \in \mathbb{R}$
P3: *transitiva* : $a = b, b = c \Rightarrow a = c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Per confrontare due numeri reali distinti non negativi diremo che a è minore di b e scriveremo $a < b$ se la parte intera di a è minore della parte intera di b ovvero se avendo la stessa parte intera la prima cifra decimale di a è minore della corrispondente cifra decimale di b e così via. Ovviamente $a > 0 \ \ \forall\, a \ reale \ positivo$.

Se a e b sono entrambi reali negativi diremo che a è minore di b se $-b < -a$. Si deduce che ogni numero reale non negativo è maggiore di qualunque numero reale negativo.

Ricordiamo che la relazione di confronto introdotta in $\mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà :

P1: *riflessiva* : $a \le a, \forall a \in \mathbb{R}$
P2: *antisimmetrica* : $a \le b, b \le a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in \mathbb{R}$
P3: *transitiva* : $a \le b, b \le c \Rightarrow a \le c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
P4: *tricotomia*: $se \ a \ne b \ \ \Rightarrow a < b \ \ oppure \ \ b < a$
P5: se $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
P6: se $a \le b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a \cdot c \le b \cdot c & se \ \ c \ge 0 \\ a \cdot c \ge b \cdot c & se \ \ c < 0 \end{cases}$
P7: se a e b sono concordi (discordi) $\Rightarrow \quad a \cdot b \ge 0 \quad (a \cdot b \le 0)$
P8: *Assioma di completezza : siano A e B sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbb{R}$*, tali che* $a \le b \quad \forall\, a \in A, b \in B$*. Allora esiste almeno un numero reale c tale che* $a \le c \le b \quad \forall a \in A, b \in B$.

In $\mathbb{R}$ definiamo le operazioni di somma e prodotto che godono delle seguenti proprietà:

P1:	$a+b=b+a; \quad a \cdot b = b \cdot a$	*proprietà commutativa*
P2:	$(a+b)+c = a+(b+c); \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	*proprietà associativa*
P3:	$a + 0 = a \quad ; \quad a \cdot 1 = a$	(*esistenza dell'elemento neutro)*
P4:	$a + (-a) = (-a) + a = 0, \ a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$	($\frac{1}{a}$ *è il reciproco di* $a \ne 0$)
P5:	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	*proprietà distributiva.*

Le *operazioni inverse* sono così definite:

$$a - b = a + (-b) \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 .$$

Osserviamo che :

1. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
2. $0 < a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$.

1.3 Valore assoluto

DEFINIZIONE. *Si dice valore assoluto del numero reale a il numero non negativo così definito:*

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a > 0 \\ -a & se\ a < 0 \\ 0 & se\ a = 0 \end{cases} .$$

Da questa definizione si hanno le seguenti proprietà :

P1: $\forall a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
P2: $\forall a, x \in \mathbb{R} \ \ |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ oppure $x \geq a$
P3: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
P4: $|a \pm b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ *prima disuguaglianza triangolare*
P5: $|a \pm b| \geq ||a| - |b|| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ *seconda disuguaglianza triangolare*
P6: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$
P7: $|a| < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$
P8: $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$
P9: $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

ESEMPI

- |-2 . 5| = |-10| = 10 e |-2||5| = 2 . 5 = 10
- |-2 + 3| = 1 < |-2| + |3| = 5
- |3 - (-2)| = |5| > ||3| - |-2|| = |3 – 2| = 1.

1.4 Elevamento a potenza

Assegnati due numeri reali α e β , cerchiamo di dare significato al simbolo α^{β} .

Procediamo per passi:

1. sia $\beta = n$ numero naturale; definiamo $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot ...\alpha}_{n\ volte}$ ed $\alpha^0 = 1$ $(\alpha \neq 0)$.
2. sia $\beta = m$ numero intero relativo, con *m* non negativo ed $\alpha \neq 0$, definiamo $\alpha^m = \dfrac{1}{\alpha^{-m}}$.
3. sia $\beta = \dfrac{m}{n}$ numero razionale; per definire la potenza $\alpha^{\frac{m}{n}}$ introduciamo la *radice n-esima di un numero reale.*

1.4.1 *Radice n-esima di un numero reale*

Sia $a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

DEFINIZIONE. *Si chiama radice n-esima aritmetica di* $a(\sqrt[n]{a})$ *quel unico numero reale positivo b la cui potenza n-esima da a :* $b^n = a$.

Si prova che un siffatto numero *b* esiste. Consideriamo adesso l'equazione $x^n = a$ con $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Tale equazione ammette o meno soluzioni nell'incognita reale *x* in funzione di *a* ed *n*, infatti:

1. se $a > 0$, *n* intero pari $n > 1$, l'equazione $x^n = a$ ammette in $\mathbb{R}$, come uniche soluzioni, la radice n-esima aritmetica di *a* $(b = \sqrt[n]{a})$ e l'opposto della radice n-esima aritmetica di a $(b=-\sqrt[n]{a})$;
2. se $a > 0$, *n* intero dispari $n > 1$, l'equazione $x^n = a$ ammette in $\mathbb{R}$ una ed una sola soluzione data dalla radice n-esima aritmetica di *a* $(b = \sqrt[n]{a})$;
3. se $a = 0$, *n* intero $n > 1$, l'equazione $x^n = 0$ ammette in $\mathbb{R}$ una ed una sola soluzione che è lo zero;
4. se $a < 0$, *n* intero dispari $n > 1$, l'equazione $x^n = a$ ammette in $\mathbb{R}$ una ed una sola soluzione (negativa) data dall'opposto della radice n-esima aritmetica di $-a$ $(b=-\sqrt[n]{-a})$;
5. se $a < 0$, *n* intero pari $n > 1$, in tal caso l'equazione $x^n = a$ non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE: *si dice radice n-esima di un numero reale ogni soluzione, se esiste, dell'equazione* $x^n = a$, *con* $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

1.4.2 *Proprietà della radice n-esima*

P1: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \forall a \geq 0$ ed *n* intero $n > 1$, e $\forall$a<0 ed *n* intero dispari >1.

P2: se $a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 0$

se $a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 0$

se $a < 0,\ n\ dispari \Rightarrow \sqrt[n]{a} < 0$

P3: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ con *n* dispari.

Si ha che $\sqrt{x^2} = |x|$, pertanto se $\alpha \geq 0$ definiamo $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m = (\sqrt[n]{\alpha^m})$.

Osserviamo che $\alpha^{\frac{m}{n}} \geq 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_0^+$ *ed* $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$.

Utilizzando l'assioma di completezza è possibile estendere la definizione di α^{β} con $\beta \in \mathbb{R}$ ed $\alpha > 0$.

Elenchiamo alcune proprietà delle potenze:

P1: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$

P2: $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

P3: $\alpha^{\beta} > 0$

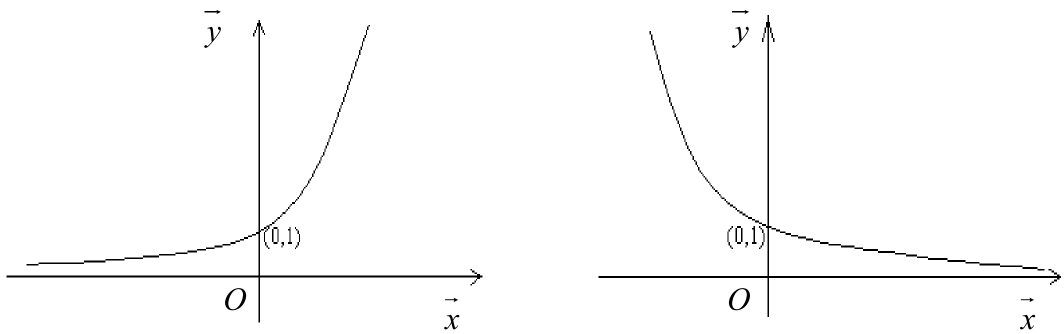
P4: $\alpha > 1, \quad \beta < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma}$

P5: $0 < \alpha < 1 \quad \beta < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^{\beta} > \alpha^{\gamma}$

P6: $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\gamma} = \dfrac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}}$

P7: $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$

P8: $se \quad 0 < \alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha^{\gamma} < \beta^{\gamma} & se\,\gamma > 0 \\ \alpha^{\gamma} = 1 & se\,\gamma = 0 \\ \alpha^{\gamma} > \beta^{\gamma} & se\,\gamma < 0 \end{cases}.$



(a) (b)

Figura 1.1 Grafico della funzione esponenziale a^{x} : (a) caso a>1, (b) caso 0<a<1.

ESEMPI

- $(a^3)^4 = a^{12}$; $\left[(x^3)^5\right]^7 = x^{105}$
- $c^2 \cdot c^5 \cdot c^3 = c^{10}$; $\dfrac{m^{12}}{m^7} = m^5$; $\left[(s)^3\right]^7 = s^{21}$
- $k^0 = 1$; $b^1 = b$; $z^{-4} = \dfrac{1}{z^4}$
- $(3 \cdot a \cdot b \cdot x)^7 = 3^7 \cdot a^7 \cdot b^7 \cdot x^7$; $\left(\dfrac{g}{h}\right)^3 = \dfrac{g^3}{h^3}$.

1.5 Logaritmo

DEFINIZIONE. *Dati a e b numeri reali a, b >0, $a \neq 1$, si definisce logaritmo di b in base a, e lo si indica con la scrittura $\log_a b$, l' unico numero reale soluzione dell'equazione $a^x = b$.*

Si può provare che un siffatto numero esiste e, ovviamente, risulta $a^{(\log_a b)} = b$.

Elenchiamo alcune proprietà del logaritmo:

P1: $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$

P2: $p = \log_a (a)^p$

P3: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

P4: $\log_a \left(\dfrac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

P5: $\log_b c = {\log_a c}\big/{\log_a b}$ (*formula di cambiamento di base*)

P6: $a > 1$, $b < c \iff \log_a b < \log_a c$

P7: $0 < a < 1$, $b < c \iff \log_a b > \log_a c$.

Se $a = e$ il logaritmo si dice naturale o neperiano e si indica con $\log a$ oppure $\lg a$; invece se $a = 10$ i logaritmi si dicono decimali e si indicano con Log *a*.

Nell'espressione $\log_a b = \pm M, c_1 c_2 \ldots$ la quantità $\pm M$ si dice la *caratteristica* del logaritmo mentre la quantità $c_1 c_2 \ldots$ si chiama la *mantissa* del logaritmo.

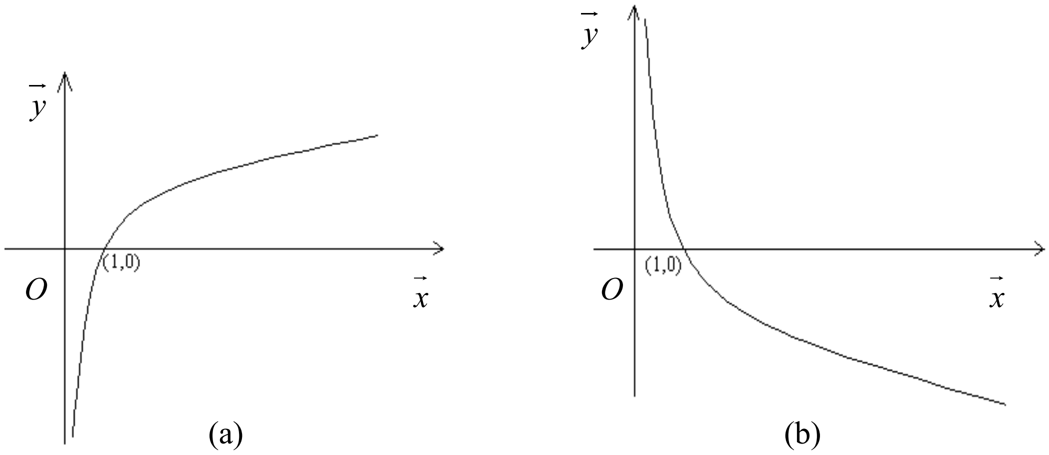


Figura 1.2 Grafico della funzione logaritmica $\log_a x$: (a) caso *a*>1, (b) caso 0<*a*<1.

ESEMPI

- $\log_2 8 = 3$ perchè $2^3 = 8$; $\log_5 25 = 2$ perchè $5^2 = 25$;
- $\log_{10} 10000 = 4$ perchè $10^4 = 10000$; $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4} = 2$ perchè $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$;
- $\log_{\frac{2}{5}} \dfrac{625}{16} = -4$ perchè $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-4} = \dfrac{625}{16}$; $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ perchè $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$;

- $\log_2 4\cdot16\cdot128=\log_2 4+\log_2 16+\log_2 128$; $\log_3 \dfrac{81}{243}=\log_3 81-\log_3 243$
- $\log_2 16^5=5\cdot\log_2 16$; $\log_3 \sqrt[3]{9}=\dfrac{1}{3}\cdot\log_3 9.$

1.6 Cenni di trigonometria; misura in radianti di un angolo α; sin α; cos α; tg α

Sia α un angolo del piano con origine in O:

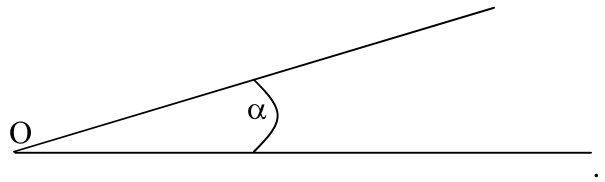


Figura 1.3

Consideriamo due circonferenze centrate in O di raggio rispettivamente r ed R (cfr. Figura 1.4) e, indichiamo con l e L, rispettivamente le lunghezze degli archi intercettati dall'angolo α su di esse:

Risulta :

$$\frac{l}{r}=\frac{L}{R}.$$

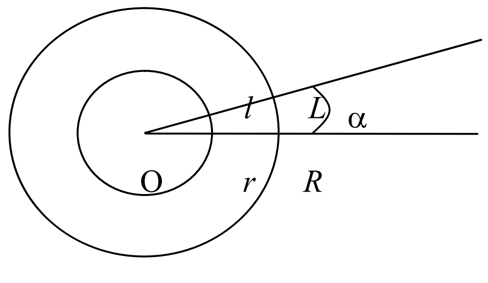


Figura 1.4

Tale numero, che non dipende dalla circonferenza centrata in O, si chiama la misura in radianti dell'angolo α . Pertanto un angolo avrà misura di 1 radiante se la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato è uguale al raggio della stessa circonferenza.

La misura in radianti dell'angolo giro è $2\pi r/r = 2\pi$ da cui deduciamo che l'angolo piatto è π radianti, l'angolo retto è π /2 radianti e più in generale la formula che ci permetterà di passare dalla misura in radianti dell'angolo α (α_r) alla misura in gradi (α_g) e viceversa:

$$\frac{\alpha_g}{360^0}=\frac{\alpha_r}{2\pi}.$$

Dalla precedente proporzione segue

Tabella 1.1

misura dell'angolo in gradi sessagesimali	misura dell'angolo in radianti
360°	2π
180°	π
90°	π/2
60°	π/3
45°	π/4
30°	π/6
270°	3π/2

Consideriamo ora, un sistema di riferimento cartesiano (cfr il Capitolo 3) e riportiamo l'angolo α in modo che la sua origine coincida con quella del sistema di riferimento e una delle due semirette che lo generano giaccia sull'asse $\vec{x}$ (cfr. Figura 1.5). Si conviene che la misura di α sia positiva se la semiretta che genera l'angolo e giace sull'asse $\vec{x}$ ruota in verso antiorario per sovrapporsi all'altra semiretta (in caso contrario la misura di α sarà negativa).

Sia Γ la circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio unitario (circonferenza trigonometrica):

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Diciamo B il punto sulla circonferenza intersezione con la semiretta libera che genera l'angolo α. Ebbene, l'ordinata ($\overline{BH}$) e l'ascissa ($\overline{OH}$) del punto B si chiamano rispettivamente seno di α ($\sin\alpha$) e coseno di α ($\cos\alpha$).

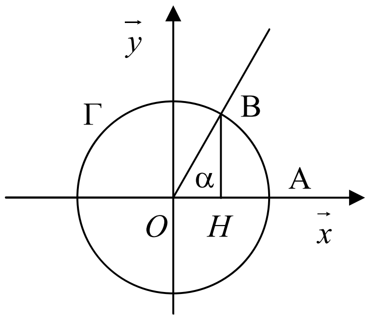


Figura 1.5

Evidentemente:

$$-1 \le \sin\alpha \le 1\,,\ -1 \le \cos\alpha \le 1\,,\ \ \forall\alpha \in \mathbb{R}\text{, e si ha:}$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \ \ ; \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di cateti BH, OH, ed ipotenusa uguale ad uno, si trova la relazione fondamentale:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

Definiamo tangente dell'angolo α ($\mathrm{tg}\,\alpha$) il seguente rapporto :

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

che ovviamente ha senso se $\cos\alpha \ne 0 \Leftrightarrow \alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Geometricamente la tangente di α rappresenta l'ordinata del punto T intersezione tra la retta tangente al cerchio trigonometrico in A e la semiretta libera che genera α ($tg\,\alpha$ = $\overline{AT}$)(cfr. Figura 1.6).

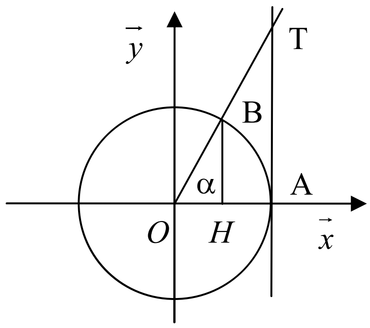


Figura 1.6

Riportiamo qui di seguito una tabella con i valori di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\mathrm{tg}\alpha$ per alcuni angoli di uso più frequente:

Tabella 1.2

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$15° = \pi/12$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$18° = \pi/10$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
$30° = \pi/6$	1/2		$\sqrt{3}/3$

		$\sqrt{3}/2$	
$45° = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60° = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
$90° = \pi/2$	1	0	non esiste
$180° = \pi$	0	-1	0
$270° = 3/2\pi$	-1	0	non esiste
$0° = 360° = 2\pi$	0	1	0

Ricordiamo, inoltre:

- *formule di addizione e sottrazione:*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \ ;$$

- *formule di bisezione:*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad , \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \ ;$$

- *formule di duplicazione :*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha \quad , \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \, .$$

- *formule parametriche:*

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \ .$$

I grafici delle funzioni trigonometriche sono i seguenti:

- $y = \sin x$ è una funzione periodica di periodo 2π definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, il codominio è [-1,1]. Il grafico interseca l'asse x nei punti della forma $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

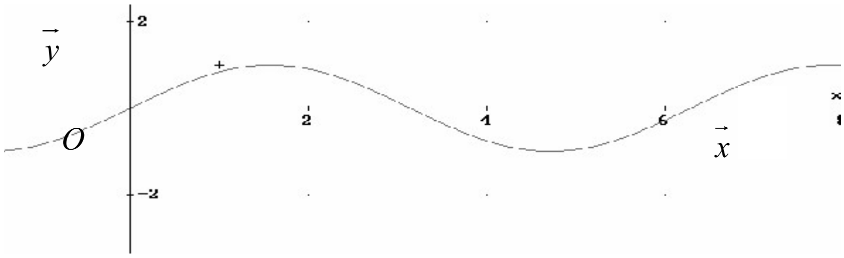


Figura 1.7 Grafico di sin *x*.

- y = cos x è una funzione periodica di periodo 2π definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, il codominio è [-1,1]. Il grafico interseca l'asse *x* nei punti della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

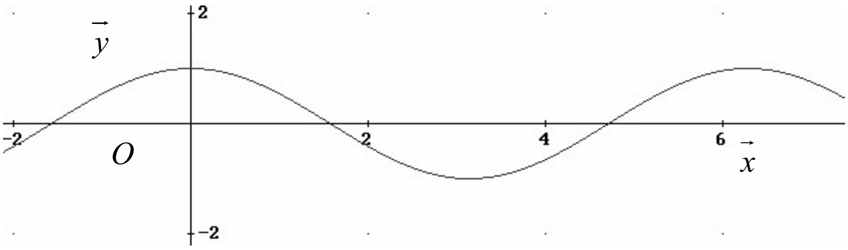


Figura 1.8 Grafico di cos *x*.

- $y = \text{tg}x$, definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e codominio $\mathbb{R}$, è una funzione periodica di periodo π . Il suo grafico interseca l'asse x nei punti della forma $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

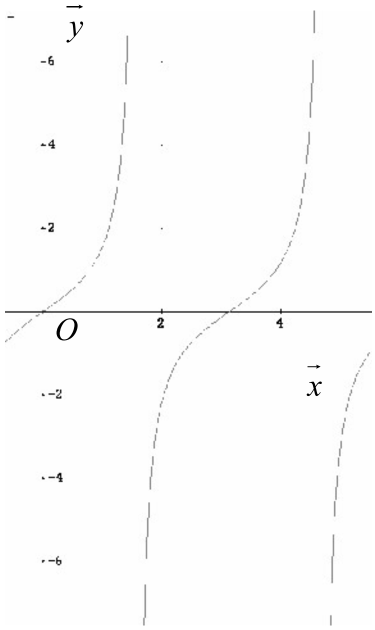


Figura 1.9 Grafico di tg x.

1.7 Polinomi, equazioni e disequazioni algebriche

DEFINIZIONE. *Si chiama polinomio algebrico di grado (o ordine) n una combinazione lineare di potenze intere della variabile x del tipo :*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1,...,n\ , a_n \neq 0\ .$$

Osserviamo che il grado del polinomio (deg *p(x))* è la massima potenza con cui compare la variabile x, ad esempio

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$$

è un polinomio di ordine 3 (deg *p(x)*=3). Se $p(x) = a_0$ il suo grado è zero.

Si chiama *valore del polinomio* per $x = \alpha$ e lo si indica con $p(\alpha)$ l'espressione numerica

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n .$$

Se $p(\alpha) = 0$, α si chiama *radice del polinomio.*

Assegnato un polinomio algebrico *p(x)* di grado *n* si chiama *equazione algebrica* associata al polinomio, e la si indica con *p(x)=0,* il problema della ricerca delle radici del polinomio.

Osserviamo che il numero delle radici dell'equazione algebrica è uguale all'ordine del polinomio contando le radici, anche se complesse e molteplici (*Teorema fondamentale dell'algebra*).

Teorema 1.1 (I^0 Principio d'identità dei polinomi) *Due polinomi p(x)* e *q(x) sono uguali se hanno lo stesso ordine, ed i coefficienti corrispondenti uguali.*

1.7.1 *Divisione tra polinomi*

Sussiste il seguente

Teorema 1.2 *Siano* A(x*) e B(x) due polinomi con* $\deg(A(x)) \geq \deg(B(x))$. *Allora esiste univocamente determinata la coppia di polinomi Q(x) (quoziente) ed R(x) (resto) tali che*

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad con \quad \deg(R(x)) < \deg(B(x)) .$$

Osserviamo che $x = \alpha$ è radice di *p(x)* se e solo se *p(x)* è divisibile per (*x-α*) (cioè il resto della divisione deve valere zero).

ESEMPIO

Siano $A(x) = x^3 - x^2 + 3$ e $B(x) = 2x - 1$;

eseguiamo la divisione

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 + 0 + 3 & 2x - 1 \\
\cline{2-2}
x^3 - \dfrac{x^2}{2} & \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{4} \\
\cline{1-1}
0 \ - \dfrac{x^2}{2} + 0 + 3 & \\
\quad - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4} & \\
\cline{1-1}
\qquad 0 \ - \dfrac{x}{4} + 3 &
\end{array}$$

da cui otteniamo: $Q(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}$ ed $R(x)=-\frac{x}{4}+3$.

Lasciamo al lettore la verifica che: $(x^3-x^2+3)=(2x-1)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}\right)+\left(-\frac{x}{4}+3\right)$.

Osserviamo infine che note $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,.....\alpha_n$ le *n* radici di *p(x)=0* (eventualmente non tutte distinte e non tutte reali) il polinomio ammette l'unica decomposizione

$$p(x)=a_n\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot......\cdot(x-\alpha_n).$$

ESEMPIO

Sia $p(x)=x^2-1$. Esso ammette come radici $x=\pm 1$ e quindi si decompone in $(x-1)(x+1)$.

1.7.2 *Equazione algebrica di primo ordine*

Si definisce *equazione algebrica* di *primo ordine* l'equazione :

$$ax+b=0 \text{ con } a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0.$$

Utilizzando le proprietà dei numeri reali tale equazione ammette l'unica soluzione $x=-\frac{b}{a}$.
Infatti: da $ax+b=0$ aggiungendo ad ambo i membri –b risulta $ax=-b$ da cui dividendo entrambi i membri per $a\neq 0$ si ottiene $x=-\frac{b}{a}$. D'altra parte è facile verificare che $x=-\frac{b}{a}$ soddisfa la nostra equazione.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione $-3x+5=0$.

Aggiungendo ad ambo i membri -5 e dividendo per -3 si ottiene la soluzione $x=\frac{5}{3}$.

1.7.3 *Equazione algebrica di secondo ordine*

Si definisce *equazione algebrica* del *secondo ordine* l'equazione:

$$ax^2+bx+c=0 \text{ con } a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0.$$

Si chiama *discriminante* dell'equazione (e lo si indica con il simbolo Δ) il numero $\Delta=b^2-4ac$.

La risoluzione dell'equazione è legata al segno di Δ. Si prova che :

- Se $\Delta>0$ l'equazione ammette due radici reali e distinte fornite dalla seguente formula:
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e quindi} \quad ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$
- Se $\Delta=0$ l'equazione ammette due radici reali e coincidenti date da
$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a} \qquad ed \qquad ax^2+bx+c=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

- Se $\Delta<0$ l'equazione non ammette radici reali (ma ovviamente ne ammetterà due complesse coniugate).

OSSERVAZIONE. Assegnato il polinomio algebrico *p(x)*, il problema della risoluzione di $p(x) \neq 0$ si affronta determinando le soluzioni di $p(x)=0$ ed escludendo tali valori.

ESEMPIO

Per risolvere $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, basterà risolvere $x^2 - 3x + 2 = 0$. Tale equazione ha come soluzioni

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

per cui $x \neq 1, x \neq 2$ sono le soluzioni del nostro problema.

1.7.4 *Sistemi di equazioni*

Il problema della risoluzione di due o più equazioni, ovvero la ricerca dei valori da dare alla variabile x per soddisfare contemporaneamente le equazioni assegnate $p_1(x) = 0, \ldots\ldots, p_r(x) = 0$ si chiama *sistema* e lo si indica nella maniera seguente:

$$\begin{cases} p_1(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ p_r(x) = 0 \end{cases}.$$

ESEMPIO

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases},$$

la prima equazione ha come soluzioni $x = \pm 1$ mentre la seconda equazione ha soluzione $x = 1$. Quindi il sistema ammette come unica soluzione $x = 1$.

OSSERVAZIONE. Un sistema potrebbe non avere soluzioni, quando le singole equazioni che lo compongono non hanno soluzioni o non hanno soluzioni a comune. Un sistema, infine, potrebbe presentarsi nel seguente modo :

$$\begin{cases} p(x) = 0 \\ \quad\cdots \\ q(x) \neq 0 \end{cases}.$$

1.7.5 *Equazioni fratte*

Assegnati i polinomi *p(x)* e *q(x)*, si chiama *equazione fratta* l'equazione $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$.

Essa è equivalente al sistema: $\begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0 \end{cases}.$

ESEMPIO

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1, \quad x=2 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

quindi l'unica soluzione dell'equazione è $x = 2$.

1.7.6 *Disequazioni algebriche*

Sia *p(x)* un polinomio di ordine n . Si chiama disequazione algebrica il problema della ricerca dei valori di *x* per cui è soddisfatta una delle seguenti relazioni:

$$p(x)>0; \quad p(x)\geq 0; \quad p(x)<0; \quad p(x)\leq 0 \ .$$

Osserviamo che sarà sufficiente saper risolvere ad esempio la disequazione $p(x)>0$ (ed è questo il caso in cui, in seguito, analizzeremo la risoluzione dei vari tipi di disequazione).

Infatti:

$$p(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad -p(x)>0 \ ; \ p(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x)>0 \quad e \quad p(x)=0 .$$

1.7.7 *Disequazione algebrica di primo ordine*

La forma generale di una *disequazione algebrica* di *primo ordine* è del tipo:

$$ax+b>0 , \quad a\neq 0 \ .$$

Dalle proprietà dei numeri reali $a\,x+b>0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,x>-b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>-\dfrac{b}{a} & se\ a>0 \\ x<-\dfrac{b}{a} & se\ a<0 \end{cases}$.

Risulta evidente che, al contrario dell'equazione di primo ordine che ammette una sola soluzione, le soluzioni della nostra disequazione sono infinite.

1.7.8 *Disequazione algebrica di secondo ordine*

La forma generale di una *disequazione algebrica* di *secondo ordine* è del tipo:

$$ax^2+bx+c>0 , \quad a\neq 0 .$$

Detto $\Delta=b^2-4ac$ il discriminante dell'equazione associata alla disequazione considerata, si possono presentare tre casi:

- Se $\Delta>0$ l'equazione associata ammette due radici reali e distinte: $x_1<x_2$.
  In tal caso le soluzioni della disequazione si ottengono seguendo la regola: il segno del trinomio ax^2+bx+c è uguale al segno del coefficiente *a* per le *x* tali che $x<x_1$, $x>x_2$; invece il segno del trinomio è opposto al segno di *a* per le *x* tali che $x_1<x<x_2$.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione: $x^2+x-2>0$.

Risulta $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ per cui $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$ sono le soluzioni dell'equazione associata; dunque essendo il coefficiente della x di secondo grado positivo come il segno del trinomio, le soluzioni della disequazione sono:

$$x < -2, \quad x > 1 .$$

- Se $\Delta = 0$ l'equazione associata ammette come unica radice $x = -\dfrac{b}{2a}$.

  In tal caso il segno del trinomio è lo stesso del segno di a, $\forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

ESEMPI

a. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 - 2x + 1 > 0$.
   Risulta $\Delta = 4 - 4 = 0$ per cui $x = 1$ è la soluzione dell'equazione associata; dunque le soluzioni della disequazione sono $\forall x \in R$, $x \neq 1$.
b. Risolvere la seguente disequazione: $-x^2 + 4x - 4 > 0$.
   Risulta $\Delta = 16 - 16 = 0$ per cui $x = 2$ è la soluzione dell'equazione associata; dunque la disequazione non ammette soluzioni.

- Se $\Delta < 0$ l'equazione associata alla disequazione non ammette soluzioni reali, quindi il segno del trinomio è uguale al segno di a.

ESEMPI

a. Risolvere la seguente disequazione: $x^2 + x + 1 > 0$.
   Risulta $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$; dunque le soluzioni della disequazione sono $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. Risolvere la seguente disequazione: $-x^2 + x - 1 > 0$.
   Risulta $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$; dunque la disequazione non ammette soluzioni.

1.7.9 *Sistemi di disequazioni*

Si chiama *sistema di disequazioni* il problema della ricerca dei valori di x per cui risultino contemporaneamente soddisfatte un numero finito di disequazioni assegnate:

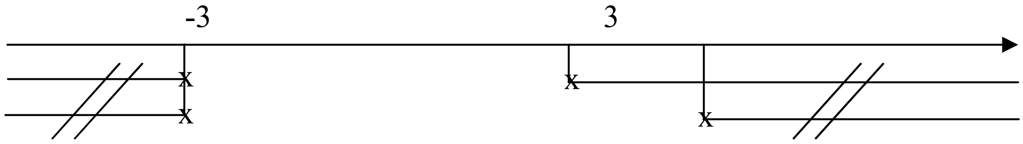
$$\begin{cases} p_1(x) < 0 \\ p_2(x) \geq 0 \\ \quad \vdots \\ p_r(x) > 0 \end{cases} .$$

ESEMPI

a. Risolvere il sistema :

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) > 0 \\ \Delta = 49 - 48 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3, \quad x_2 = 3 \\ x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3, \quad x > 3 \\ x < 3, \quad x > 4 \end{cases}.$$

Graficamente si ha:



quindi, il sistema dato ha come soluzioni: x<-3, x>4 .

b. Risolvere la disequazione $|x+1| + x^2 \leq 4$.
Questa disequazione è equivalente all'unione dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 1 + x^2 \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x + 1 < 0 \\ -x - 1 + x^2 \leq 4 \end{cases}$$

che hanno come soluzioni

$$-1 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \quad \cup \quad \frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq -1$$

per cui le soluzioni della disequazione iniziale sono

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

c. Risolvere la seguente disequazione : $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12} > 0$.

La disequazione è equivalente all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3, \ x > 3 \\ x < 3, \ x > 4 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 < x < 3 \\ 3 < x < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x < -3, \ x > 4) \cup (\Phi),$$

per cui le soluzioni della disequazione iniziale sono: $x < -3, \ x > 4$.

1.7.10 *Equazioni e disequazioni irrazionali*

Si definisce *equazione irrazionale* un' equazione del tipo

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

dove $n \in \mathbb{N}, A(x)$ e $B(x)$ sono due polinomi nella variabile x. La risoluzione di tale equazione dipende dall'indice *n*..

Precisamente l'equazione considerata è equivalente (a meno di verifica finale) a:

- se *n* è pari al sistema: $\begin{cases} A(x) = [B(x)]^n \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

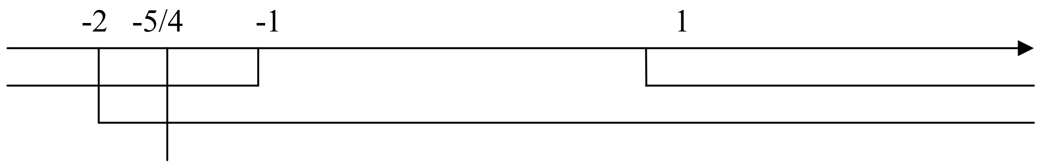
- se *n* è dispari all'equazione: $A(x) = [B(x)]^n$.

ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione : $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$

Essa è equivalente al sistema : $\begin{cases} x^2 - 1 = (x+2)^2 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 0 \\ x \leq -1, \quad x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{4} \\ x \leq -1, \quad x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$. Graficamente si ha:



per cui l' unica soluzione è $x = -\dfrac{5}{4}$; lasciamo al lettore la verifica finale (osserva che l'elevamento a potenza di un polinomio porta generalmente all'introduzione di soluzioni spurie).

Un tipo di *disequazione irrazionale* è:

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x).$$

Si possono presentare due diversi casi:

- Se n è dispari, occorre risolvere la disequazione: $A(x) > [B(x)]^n$
- Se n è pari, occorre risolvere i due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases}.$$

L'equivalenza ovviamente è a meno di verifica finale.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{x^2-3x+2} > x+1$.
La disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x+1<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ x^2-3x+2 > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \le 1,\, x \ge 2 \\ x<-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \le 1,\, x \ge 2 \\ x \ge -1 \\ x<2-\sqrt{3},\, x>2+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x<-1 \quad \cup \quad -1 \le x < 2-\sqrt{3}.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione data è formato dalle x : $x<2-\sqrt{3}$.

1.7.11 *Equazioni e disequazioni esponenziali*

Si chiama equazione (disequazione) *esponenziale* un'equazione (una disequazione) in cui la variabile x (oppure un polinomio da essa dipendente) figura come base o esponente di una potenza.

L'equazione $a^{p(x)}=b, \quad b>0$ è equivalente a risolvere l'equazione algebrica $p(x)=\log_a b$.

La disequazione $a^{p(x)}>b$ è equivalente , se $b>0$, alla disequazione $p(x)>\log_a b$ se $a>1$ oppure alla disequazione $p(x)<\log_a b$ *se* $0<a<1$; mentre è sempre verificata se $b \le 0$.

ESEMPI

a. Risolvere la seguente equazione esponenziale $2^{x^2-1}=3$. L'equazione equivale a
$x^2-1=\log_2 3 \Leftrightarrow x^2=1+\log_2 3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1+\log_2 3}$.

b. Risolvere la seguente equazione esponenziale: $3^{2x}+4\cdot 3^x-12=0$. L'equazione equivale a

$$\begin{cases} 3^x=t \\ t^2+4t-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=t \\ t=-6, \quad t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=-6 \\ t=-6 \end{cases} \cup \begin{cases} 3^x=2 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \Phi \cup x=\log_3 2,$$

per cui la soluzione dell'equazione è $x=\log_3 2$.

c. Risolvere la seguente disequazione esponenziale : $9^x-5\cdot 3^x+6>0$.

La disequazione equivale a:

$$3^{2x}-5\cdot 3^x+6>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=t \\ t^2-5t+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=t \\ t<2, \quad t>3 \end{cases} \Leftrightarrow 3^x<2 \cup 3^x>3 \Leftrightarrow$$

$x<\log_3 2, \quad x>\log_3 3=1$,
per cui la soluzione della disequazione iniziale è $x<\log_3 2, \quad x>1$.

d. Risolvere la seguente disequazione esponenziale : $\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)}<(2)^{x+4}$.

La disequazione equivale a:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2(x-1)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-(x-4)} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1) > -(x+4) \quad \Leftrightarrow \quad 2x-2 > -x-4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{2}{3}$$

per cui le soluzioni sono $x > -\frac{3}{2}$.

1.7.12 *Equazioni e disequazioni logaritmiche*

Si chiama equazione (disequazione) *logaritmica* un'equazione (una disequazione) in cui la variabile x (oppure un polinomio da essa dipendente) figura come argomento o base di un logaritmo.

L'equazione $\log_a p(x) = b \quad con \quad a > 0, \quad a \neq 1$ è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) = a^b \end{cases}.$$

La disequazione $\log_a p(x) < b = \log_a a^b \quad con \quad a > 0, \quad a \neq 1$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) < a^b \end{cases} \quad se \quad a > 1$$

oppure al sistema

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ p(x) > a^b \end{cases} \quad se \quad 0 < a < 1.$$

ESEMPI

a. Risolvere la seguente equazione logaritmica: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 2) = 0$ .Essa equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 > 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 2 = 3\,; \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{3}\,, \quad x > 1 + \sqrt{3} \\ x = -1\,, \quad x = 3 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono : $x = -1, \quad x = 3$.

b. Risolvere la seguente disequazione : $\log_5(x^2 + x - 1) < 1$. Essa è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad x > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -3 < x < 2 \end{cases},$$

da cui, tramite intersezione grafica delle soluzioni, si ottiene:

$$-3 < x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 2 \;.$$

c. La disequazione : $(\lg x)^2 - 1 < 0$ equivale a risolvere

$$\begin{cases} \lg x = t \\ t^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = t \\ -1 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x < 1 \\ \lg x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < e \\ x > \dfrac{1}{e} \end{cases},$$

le cui soluzioni sono : $\frac{1}{e} < x < e$.

d. Risolvere la seguente disequazione : $\lg_e(25^x - 2\cdot 5^x + 2) > 0$. Essa equivale al sistema

$$\begin{cases} 25^x - 2\cdot 5^x + 2 > 0 \\ 25^x - 2\cdot 5^x + 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \; ponendo \;\; 5^x = t \;\; \begin{cases} t^2 - 2t + 2 > 0 \\ t^2 - 2t + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in R \\ (t-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in R \\ \forall t \in R, t \neq 1 \end{cases}$$

per cui deve essere $5^x \neq 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; x \neq 0$.

1.8 Insiemi limitati

Sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$;

DEFINIZIONE. *Un numero reale* L(l) *si dice un maggiorante* (*minorante*) *per l'insieme X se* $x \leq L \quad (l \leq x) \quad \forall x \in X$.

È bene notare esplicitamente che un insieme X non sempre ammette maggioranti o minoranti. Se, ad esempio, $X = \{x \in R : x \geq 0\}$, X non ammette maggioranti, mentre lo zero (ed anche un qualsiasi numero reale negativo) è un minorante di X .

DEFINIZIONE. *Diremo che X è limitato superiormente (inferiormente) se ammette un maggiorante (minorante) e si dice limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente* $\Leftrightarrow \;\; \exists\, l, L \in \mathbb{R} : l \leq x \leq L \,, \forall x \in X$.

Proposizione 1.3 *X è limitato* $\Leftrightarrow \;\; \exists\, H > 0 : -H \leq x \leq H, \forall x \in X$.

Dimostrazione: Dalla definizione, X *è* limitato $\Leftrightarrow \exists\, l, L \in \mathbb{R} : l \leq x \leq L \;\; \forall x \in X$; d'altra parte $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \;\; -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ pertanto :

$l \leq x \leq L, \quad \forall x \in X \Leftrightarrow -(|\,l\,| + |\,L\,|) \leq x \leq |\,L\,| \leq |\,l\,| + |\,L\,| \quad \forall x \in X$, da cui l'affermazione per $H = |\,l\,| + |\,L\,|$.

OSSERVAZIONE. Se K è un maggiorante di X (h un minorante di X) allora un qualunque $k' > k$ ($h' < h$) è ancora un maggiorante (minorante) di X .

Assegnato $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$,

DEFINIZIONE. $M \in \mathbb{R}$ *si dice massimo di* X *se*:

1. $x \leq M \quad \forall x \in X$ (M *è un maggiorante*)
2. $M \in X$.

Analogamente, $m \in \mathbb{R}$ *si dice minimo di X se* :

1. $m \leq x \quad \forall x \in X$ (m *è un* minorante)
2. $m \in X$.

OSSERVAZIONE. Non tutti i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ hanno massimo e minimo. Ad esempio se $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, A non ha né massimo né minimo (non esiste il più piccolo numero reale positivo; ad esempio lo zero è un minorante ma non è minimo perché non appartiene ad A).

OSSERVAZIONE. Si verifica facilmente che quando esistono, il massimo ed il minimo sono unici.

Teorema 1.4 (*esistenza dell'estremo superiore*) *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$, *limitato superiormente; allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di* X.

Tale numero, denotato con $\sup X$, viene chiamato *estremo superiore* di X, e, risulta evidente che (*prop. caratteristiche dell'estremo sup.*):

$$L = \sup X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ x \leq L \quad \forall x \in X \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{x} \in X : \quad \overline{x} > L - \varepsilon \end{cases}$$

infatti la proprietà 1) afferma che L è un maggiorante mentre la proprietà 2) equivale a dire che L è il più piccolo dei maggioranti. In maniera analoga si prova

Teorema 1.5 (*esistenza dell'estremo inferiore*) *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$ *limitato inferiormente; allora esiste il massimo dell'insieme dei minoranti di X.*

Tale numero, che si denota con $\inf X$, si chiama l'*estremo inferiore* di X. Evidentemente (*prop. caratteristiche dell'estremo inf.*).:

$$l = \inf X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1')\ l \leq x \quad \forall x \in X \\ 2')\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{\overline{x}} \in X : \quad \overline{\overline{x}} < l + \varepsilon \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Se un insieme $X \neq \Phi$ ha massimo M (minimo m) allora $M = \sup X$ ($m = \inf X$), infatti M è un maggiorante di X ed $M \in X$ pertanto sono verificate le due proprietà caratteristiche dell'estremo superiore (la prima è ovvia, la seconda per $\overline{x} = M$).

Infine, sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \Phi$

DEFINIZIONE. *X si dice non limitato superiormente (inferiormente) se non ammette maggioranti (minoranti)* $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \ \ \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > k$ (risp. $\forall h \in \mathbb{R} \ \ \exists x^* \in X : x^* < h$).

OSSERVAZIONE. Nelle relazioni precedenti ci si può limitare a considerare $k>0$ ed $h<0$.

ESEMPIO

Dire se l'insieme numerico $X = \left\{ \dfrac{1}{x} \ , \quad 0 < x \leq 1 \right\}$ è limitato superiormente e/o inferiormente e calcolare, in caso affermativo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se sono minimo e massimo rispettivamente.

Osserviamo che $1 \le \frac{1}{x}$ $\forall x : 0 < x \le 1$ da cui X è limitato inferiormente e poiché $1 \in X \quad \Rightarrow \quad 1 = \min X = \inf X$.

Proviamo che X non è limitato superiormente $\Leftrightarrow$ $\forall\, k > 0 \quad \exists\, \bar{x} : 0 < \bar{x} \le 1 \rightarrow \frac{1}{\bar{x}} > k$.

Osserviamo che il sistema $\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x} > k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ x < \frac{1}{k} \end{cases}$ ammette, qualunque sia k >0, infinite soluzioni.