

Guida per eseguire uno studio di funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Lo studio di tale funzione ricalca quello adatto ad ogni altra funzione.

Per rendere più comprensibili i vari passaggi, essi sono stati suddivisi in vari "passi" successivi.

PASSO 1

- **Ricerca del dominio (o del campo di esistenza):**

Devo escludere tutti i valori della x che non mi permettono di calcolare la y corrispondente.

Nel nostro caso sarà: $x - 2 \neq 0$ cioè $x \neq 2$, infatti è impossibile calcolare un rapporto con denominatore nullo.

Il dominio sarà tutto l'asse dei numeri reali escluso $x = 2$, cioè $D = R - \{2\}$.

PASSO 2

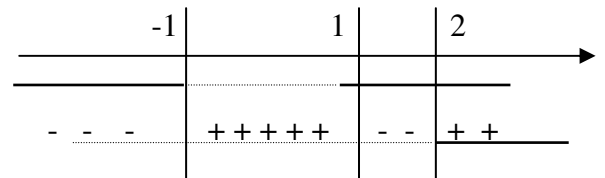
- **Ricerca dei valori della x per cui y è positivo:**

Basta risolvere la disequazione $y > 0$. Nel nostro caso:

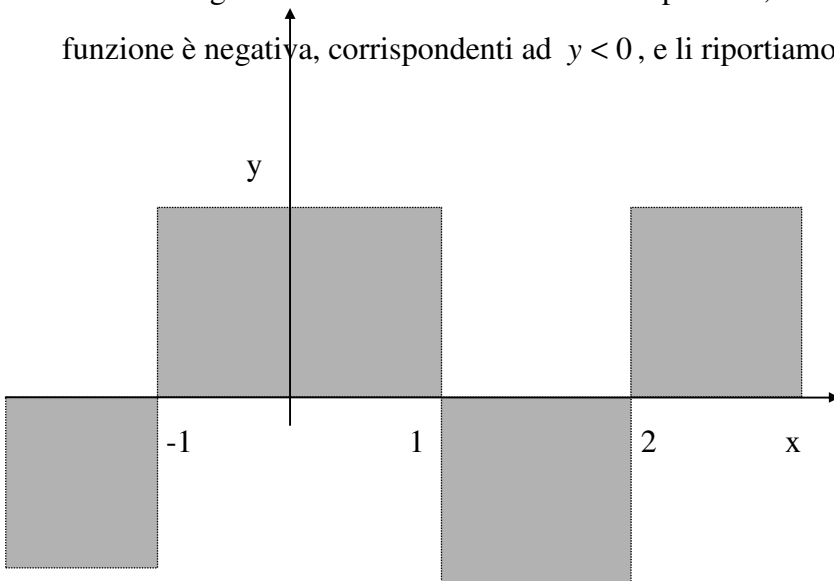
$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} > 0$$

$$\text{Numeratore : } x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\text{Denominatore : } x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$



Otteniamo gli intervalli in cui la funzione è positiva, corrispondenti ad $y > 0$, e quelli in cui la funzione è negativa, corrispondenti ad $y < 0$, e li riportiamo sul grafico cartesiano:



In grigio le zone del piano cartesiano in cui è previsto il grafico.

PASSO 3

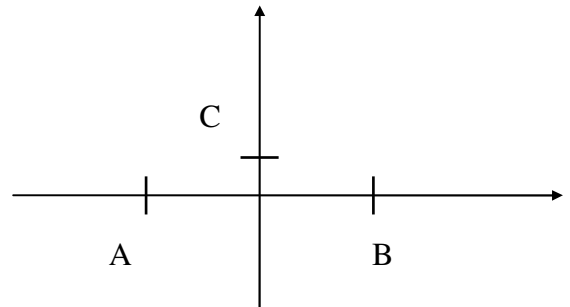
- **Ricerca intersezioni con gli assi:**

Ponendo $y = 0$ ottengo le intersezioni con l'asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{quindi } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ponendo $x = 0$ ottengo le intersezioni con l'asse y :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$



Ho quindi ottenuto i tre punti riportati sul grafico: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1/2)$.

PASSO 4

- **Ricerca dei limiti agli estremi del campo di esistenza e determinazione degli asintoti:**

Si cercano i valori dei limiti per x che tende a $\pm\infty$ ed i limiti destro e sinistro per x che tende ai valori non compresi nel dominio.

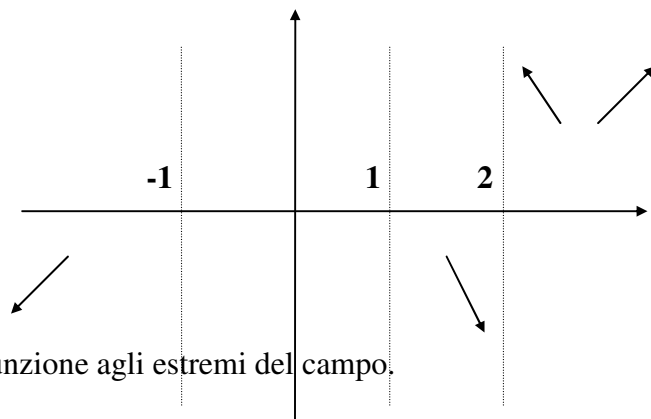
Resta inteso ovviamente che se la funzione è definita solo per $x > c$, dove c è un numero, è inutile la ricerca del limite per x che tende a meno infinito. Stesso discorso per $+\infty$ se la funzione è definita per $x < c$. Vediamo il nostro caso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$



Nel grafico è riportato l'andamento della funzione agli estremi del campo.

La funzione ha un asintoto verticale di equazione $x = 2$ ma non ha un asintoto orizzontale, devo pertanto cercare l'asintoto obliquo, che avrà equazione del tipo $y = m x + q$.

$$\text{Poiché } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ sarà } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$\text{Invece } q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] \text{ per cui } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = 2.$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 2$.

PASSO 5

- **Studio della derivata prima per ricercare massimi e minimi:**

Dopo aver calcolato la derivata prima, la pongo uguale a zero. Le soluzioni dell'equazione danno i valori della x in cui la funzione può assumere massimi o minimi.

$$y' = \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 1)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$$

Ponendo ora $y = 0$ trovo le x in cui ho i punti di massimo e minimo:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ e } x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

Sostituendo tali valori nella funzione da studiare ottengo le y corrispondenti:

$$y_1 = \frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 1}{2 + \sqrt{3} - 2} = 4 + 2\sqrt{3} \cong 7.46$$

Sostituendo $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ ottengo $y_2 = 4 - 2\sqrt{3} \cong 0.54$

Studio il segno della derivata prima:

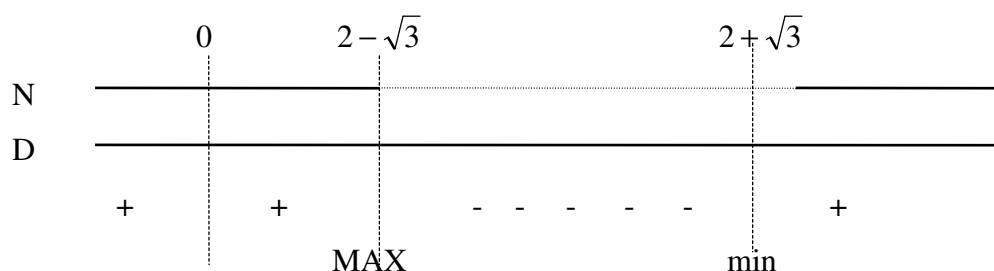
$$y' = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2} > 0$$

Ovviamente il denominatore, essendo un quadrato, è sempre > 0 .

Il denominatore è $x^2 - 4x + 1 > 0$ da cui ottengo $x < 2 - \sqrt{3} \vee x > 2 + \sqrt{3}$

.

Facendo il grafico:



PASSO 6

- **Studio della derivata seconda:** (*Ricerca eventuali flessi*)

Si calcola la derivata seconda, la si pone uguale a zero e si trovano gli eventuali punti di flesso.

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+1)}{(x-2)^4} = \frac{6x-12}{(x-2)^4}$$

Poniamo $y'' = 0$ ed otteniamo : $6x - 12 = 0$ da cui $x = 2$.

Notiamo però che $x = 2$ non fa parte del dominio quindi non esistono flessi.

Studio il segno della derivata seconda ponendola maggiore di zero.

Poiché $y'' > 0$ per $x > 2$, in tale intervallo la concavità è rivolta verso l'alto, per $x < 2$ è invece rivolta verso il basso (essendo $y'' < 0$).

