Lezione 4:

Introduzione al calcolo integrale*

PARTE 1

In questa prima parte si introdurranno i concetti di integrale indefinito, definito e improprio. In particolare si cercherà di trattare in modo intuitivo l'interpretazione dell'integrale definito come problema del calcolo di una area. In tal caso si vedrà, nella seconda parte, che questo problema di area si lega al concetto di probabilità visto nelle lezioni precedenti.
La seconda parte sarà un corollario alla dispensa per la parte della variabili aleatorie continue, distribuzioni di probabilità continue e valore atteso nel continuo. In quella sede si farà inoltre un riepilogo sulle tecniche di integrazione: per sostituzione e per parti.

*Per questa dispensa si è fatto uso dei testi: *Dawkins P., Calculus I, Calculus II*

1 Integrali

1.1 Integrale indefinito

Si consideri una funzione del tipo

$$f(x) = x^4 + 3x - 9$$

la sua derivata sarà $f'(x) = 4x^3 + 3$. Facendo il ragionamento inverso, vogliamo trovare il modo di esprimere $f'(x)$ in termini di $f(x)$. In particolare, la derivata in questione si risolve con la formula generica $x^n \Rightarrow nx^{n-1}$, cioè $x^4 \Rightarrow 4x^{4-1}$. In questo senso, x^4 può essere visto come una derivata di x^5. Il problema è che $x^5 \Rightarrow 5x^4$, che non è uguale a x^4. Ma se si considera $\frac{1}{5}x^5$, allora $\frac{1}{5}x^5 \Rightarrow \frac{5}{5}x^4 = x^4$. Allo stesso modo si ha che $\frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \frac{6}{2}x = 3x$. In poche parole si ha che

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x.$$

Seguendo il ragionamento, derivando $F(x)$ si ottiene

$$F'(x) = x^4 + 3x - 9 = f(x).$$

Sappiamo però che la derivata di una costante $cdx = 0$, così una funzione del tipo

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + 20$$

condurrebbe ugualmente a $F'(x) = f(x)$, come anche

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{38}{25},$$

e così via. Infatti si considera qualsiasi funzione della forma

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + c.$$

Si ha così una prima definizione

*Definizione 1. Data una funzione $f(x)$, una **anti-derivata** di $f(x)$ è una qualsiasi funzione $F(x)$ tale che*

$$F'(x) = f(x).$$

*Se $F(x)$ è una anti-derivata di $f(x)$, allora quella più generale è chiamata **integrale indefinito***

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

dove $\int$ è il simbolo di integrazione, $f(x)$ è l'integranda, x la variabile di integrazione e c la costante di integrazione.

Seguendo il nostro esempio, dalla definizione segue che data una funzione $x^4 + 3x - 9$,

$$\int x^4 + 3x - 9dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + c.$$

Proprietà

i) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ dove k è un qualsiasi numero;

ii) $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$;

iii) $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Abbiamo visto come l'integrale di una potenza può essere risolto

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

e per un numero k

$$\int kdx = kx + c.$$

Inoltre

$$\int e^x dx = e^x + c; \quad \int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c; \quad \int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1} = \ln|x| + c.$$

Esercizi risolti

I:

$$\begin{aligned}\int 5x^3 - 10x^{-6} + 4dx &= 5\left(\frac{1}{4}\right)x^4 - 10\left(\frac{1}{-5}\right)x^{-5} + 4x + c\\ &= \frac{5}{4}x^4 + 2^{-5} + 4x + c\end{aligned}$$

II:

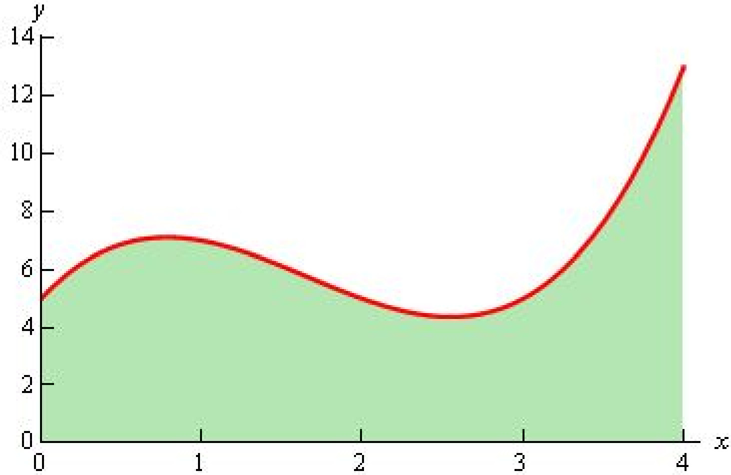
$$\begin{aligned}\int 3\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}}dx &= \int 3x^{\frac{3}{4}} + 7^{-5} + \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}dx\\ &= 3\left(\frac{1}{7/4}\right)x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}x^{-4} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1/2}\right)x^{\frac{1}{2}} + c\\ &= \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + c\end{aligned}$$

1.2 Integrale definito

Per i fini di questa lezione risulta adesso fondamentale comprendere il significato di **integrale definito**, considerando in particolare il *problema dell'area.* Come al solito, partiremo da un esempio concreto per poi generalizzare il problema per strutturare in maniera precisa la definizione generale di integrale definito. Abbiamo una funzione limitata $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$, $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si vuole quindi determinare l'*area* con segno della regione tra la funzione e l'asse delle x. Si riuscirà a descrivere l'area delle regioni positive e negative, approssimando la regione di interesse mediante una unione finita di rettangoli adiacenti fra loro per cui [area= base$\times$altezza]. Bisognerà quindi suddividere l'intervallo $[a, b]$ in più rettangoli.

Si consideri una funzione $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 5$ che vogliamo suddividere in $n = 5$ intervalli, con un'area $[a, b] = [0, 4]$. In generale, si divide quindi l'area in n sottointervalli

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4}{5} = 0.8.$$



Questo significa che ogni sottointervallo si distanzierà di 0.8

$$x_i = 0, 0.8, 1.6, 2.4, 3.2, 4.$$

Dovremo utilizzare la formula [area= base×altezza] cioè

$$A = \sum_i 0.8 \cdot f(x_i)$$

L'area può essere approssimata utilizzando i punti finali di ogni rettangolo che toccano la funzione (Figura 1) L'area sarà quindi

$$A_r = 0.8f(0.8) + 0.8f(1.6) + 0.8f(2.4) + 0.8f(3.2) + 0.8f(4) = 28.96$$

Come si nota, si sovrastimerà l'area. Se invece si utilizzano i punti iniziali (a sinistra) del rettangolo, che toccano la curva in questione (Figura 2), allora l'area sarà

$$A_s = 0.8f(0) + 0.8f(0.8) + 0.8f(1.6) + 0.8f(2.4) + 0.8f(3.2) = 22.56$$

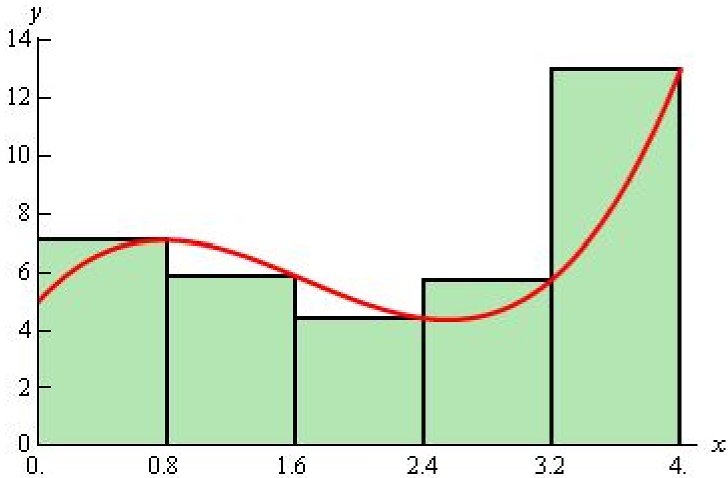


Figura 1: Stima per punti finali di ogni rettangolo

che sottostimerà l'area effettiva.
Una approssimazione migliore potrà essere ricavata utilizzando i punti medi x_i^* degli intervalli (Figura 3)

$$x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

In questo caso si avrà semplicemente che

$$A_m = 0.8f(0.4) + 0.8f(1.2) + 0.8f(2) + 0.8f(2.8) + 0.8f(3.6) = 25.12$$

Si noti che l'area esatta della funzione $f(x)$ in questione è $A = \frac{76}{3} \approx 25.33\bar{3}$. Si noti che $A_r > A_m > A_s$, ed A_m è l'approssimazione più vicina a A.

In Generale Sia una funzione limitata $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ dove $f(x) \geq 0$. Si divida l'area in n sottointervalli

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

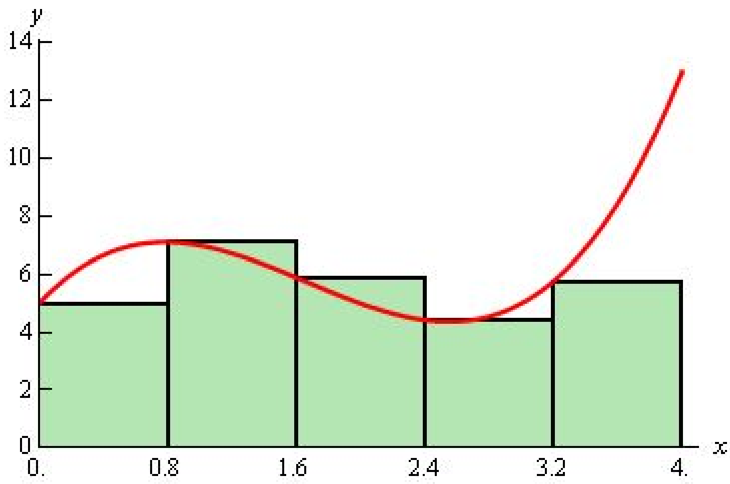


Figura 2: Stima per punti iniziali di ogni rettangolo

per cui

$a = x_0; x_1 = a+\Delta x; x_2 = a+2\Delta x \cdots x_i = a+i\Delta x \cdots x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x; x_n = a+n\Delta x = b$

Ad ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ sceglieremo il punto medio x_i^* per cui l'area sotto la curva (Figura 4) sarà

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_i^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

che è la *sommatoria di Riemann*

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

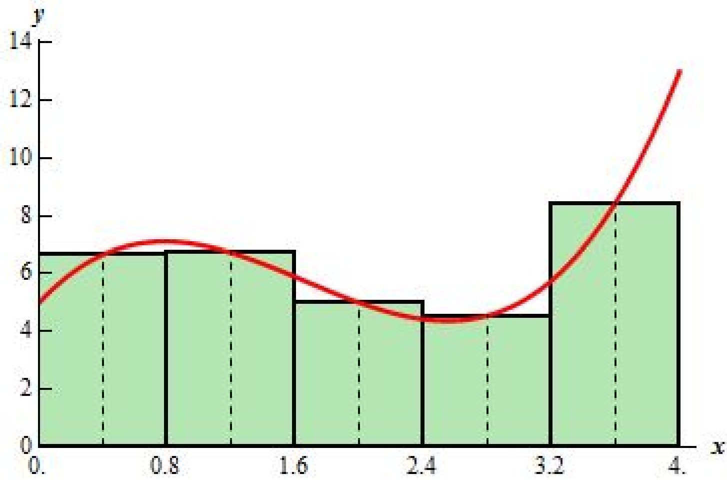


Figura 3: Stima per punti medi di ogni rettangolo

Per ottenere sempre migliori approssimazioni con il metodo dei punti medi, basterà considerare n sempre più grandi, infatti l'area esatta sarà

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Si ha quindi la definizione di integrale definito

*Definizione 2. Data una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$, si divide l'intervallo in n parti di ugual lunghezza Δx; per ogni intervallo si scelga un punto medio x_i^*. L'***integrale definito di** $f(x)$ **in** $[a, b]$ è

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Proprietà

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

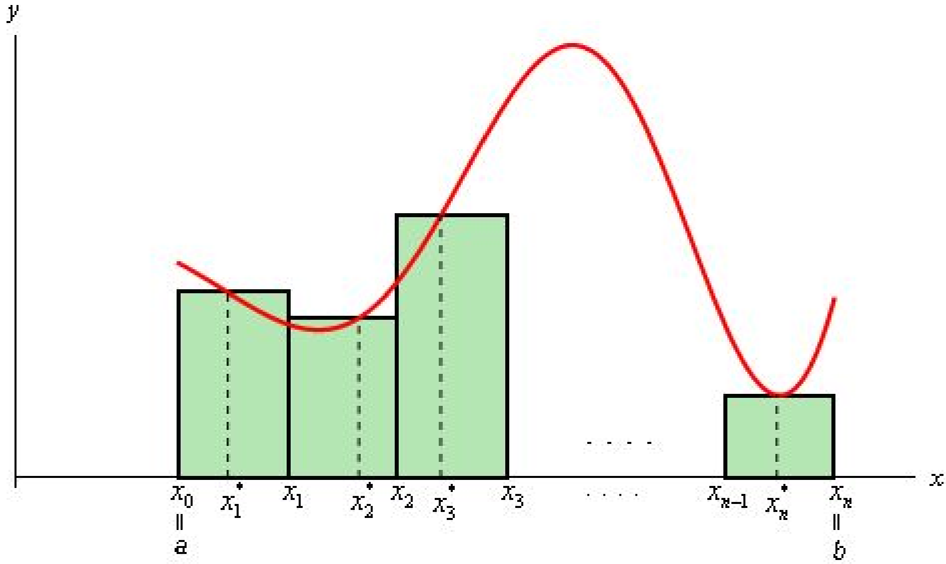


Figura 4: Stima per punti medi generale

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx$

Teorema fondamentale del calcolo integrale Questo teorema può essere diviso in due parti.
La prima parte del teorema fondamentale del calcolo integrale, visto informalmente ad inizio dispensa, ci informa sulla relazione che intercorre fra integrale e derivata, in pratica ci garantisce l'esistenza della primitiva per funzioni continue:

Definizione 3. *Se $f(x)$ è continua e limitata in $[a,b]$, allora*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è continua su $[a,b]$ e differenziabile su (a,b)

$$F'(x) = f(x).$$

La seconda perte del teorema ci aiuta a calcolare gli integrali definiti attraverso l'uso delle primitive (anche questo utilizzato informalmente ad inizio dispensa)

Definizione 4. *Sia $f(x)$ continua e limitata in $[a,b]$ e si supponga che $F(x)$ sia l'antiderivata di $f(x)$, allora*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Si ricordi che si è definito l'integrale indefinito attraverso l'antiderivata, ciò suggerisce che si deve quindi risolvere prima l'integrale indefinito.

Esercizio Svolto

I Risolviamo adesso l'integrale della funzione $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 5$ suddivisa in intervalli ad inizio sezione. In particolare

$$\int_0^4 x^3 - 5x^2 + 6x + 5dx = \int_0^4 x^3dx - \int_0^4 5x^2dx + \int_0^4 6xdx + \int_0^4 5dx$$

Applicando il teorema del calcolo integrale, l'antiderivata di x^3 è $\frac{x^4}{4}$, così

$$\int_0^4 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 64.$$

l'antiderivata di x^2 è $\frac{x^3}{3}$,

$$\int_0^4 -5x^2dx = -\frac{5x^3}{3}\Big|_0^4 = \left(-\frac{5\times 4^3}{3}\right) - \left(-\frac{5\times 0^3}{3}\right) = -\frac{320}{3}.$$

l'antiderivata di x è $\frac{x^2}{2}$

$$\int_0^4 6xdx = 6\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 3x^2\Big|_0^4 = 3 \times 4^2 - 3 \times 0^2 = 48.$$

l'antiderivata di 1 è x, allora

$$5\int_0^4 dx = 5x\Big|_0^4 = 5 \times 4 - 5 \times 0 = 20$$

da cui

$$\int_0^4 x^3 - 5x^2 + 6x + 5dx = 64 + \left(-\frac{320}{3}\right) + 48 + 20 = \frac{76}{3} \approx 25.33\bar{3}$$

1.3 Integrale improprio: Caso di intervalli infiniti

In questa sede ci occuperemo di un importante strumento per la gestione e la risoluzione di problemi in cui si affronteranno variabili aleatorie continue. nei problemi concernenti distribuzioni di probabilità continue spesso si considerano intervalli dove almeno uno degli estremi è infinito. Si capisce quindi il problema nell'usare la computazione precisa utilizzata nel problema di intervalli finiti. Si pensi che la funzione di densità di probabilità ha la proprietà che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

e che una funzione di ripartizione può essere definita usando la funzione di densità come segue

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(x).$$

Si consideri

$$f(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

In questo caso non si può sfruttare il teorema fondamentale del calcolo integrale inserendo direttamente ∞ nella formula per ottenere la soluzione. Per risolvere l'integrale improprio vi sarà bisogno di utilizzare i limiti. Si consideri che l'area sotto $f(x)$ sia $[1, t]$ con $t > 1$ e finito. Allora applicando il teorema, troviamo l'area per $t > 1$, A_t

$$A_t = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x}\bigg|_1^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

Sappiamo che per trovare l'area di $f(x)$ nell'intervallo $[1, \infty]$ possiamo semplicemente risolvere il limite di A_t per t ce va ad infinito

$$A = \lim_{t\to\infty} A_t = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

In generale, si scambia il valore infinito con una variabile t, si procede a calcolare l'integrale e dopo si risolve il limite per t che va ad infinito.

Se il limite esiste ed è un numero finito, allora sono integrali **convergenti**, se invece i limiti associati non esistono o sono infiniti, si chiamano **divergenti**.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x} dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln(x)\bigg|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} (\ln(t) - \ln 1) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

In generale se $a > 0$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

è convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$. Quindi se l'integranda va verso 0 più veloce di $\frac{1}{x}$, allora probabilmente convergerà.

Proprietà

- Se $\int_a^t f(x)dx$ esiste per ogni $t > a$, allora

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

- Se $\int_t^b f(x)dx$ esiste per ogni $t < b$, allora

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

- Se $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ e $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ sono entrambi convergenti, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$