Indipendenza

Università Mediterranea di Reggio Calabria

1 Indipendenza tra due eventi

Quando si è introdotta la probabilità condizionata, si è visto che $P(A \mid B)$ esprime l'informazione (parziale) contenuta nell'evento B circa l'accadimento dell'evento A. Adesso si è interessati invece a capire quando l'informazione contenuta in B non ha alcun effetto né legame con la probabilità che l'evento A si verifichi, cioè quando A e B sono *indipendenti*:

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Considerando questa formula che esprime l'indipendenza e sapendo che

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{con} \quad P(B) > 0.$$

allora

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

da cui

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Intuitivamente, l'indipendenza si ha quando due eventi sono prodotti da due diversi processi fisici che non interferiscono fra loro. Vi è comunque una impossibilità nel rappresentare l'indipendenza soltanto tramite diagrammi di Venn. Si pensi a due eventi disgiunti $A \cap B = \emptyset$ come in Figura 1, si è comunemente portati a credere che questo sia un caso di indipendenza: non è così, anzi due eventi disgiunti non sono *mai* indipendenti. Infatti se $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ e

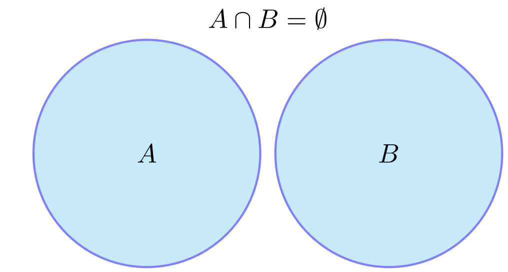

Figura 1: Eventi disgiunti

$P(A \cap B) = \emptyset$ per la definizione di disgiunzione, allora $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, non soddisfacendo la definizione di indipendenza. Sempre riguardo ai diagrammi di Venn, si pensi invece alla intersezione di due eventi. Bisogna procedere al test

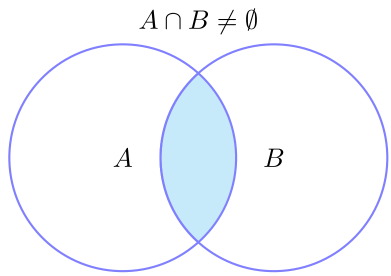

Figura 2: Intersezione

di indipendenza per capire se $P(A)P(B)$ hanno la stessa probabilità di $P(A \cap B)$. A differenza di due insiemi disgiunti, in questo caso gli eventi possono essere indipendenti, oppure dipendenti fra loro. Non basta quindi disegnare diagrammi di Venn per capire se, in probabilità, gli eventi siano fra loro dipendenti o meno.

Esempio si lancino due monete non truccate, che possono produrre due possibili eventi ciascuna: T =testa, C =croce. In totale sia avranno quindi 4 eventi equiprobabili.

A è l'evento che al *primo* lancio uscirà T

B è l'evento che al *secondo* lancio uscirà C.

Si ha così che
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4},$$
e
$$P(A) = P\{(T,T);(T,C)\} = \frac{1}{2}$$
mentre
$$P(B) = P\{(T,C);(C,C)\} = \frac{1}{2}.$$
I due eventi sono *indipendenti.* Infatti
$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

2 Indipendenza Condizionale

Dato un terzo evento C, due eventi A e B sono chiamati *condizionalmente indipendenti* se
$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C). \tag{1}$$

Infatti
$$\begin{aligned} P(A \cap B \mid C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C)P(B \mid C)P(A \mid B \cap C)}{P(C)} \\ &= P(B \mid C)P(A \mid B \cap C). \end{aligned}$$

Considerando l'equazione (1), si ha che

$$P(A \mid C)P(B \mid C) = P(B \mid C)P(A \mid B \cap C)$$

da cui

$$P(A \mid B \cap C) = P(A \mid C).$$

Questo significa che se si viene a conoscenza che C è accaduto, la conoscenza addizionale che anche B sia accaduto, non altera la probabilità di A. Una differenza importante rispetto alla probabilità condizionata, è che l'indipendenza di due eventi A e B non implica che questi siano condizionalmente indipendenti. Infatti, osservando la Figura 3 si nota che se si prende in considerazione il

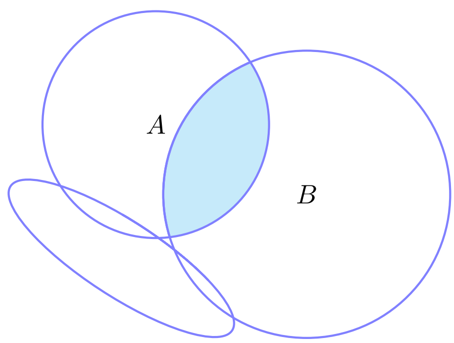

Figura 3: Intersezione di un terzo evento

terzo evento, allora la conoscenza del suo accadimento produce due sottoinsiemi disgiunti. Precisamente le aree in cui il terzo evento interseca A e B. Sappiamo che due insiemi disgiunti sono dipendenti, così da una indipendenza fra A e B si passa ad una loro dipendenza sotto condizione che un terzo evento, che interseca entrambi, si sia verificato.

Esempio Una moneta viene lanciata due volte consecutive. Ogni lancio ha una equiprobabilità che si verifichi T (testa) o $\mathcal{C}$ (croce). Si noti che anche qui vi sono 4 possibili eventi, ma una moneta.

A è l'evento: primo lancio T;

B è l'evento: secondo lancio $\mathcal{C}$;

C è l'evento: i due lanci consecutivi hanno risultati diversi.

si ha che $P(A \mid C) = \frac{1}{2}$ e $P(B \mid C) = \frac{1}{2}$, ma $P(A \cap B \mid C) = \emptyset$. da ciò deriva che

$$P(A \cap B \mid C) \neq P(A \mid C)P(B \mid C),$$

Verificatisi la condizione C, i due eventi A e B non sono più indipendenti fra loro.

Esercizi

- Si provi che se A e B sono indipendenti, allora anche A e B^c lo sono.
  Suggerimento: $A \cap B$ e $A \cap B^c$ sono mutuamente esclusivi.

- Si supponga si lancino due dadi non truccati. Da cui

  A è l'evento: la somma dei due numeri usciti nel lancio dei due dadi è 6;

  B è l'evento: al primo dado si verifica un 4.

  I due lanci sono indipendenti? Motivare la risposta.
  Suggerimento: c'è qualcosa che non deve verificarsi al primo lancio?
  [*Risultato*: non sono indipendenti]

- Continuando l'esercizio precendente, non si consideri più A, si consideri invece l'evento $C = \{\text{la somma dei due dadi è } 7\}$. I due eventi C e B sono indipendenti?
  [*Risultato*: sono indipendenti]