Lezione 5:

Introduzione al calcolo integrale*

PARTE 2

1 Integrazione per Sostituzione

Utilizzando i metodi esposti nella Parte 1 di questa dispensa, non saremmo in grado di risolvere un integrale del tipo

$$\int 18x^2 \sqrt[4]{6x^3+5}dx.$$

In questo integrale è però evidente la presenza di una funzione insieme alla sua derivata (a meno di fattori costanti). Infatti se scriviamo

$$u = 6x^3 + 5$$

e calcoliamo la derivata

$$du = 18x^2 dx$$

*Per questa dispensa si è fatto uso dei testi: *Dawkins P., Calculus I, Calculus II* allora l'integrale si può riscrivere

$$\begin{aligned}\int 18x^2\sqrt[4]{6x^3+5}dx &= \int (6x^3+5)^{\frac{1}{4}}(18x^2dx)\\ &= \int u^{\frac{1}{4}}du\\ &= \frac{4}{5}u^{\frac{5}{4}}+c\\ &= \frac{4}{5}(6x^3+5)^{\frac{5}{4}}+c\end{aligned}$$

In generale, la regola della sostituzione è definita come

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du, \quad \text{dove} \;\; u = g(x).$$

Si noti come in genere ogni x (incluso dx) deve essere sostituito dalla u e du. Se avanza una x allora è un campanello di allarme per capire che tale integrale non può essere risolto per sostituzione (c'è però almeno un caso in cui questo può accadere anche se la procedura è corretta). Facciamo un altro esempio

$$\int 3(8x-1)e^{4x^2-x}dx.$$

Anche in questo semplice esempio risulta chiara la forma della definizione generale, quindi si calcola facilmente

$$u = 4x^2 - x$$

da cui, derivando

$$du = (8x-1)dx.$$

Rimane il 3, ma questa è una costante è può essere messa fuori dall'integrale

$$\begin{aligned}\int 3(8x-1)e^{4x^2-x}dx &= 3\int e^u du\\ &= 3e^u + c\\ &= 3e^{4x^2-x}+c.\end{aligned}$$

Vediamo adesso un caso più particolare

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Applicando le regole di sostituzione

$$u = 1 - 4x^2 \quad du = -8xdx,$$

anche se non vi è nessun -8 difronte la x. In questo caso si fa una piccola manipolazione in più, cioè

$$xdx = -\frac{1}{8}du,$$

per cui

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx &= x(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}} + c \\ &= -\frac{1}{4}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} + c. \end{aligned}$$

Vediamo un altro esempio

$$\int \frac{3}{5x+4}dx$$

Se differenziamo il denominatore ricaviamo una costante; si noti che anche al numeratore è presente solo una costante. Questa è, in generale, una buona indicazione per usare il denominatore per la sostituzione

$$u = 5x + 4 \quad du = 5dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5}du.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{5x+4}dx &= \frac{3}{5}\int \frac{1}{u}du \\ &= \frac{3}{5}\ln|u| + c \\ &= \frac{3}{5}\ln|5x+4| + c.\end{aligned}$$

Esercizio Si risolva il seguente integrale

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx$$

Risultato: $\ln|\ln x| + c$

1.1 Con integrali definiti

Sappiamo che bisogna prima trovare l'integrale indefinito, per poi passare al calcolo del suo valore in un'area definita. Il problema è che il metodo della sostituzione presuppone che tutti i termini in x debbano essere sostituiti in termini in u in tutto l'integrale, quando si dice tutti, si intendono proprio tutti i termini in x, compresi gli estremi dell'intervallo. Rispetto alla regola della sostituzione applicata a integrali indefiniti, qui bisogna fare un passo in più, *convertendo* gli estremi collegati all'integrale in x, con quelli collegati all'integrale in u. Facciamo subito un esempio pratico:

$$\int_{-2}^{0} 2x^2\sqrt{1-4x^3}dx$$

da cui, procedendo come se l'integrale fosse indefinito

$$u = 1-4x^3 \quad du = -12x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{12}du.$$

Dobbiamo adesso considerare il nuovo step per trovare il valore dell'integrale definito

$$x = -2 \quad \Rightarrow u = 1 - 4(-2)^3 = 33$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = 1 - 4(0)^3 = 1.$$

Questi saranno i nuovi estremi convertiti nell'integrale in u. Si procede come segue

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} 2x^2 \sqrt{1-4x^3}dx &= -\frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{33}^{1} \\ &= -\frac{1}{9} - \Big(- \frac{1}{9}(33)^{\frac{3}{2}}\Big) \\ &= \frac{1}{9}(33\sqrt{33} - 1).\end{aligned}$$

Esercizi Risolvere i seguenti integrali

$$\int_{-1}^{5} (1+x)(2x+x^2)^5 dx$$

Risultato: 153.188.802

$$\int_{0}^{1} 3(4x+x^4)(10x^2+x^5-2)^6 dx$$

Risultato: $\frac{14.349.291}{35}$

2 Integrazione per Parti

Si sa che il seguente integrale può essere facilmente svolto con il metodo della sostituzione

$$\int xe^{x^2} dx,$$

infatti sostituendo

$$u = x^2 \quad du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du,$$

da cui

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$$

Supponiamo si voglia calcolare il seguente integrale

$$\int xe^{6x}dx,$$

come si può notare (fai una prova) non c'è nessuna sostituzione che si possa fare per risolvere l'integrale. Si dovrà utilizzare l'*integrazione per parti*. Per quanto riguarda le derivate, sappiamo la regola del prodotto

$$(fg)' = f'g + fg',$$

integrando le due parti

$$\int (fg)'dx = \int f'g + fg'dx$$

da cui

$$fg = \int f'gdx + \int fg'dx.$$

La formula della integrazione per parti è quindi

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx.$$

Per semplificare, si utilizzino le seguenti sostituzioni

$$u = f(x) \quad v = g(x)$$

$$du = f'(x) \quad dv = g'(x)dx,$$

da cui si ricava la formula più conosciuta

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Per utilizzare la formula si devono identificare u e dv, calcolare du e v e quindi usare la formula. Si noti che trovare v è molto semplice, basta integrare dv

$$v = \int dv.$$

Risolviamo quindi l'integrale visto all'inizio della sezione

$$\int xe^{6x}dx.$$

Si ricordi che qualsiasi funzione che si sceglierà come u sarà oggetto del differenziale du. Sembra che x sia una buona scelta così da eliminarla.

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{6x}dx \text{ da cui} \Rightarrow v = \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x}.$$

L'integrale è quindi

$$\begin{aligned}\int xe^{6x}dx &= \frac{x}{6}e^{6x} - \int \frac{1}{6}e^{6x}dx \\ &= \frac{x}{6}e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + c.\end{aligned}$$

L'integrazione per parti per integrali definiti è

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Riprendendo l'integrale precedente nell'intervallo $[-1.2]$

$$\int_{-1}^{2} xe^{6x}dx,$$

allora

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} xe^{6x}dx &= \frac{x}{6}e^{6x}\bigg|_{-1}^{2} - \int \frac{1}{6}e^{6x}dx \\ &= \frac{x}{6}e^{6x}\bigg|_{-1}^{2} - \frac{1}{36}e^{6x}\bigg|_{-1}^{2} \\ &= \frac{11}{36}e^{12} + \frac{7}{36}e^{-6}.\end{aligned}$$