Esercizi Svolti

Lezione 2

Università Mediterranea di Reggio Calabria

Disposizioni (orinate, **senza** ripetizione) $n \geqslant 1$ e $1 \leqslant k \leqslant n$

$$D_{n,k} = \prod_{i=1}^{k} n - i + 1 = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le *permutazioni* sono un caso particolare di disposizione quando $n = k$.

$$P_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} n - i + 1 = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Disposizioni (orinate, **con** ripetizione) $n \geqslant 1$ e $1 \leqslant k \leqslant n$

$$D^{*}_{n,k} = n^k$$

Combinaizoni (**no** ordinate, **no** ripetizione) $n \geqslant 1$ e $1 \leqslant k \leqslant n$

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

si noti che

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$$

Esercizi

1) *Quanti possibili anagrammi si possono determinare (anche senza significato) della parola PANE?*

$$P_4 = 4! = 24$$

Mentre gli anagrammi di OTTO si calcoleranno con permutazioni di n lettere di cui 2 sono ripetute due volte:

$$D_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

stessa cosa con

$$D_{4,2} = 3 \cdot 2$$

2) *Nel gioco del poker, a un giocatore vengono assegnate* 5 *carte prese a caso da un mazzo da* 52*. Quante sono le possibili combinazioni di carte che un giocatore può avere in mano?*

L'ordine delle carte non ha importanza. Il gioco si basa sui tipi di punti che si possono ottenere. Si tratta di combinazioni di 52 elementi di classe 5, cioè

$$C_{52,5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2.598.960$$

3) (Disposizioni con ripetizione) *Un'urna contiene* 20 *palline numerate da* 1 *a* 20*. Si eseguono* 5 *estrazioni rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle* 5 *estrazioni? Quanti sono gli allineamenti in cui non compare il numero* 20*?*

Si ha che $N = \{1, \cdot, 20\}$, da cui per $n = 20$ e $k = 5$, la risposta alla prima domanda sarà

$$D^*_{20,5} = 20^5.$$

Per la seconda risposta $N' = \{1, \ldots, 19\}$ così

$$D^*_{19,5} = 19^5.$$

4) (Disposizioni senza ripetizione) *Un'urna condiene* 20 *palline numerate da* 1 *a* 20. *Si eseguono senza estrazioni senza ripetizione. Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle* 5 *estrazioni? E quanti quelli in cui non compare il numero* 20*?*

   Si ha che $n = 20$ e $k = 5$. Poiché si rimettono le palline nell'urna, la prima risposta sarà

$$D_{20,5} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$$

   che è la stessa cosa di

$$D_{20,5} = \frac{20!}{15!}.$$

   Per la seconda avremo

$$D_{19,5} = 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$$

   che è uguale a

$$D_{19,5} = \frac{19!}{14!}.$$

5) (Combinazioni) *Si vuole costituire un comitato id* 5 *membri sceltri tra* 10 *persone. Quanti differenti comitati si possono formare?*

   Ognuna delle persone può apparire al più una volta nel comitato e l'ordine non conta

$$C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

   che è la stessa cosa se calcolato come

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!}$$

6) (Combinazioni) *Un'urna contiene* 100 *palline, di cui* 30 *sono bianche e* 70 *sono rosse. Si vuole conoscere la probabilità di estrarre* 5 *palline bianche in una successione di* 10 *estrazioni senza ripetizione.*

L'ordine non conta, quindi si può pensare che la cardinalità dello spazio dei risultati possibili sia dato da

$$C_{100,10}\binom{100}{10}.$$

Vi sono poi 30 palline bianche da cui possiamo estrarne 5 così possono essere selezionate in

$$C_{30,5} = \binom{30}{5}$$

modi diversi. Stessa cosa per le 70 palline rosse

$$C_{70,5} = \binom{70}{5}.$$

Il numero di allineamenti che contengono 5 palline bianche è $\binom{30}{5} \cdot \binom{70}{5}$, così la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{30}{5} \cdot \binom{70}{5}}{\binom{100}{10}}.$$

7) (Combinazioni) *Da una lista di* 10 *ragazzi e* 7 *ragazze, si deve formare un comitato comprendente* 5 *ragazzi e* 3 *ragazze. Quanti possibili comitati si possono formare?*

Possiamo scegliere i ragazzi in $\binom{10}{5}$ modi diversi e per ognuno di questi modi possiamo scegliere le ragazze in $\binom{7}{3}$ modi. Il numero richiesto è

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{7}{3}.$$

8) *In quanti modi posso assegnare* 20 *impiegati a* 4 *uffici se ad ogni ufficio devono essere assegnati* 5 *impiegati?*

Posso assegnare ogni impiegato ad una delle 20 sedie disponibili

$$P_{20} = 20!$$

Per ogni ufficio le permutazioni equivalenti sono

$$D_{5,5} = 5!$$

perché ci sono 5 posti in ogni ufficio ($k = 4$ uffici). Il numero richiesto è

$$\frac{20!}{(5!)^4}$$

9) (Disposizioni) *Quanti codici si possono formare utilizzando tre cifre e due lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere), se le lettere occupano le prime due posizioni, considerando che cifre e lettere possono ripetersi? Quanti condici presentano qualche ripetizione?*
Per la prima domanda si usano le disposizioni con ripetizione, quindi

$$D^*_{26,2} \cdot D^*_{10,3} = 26^2 \cdot 10^3.$$

Per il secondo quesito, il numero di codici che non presentano ripetizioni è

$$D_{26,2} \cdot D_{10,3} = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8.$$

I codici che presentano qualche ripetizione sono

$$D^*_{26,2} \cdot D^*_{10,3} - D_{26,2} \cdot D_{10,3}.$$

10) *Si considerino* 5 *azionisti di una società per azioni, ciascuno con il* 20% *delle azioni. Determinare il numero totale di coalizioni che garantiscono la maggioranza nella società.*

La maggioranza si ha con una unione di $n \geqslant 3$ di azionisti. Visto che gli azionisti sono 5, si possono formare tre coalizioni di 3, 4 o 5 azionisti

$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10; \quad C_{5,4} = \binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5; \quad C_{5,5} = \binom{5}{5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Ci sono in tutto 16 coalizioni di maggioranz

$$C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 16.$$

Si noti che non si ha una addizione perché gli eventi non sono contemporanei, o capita uno o capita l'altro, sono esclusivi.