Teoria dei Giochi

Massimiliano Ferrara e Bruno Antonio Pansera

Questa è la DEDICA*:*
ognuno può scrivere quello che vuole,
anche nulla …

Indice

Introduzione

Per effettuare un'analisi che sia completa ed esaustiva degli aspetti teorici fondamentali della teoria matematica dell'equilibrio economico generale, non si possono tralasciare gli indubbi legami che esistono tra tale teoria e la teoria dei giochi cooperativi. Nella letteratura economico-matamatica é fondamentale l'originale contributo scientifico offerto in tale direzione da Shubik nel 1959, il quale nell'analisi di mercato evidenzió con precisione il legame esistente tra le curve dei contratti di Edgeworth e la nozione di *core* (ossia di nucleo del gioco) della teoria dei giochi, sviluppata da Shapley (1953) e Gillies (1953). Gli stessi Shapley e Subik nel 1969 formalizzarono modelli di equilibrio economico generale in termini di giochi (cooperativi di mercato). Nel 1963 Debreu e Scarf hanno fornito la dimostrazione che per larghe economie, l'equilibrio walrasiano di concorrenza tende a coincidere con il *core*. L'apporto fondamentale fu dato peró da Debreu e Arrow nel 1952 e nel 1954, definito in letteratura, come *approccio dell'economia asratta* e di cui in queste pagine daró una formalizzazione, seguendo un percorso scientifico che porta all'utilizzo di strumenti propri della Teoria dei Giochi.

Consideriamo il *modello walrasiano di puro scambio* con i seguenti elementi:

- $N = \{1, \cdots, n\}$ sia l'insieme dei consumatori;

- $w^i \in \mathbb{R}^m_+$ sia il vettore delle dotazioni iniziali dei beni di consumo del soggetto i, le cui componenti sono le quantitá dei beni;

- $p \in \mathbb{R}_+^m$ sia il vettore dei prezzi con i quali si scambiano i beni negli m mercati esistenti; le sue componenti $(p_1, \ldots, p_m)$ sono tutte non negative;

- $x^i \in X^i \subset \mathbb{R}_+^m$ sia il vettore delle quantitá finali dei beni di consumo demandate da i e X^i, l'insieme delle possibilitá di consumo per i.

Le componenti dei vettori w^i e x^i sono positive e non tutte nulle, e tali da verificare per ogni vettore dei prezzi p il vincolo di bilancio:

$$\langle pw^i \rangle = \langle px^i \rangle \ \ \forall i \in N$$

ovvero i due prodotti scalari tra vettori, e quindi somme di prodotti tra componenti corrispondenti, coincidono. Inoltre, si sa che i prezzi che si formano sul mercato devono verificare la seguente relazione:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1;$$

ne segue che lo spazio dei prezzi Φ é un *simplesso di dimensione* $m - 1$ *di* $\mathbb{R}_+^m$.

Definizione 1. Il vettore $p^\star$ dicesi di equilibrio se si verifica:

$$\sum_{i \in N} w^i = \sum_{i \in N} x^{i\star}$$

cioé la somma delle dotazioni iniziali di ciascun bene é uguale a quella delle quantitá finali dello stesso bene, indicando con $x^{i\star}$ il paniere che massimilizza l'utilitá di ogni $i \in N$.

Osservazione 1. Nel seguito si consideranno funzioni utilitá $u(x)$ continue, monotone crescenti e concave.

Il modello che stiamo presentando ammetterá soluzione di equilibrio che conseguono al problema di massimo vincolato del consumatore i, $\forall i \in N$, cosí formalizzato:

$$\max u^i(x^i) \ \text{ s.v } \ x^i \in B(pw^i) \tag{1}$$

essendo $B(pw^i) = \{x^i \in X^i : px^i \leq pw^i\} \subset X^i$, ossia l'insieme dei panieri compatibili con il vincolo di bilancio in corrispondenza di p e di quello di dotazione w^i. Risolvendo il problema (2) si ottiene la quantitá ottimale $x^{i\star}$ demandata da i come funzione di p e di w^i

$$x^i = f^i(p, w^i)$$

denominata *funzione di domanda di i*. Da ció consegue anche la validitá della *legge di Walras* ossia:

$$p(w - x) = 0$$

dove $x = (x^1, \ldots, x^i, \ldots x^n)$ é il vettore delle scelte di ogni i per tutti i beni esistenti in corrispondenza di p. Possiamo adesso fornire la definizione di *equilibrio* del sistema economico.

Definizione 2. Un *equilibrio di scambio* per il sistema in esame 'e un insieme di $n + 1$ vettori $(x^{1\star}, \ldots, x^{n\star}, p^\star)$ che soddisfano il problema di massimo vincolato e tale che si abbia:

$$\sum_{i=1}^{n} w_j^i = \sum_{i=1}^{n} x_j^{i\star} \ \ \forall j = 1, \ldots, m$$

Un siffatto sistema di $n+1$ vettori, che definisce l'equilibrio, appartiene all'insieme $\mathcal{E} = \{(x, p)|x \in X, p \in \Phi\} = X \times \Phi$ essendo $x = (x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \in X = X^1 \times \ldots X^n \subset \mathbb{R}_+^{mn}$. Tale insieme $\mathcal{E}$ include tutti i possibili mercati (anche quelli in cui non vi é equilibrio) si basa sull'importante definizione di *economia astratta* (Arrow-Debreu 1952-54).

Definizione 3. Un'economia é definita da una coppia $e(w, f)$ i cui elementi sono i vettori $w \in \Omega \subset \mathbb{R}_+^{mn}$, dotazioni di tutti i beni di ogni i, ed il vettore f le cui componenti sono le n funzioni di domanda degli n soggetti operanti nel sistema, ciascuna definita da $\Omega \times \Phi$ in $\mathbb{R}_+^m$ e tali da verificare le leggi di Walras.

Facendo variare w e f, soddisfabdo le leggi di Walras, si individuano tutte le economie possibili, raccolte in un insieme E, definito *spazio delle economie astratte*. Ogni teoria dell'equilibrio economico generale stabilisce una corrispondenza ϕ_E tra i due spazi (E ed $\mathcal{E}$) associnado ad ogni economia $e \in E$ un sottoinsieme $\mathcal{E}^\star \subseteq \mathcal{E}$ i cui elementi sono stati di equilibrio $(x^\star, p^\star)$. L'operatore ϕ_E é del tutto equivalente all'operatore di Walras $w : w \to (p, w)$, xon p di equilibrio per l'economia caratterizzata da w. Ponendo $e = (w, f)$ ed $e' = (w', f')$ graficamente avremo:

INSERIRE GRAFICO

Un generico stato di equilibrio $(x^\star p^\star) \in \mathcal{E}$ puó interpretarsi come un equilibrio di un gioco generalizzato. Ricordiamo la definizione di gioco generalizzato:

Definizione 4. Un *gioco generalizzato* Γ_g consiste in:

1. un insieme di giocatori $N = \{1, \ldots, n\}$;
2. un insieme di strategie $S^I \subset \mathbb{R}^n, \ \forall i$;
3. una funzione di pay-off $u^i(s), \ \forall i$, con $s = (s^1, \ldots, s^n) \in S$ essendo $S = \prod_{i=1}^n S^i$;
4. una funzione $\varphi^i, \ \forall i$, che associa ad ogni n-pla di strategie degli altri giocatori un sottinsieme non vuoto dell'insieme delle strategie proprie, che risulta sottodominio ammissibile per la sua funzione di pagamento:

$$\varphi^i : S^1 \times \ldots \times S^{i-1} \times S^{i+1} \times \ldots \times S^n \to 2^{S^i}$$

dove 2^{s^i} indica l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di S^i.

consumi possibili ed il simplesso dei prezzi:

$$u(x^i) = u^i(x^1, \ldots x^n, p), \ \ \forall p \in \Phi$$
$$u^{n+1}(x^1, \ldots x^n, p) = \sum_{j=1}^m p_j \min[(w_j^{n+1} - x_i^{n+1}), 0]$$

con $w_j^{n+1} = \sum_{i=1}^n w_j^n$ e $x_j^{n+1} = \sum_{i=1}^n x_j^i$, con $j = 1, \ldots, m$.

- φ^i, $i = 1, \ldots, n$, é una corrispondenza che associa ad ogni n-pla di strategie di consumo $(x^1, \ldots, x^n)$ l'insieme $B(p, w^i) \subset X^i$;
- φ^{n+1} é una corrispondenza che associa ad ogni n-pla di strategie $(x^1, \ldots, x^n)$ l'intero simplesso dei prezzi Φ.

Allora ogni equilibrio di scambio é un punto di equilibrio di Γ_g e viceversa.

Dimostrazione. (Teorema **??**) Proviamo dapprima l'equivalenza tra le condizioni di equilibrio di puro scambio e quelle di equilibrio del gioco generalizzato, cioé:

$$\begin{cases} \max_{x^i \in B(p,w^i)} u^i(x^i) \\ \sum_{i=1}^n w_j^i = \sum_{i=1}^n x_j^{i\star}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{x^i \in B(p,w^i), p \in \Phi} u^i(x^1, \ldots, x^n, p) \quad \forall i \in N \\ \max_{p \in \Phi} u^{n+1}(x^1, \ldots, x^n, p). \end{cases}$$

□

Il primo medello come si puó facilemnte evincere é di tipo walrasiano. L'equivalenza tra le prime due condizioni é immediata.Per dimostrare l'equivalenza tra le seconde consideriamo che $\forall j = 1, \ldots, m$

$$\sum_{i=1}^n w_j^i = \sum_{i=1}^n x_j^{i\star} \Leftrightarrow (w_j^{n+1} - x_j^{n+1}\star) = 0$$

inoltre

$$(w_j^{n+1} - x_j^{n+1)star} = 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow u^{n+1}(x^{1\star}, \ldots x^{(n+1)\star}, p) = 0$$

infine

$$u^{n+1}(x^{1\star}, \ldots x^{(n+1)\star}) \leq u^{n+1}(x^{1\star}, \ldots x^{(n+1)\star}, p) \;\; \forall p \in \Phi$$

perché il primo membro é non positivo $\forall p \in \Phi$ e il secondo é coincidente con lo zero. Questa disuguaglianzaci porta ad asserire che $u^{n+1}(\cdot)$ é il massimo valore della funzione nel simplesso Φ.

La teoria dei giochi (da questo momento T.G.) é quella branca delle scienze matematiche applicate che si propone di studiare il comportamento economicamente razionale degli operatori che si confrontono in modo continuo nel mondo, spazio economico questo, nel quale esistono innumerevoli vincoli che di fatto condizionano in modo marcato le scelte alle quali sono chiamati gli stessi operatori. Scopo della T.G. é quello di configurare soluzioni a queste forme di conflitto di interessi contrapposti esistenti sul mercato. Per cercare di fare ció gli analisti economici elaborano modelli di gioco, i quali possono essere di due categorie:

1. Modelli di Gioco Cooperativo;

2. Modelli di Gioco Non-Cooperativo;

Si ricorre alla prima categoria di modello quando i vari agenti economici coinvolti nello stsso possono giungere ad un accordo coalizzante. In questo caso l'obiettivo di fondo diventa il conseguimento del miglior risultato possibile per tutti i partecipantiall'accordo considerati. Se, al contrario, ciascun agente cerca di prevalere sull'altro al fine di ottenere un risultato che sia massimizzante degli obiettivi personali, si configureranno modelli appartenenti alla seconda categoria.

La T.G. é stata *ab origine* elaborata dal grande matematico von Neumann sin dal 1928, il quale successivamente grazie anche all'apporto scientifico di Morgenstern (nel 1944) che ha sviluppato le applicazioni della stessa in campo economico e sociale. Le prime modellizzazioni applicative di questa branca di studio si sono avute nell'ambito della concorrenza imperfetta (oligopolio), in un secondo momento si é giunti alla dimostrazione che nel caso di economie "molto grandi" l'equilibrio walrasiano tende a coincidere con il nucleo (questo risultato centrale é dovuto a Debren-Scorf nel 1963) che rappresenta l'estensione del concetto di soluzione di equilibrio al caso di giochi cooperativi. L'approccio cooperativo, in termini di T.G., all'equilibrio generale attraverso anche ulteriori e cospicui contributi (Shubik nel 1953, Shapey-Shubik nel 1969) appare oramai da molto tempo definito in modo sistematico. Ecco perché da un punto di vista scientifico, i questi ultimi anni, si sia rivolta particolare attenzione all'approccio non cooperativo fino ad indicarlo come fondamento alla Courmot della teoria dell'equilibrio walrasiano (questo risultato é dovuto a Mas-Colell). Partendo da queste considerazioni storico-introduttive passiamo all'analisi delle diverse tipologie di gioco rientranti nell'ambito dell'approccio non cooperativo. La prima trattazione sistematica di gioco non cooperativo é dovuta a Nash nel 1950 e nel '51 il quale introdusse la definizione e dimostró l'esistenza di un equilibrio per n giocatori. Questo risultato fondamentale trova frequenti applicazioni nella teoria dell'equilibrio economico generale e per lo studio di problemi rientranti nella teoria dell'oligopolio. La caratteristica fondamentale dei giochi non cooperativi consiste nel fatto che i giocatori (agenti) non possono definire tra di loro accordi attraverso cui giungere ad una cooperazione. Questa costituisce la regola principale del gioco. Un'importante applicazione di questa é che i giocatori sono indotti ad operare in generale con interessi non coincidenti. Avendo considerato il conflitto di interessi come la caratteristica fondamentale del gioco non cooperativo é inutile rilevare che nel caso in cui tale contesto di interessi sia massimo, ovvero gli interessi sono esattamente contrapposti, si parla in questo caso di gioco strettamente non cooperativo (o competitivo). Naturalmente questa situazione puó verificarsi solo nel caso limite di due soli agenti (esempio tipico di duopolio). Diamo la prima definizione:

Definizione 5. Un gioco si dice *strettamente competitivo* se vi partecipano due giocatori e , per ogni coppia di possibili risultati u_1 e u_2, si ha che se il giocatore 1 preferisce il risultato u_1 al risultato u_2, allora il giocatore 2 preferisce u_2 ad u_1.

Una sottoclasse di giochi strettamente competitivi é rappresentata dai giochi a *somma zero* (o a *somma nulla*).

Definizione 6. Un gioco a due persone a *somma zero* é tale che $n = 2$ e per ogni coppia di decisioni prese separatamente dai partecipanti la somma algebrica dei risulati é nulla.

Indicando con X_1 e X_2 l'insieme delle possibili strategie dei due giocatori ed introducendo una funzione di utilitá del tipo $u : X \to \mathbb{R}$ scelta in modo che si possa sempre stabilire un raking di scelte:

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow u(x_1) \succ u(x_2)$$

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow u(x_1) = u(x_2)$$

con $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Nel caso di un gioco a somma nulla avremo:

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = 0 \;\; \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

dove con u_1 si indica la funzione di utilitá del giocatore 1 e con u_2 la funzione di utilitá del giocatore 2. Ne consegue che ogni gioco a due persone (cioé $n = 2$) a somma nulla con risultati diversi da zero per entrambi i giocatori (ricordiamo che i risultati sono espressi in termini di utilitá cardinale delle scelte strategiche $u(x)$ con $x \in X$) é sempre un gioco strettamente competitivo, essendo i risultati spettanti ai due giocatori completamente opposti, qualunque siano le loro decisioni. Se l'intensitá del contrasto di interessi tra i giocatori non é massima si individuano giochi non cooperativi a somma non zero con un numero di agenti giocatori $n \geq 2$. I giochi ad n persone si distinguono in giochi a somma costante e a somma non costante.

Definizione 7. Un gioco a n persone ($n \geq 2$) a *somma (non) costante* é tale che, per ogni n-pla di decisioni prese separatamente dai partecipanti, la somma algebrica degli n risultati é (non) costante e diversa da zero.

I giochi a somma zero ad n persone si possono definire come caso particolare di quelli a somma costante.

0.1 Giochi in forma strategica

Per meglio focalizzare il concetto di gioco non cooperativo introduciamo propedeuticamente i concetti di gioco in forma estesa e di giocoin forma strategica. Si parla di *gioco in forma estesa* (o *ad albero*) quando vengono indicate, con dei grafici appunto a forma di albero, tutte le mosse compiute da ciascun giocatore. Si parla di *gioco in forma strategica* se vengono considerati i piani completi, dette *strategie*, a disposizione dei giocatori.

Lo scbema ad albero si presenta come una figura piana costituita da un numero finito di segmenti che si ramificano verso l'alto a partire da un punto iniziale detto *vertice iniziale* (o *nodo iniziale*). Ogni altro vertice diverso da quello iniziale é collegato con un solo atro vertice di livello piú basso; al contrario i vertici da cui non dipartono altri rami verso l'alto si definiscono *punti terminali* dell'albero (vedi figura sottostante).

INSERIRE GRAFICO

I rami che partono da ogni nodo costituiscono le possibili mosse a disposizione del giocatore che é di turno a quel nodo. Per conoscere qual é il giocatore a cui spetta la mossa ad ogni nodo, si definisce un'applicazione che associa ad ogni nodo uno dei numeri $1, 2, \cdots, n$ ciascuno dei quali indica uno degli n partecipanti. Inoltre, ad ogni punto terminale é associato un numero che rappresenta la misura dei payoff (vettore di payoff indicato con u). Scegliere una mossa significa scegliere, in corrispondenza dei nodi attribuiti ai vari giocatori, uno dei segmenti associati allo stesso nodo e che da questo diramano. Scegliere un piano completo di strategie significa stabilire un cammino che inizia dal vertice iniziale ad uno dei punti terminali (senza mai tornare indietro!). I giochi in foma estesa di cui abbiamo testé tracciato una panoramica delle caratteristiche essenziali non si prestano ad una rigorosa formalizzazione matematica ecco perché si preferisce ricondurli ad una rappresentazione maggiormente compatta attraverso cioé una loro definizine in forma strategica. Per strategia, indicata da questo momento con $s \in S$, dove S rappresenta l'insieme delle strategie possibili, si intende l'insieme delle istruzioni che ogni giocatore si autoimpone per cercare di raggiungere un qualche obiettivo. Nel gioco definito in forma strategica ogni strategia contempla solo le mosse apparteneti a S, escludendo le altre pur deducibili dalla definizione di gioco in forma estesa. Quindi risulta che una volta scelta una strategia inziale s_1, il numero delle mosse successive allora sará minore di quello delle mosse possibili con decisioni volta per volta nel gioco in forma estesa. Le strategie si distinguono in pure e miste. Le *strategie pure* non sono determinate da scelte casuali, a differenza delle seconde alle quali si associano delle possibilitá di scelte. Nel proseguo si fará implicito riferimento alle strategie pure. Introduciamo l'importante definizione:

Definizione 8. Un gioco, indicato con Γ, in forma strategica consiste di:

1. un insieme di giocatori $N = \{1, 2, \cdots, n\}$;

2. un sottoinsieme di strategie S^i, per ogni giocatore i, inteso come sottoinsieme dello spazio ad m dimensione, ossia $S^i \subset \mathbb{R}^m$, indicando con m il numero delle diverse strategie adottabili da ciascun sogetto; inoltre, $S = S^1 \times \cdots \times S^n$ é lo spazio delle strategie dell'intero gioco, come risultato del prodotto cartesiano degli n spazi delle strategie individuali; $s^i \in S^i$ indica la singola strategia del giocatore i; $s = (s^1, \cdots, s^n) \in S$ é la combinazione di n strategie individuali (in altre parole una strategia per ogni giocatore);

3. una funzione di pagamento (o di payoff) per ogni giocatore i; $u^i(s) \in \mathbb{R}$ con $u(s) = (u^1(s), \cdots u^n(s)) \in \mathbb{R}^n$ é il vettore dei pagamenti individuali.

Per giungere ad una prima definizione di equilibrio é necessario precisare il significato della notazione $S \setminus t^i$. Allora, sia $s \in S$ una combinazione di strategie individuali e sia $t^i \in S^i$ una generica strategia del giocatore i. Allora $S \setminus t^i$ é la n-pla di strategie ottenute dalla combinazione s, sostituendo S^i del giocatore i con la strategia t^i. Avremo quindi

$$S \setminus t^i = (s^1, \cdots, s^{i-1}, t^i, s^{i+1}, \cdots s^n).$$

Definizione 9. Un *punto di equilibrio* del gioco Γ é una combinazione di strategie $s^* \in S$ tale che, per ogni $i \in N$ e per ogni $t^i \in S^i$, si abbia $u^i(s^* \setminus t^i) \leq u^i(s^*)$.

Questa importante definizione di equilibrio é dovuta a Nash (1950), ma in particolari era giá usata (ma non formalizzata matematica) in precedenza:

nella letteratura economica un esempio in tal senso va rintracciato nel modello di duopolio che possiede un punto di equilibrio detto di *courmot* (1838). Il punto di equilibrio rappresenta una regola di comportamento (una n-pla di strategie) tale che, se osservate dalla totalitá dei giocatori ad eccezione di uno, vi si attiene pure il restante giocatore. Infatti, il giocatoreuna volta determinatosi il punto di equilibrio, nel caso cambiasse le sua strategia non migliorerebbe la sua posizione; quindi ogni giocatore tende a massimizzare il proprio pagamento ritenendo date le strategie degli altri.

Una volta data le definizione di punto di equilibrio visto come comportamento stabile della totalitá dei giocatori, resta da provare la sua esistenza o meno. Infatti, non tutti i giochi conducono ad un equilibrio. Ad esempio un gioco in forma normale (o strategico) puó non avere un punto di equilibrio, invece la sua estenzione mista lo ammette sempre (secondo teorema di Nash). Nel caso di giochi *finiti* in cui gli insiemi delle strategie S^i sono insiemi finiti (ogni giocatore ha a disposizione un numero finito di strategie), questi non ammettono necessariamente un punto di equilibrio.

Definizione 10. Un *gioco generalizzato* Γ_g consiste in:

1. un insieme di giocatori $N = \{1, 2, \ldots, n\}$;

2. un insieme di strategie $S^i \subset \mathbb{R}^n$ per ciascun giocatore;

3. una funzione di payoff $u^i(s)$ $\forall i$, con $s = (s^1, \ldots, s^n) \in S$, essendo $S = \prod_{i=1}^n S^i$;

4. una funzione φ_i, $\forall i$, che associa ad ogni $(n-1)$-upla di strategie degli altri giocatori un sottonsieme non vuoto dell'insieme delle strategie proprie, che risulta sottodominio ammissibile per la sua funzione di pagamento:

$$\varphi^i : S^1 \times \ldots S^{i-1} \times S^{i+1} \times \ldots S^n \to 2^{S^i},$$

dove 2^{S^i} indica l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di S^i.

φ^i rappresenta matematicamente una multifunzione poiché ad ogni $(n-1)$-upla di strategie degli altri operatori si associano tutte le possibili reazioni del soggetto preso in esame (a differenza di quanto visto nella Definizione 8 dove é chiara l'esistenza di una semplicecorrispondenza biunivoca). Introduciamo il concetto di equilibrio per i giochi generalizzati nel caso di un'economia astratta:

Definizione 11. Dato un gioco generalizzato $\Gamma = \{(S^i)_{i=1}^n, (\varphi^i)_{i=1}^n, (u^i)_{i=1}^n\}$, dove $u^i : S \to \mathbb{R}\ forall i$, un punto di equilibrio é una n-pla di strategie $s^* = (s^{1*}, \dots, s^{n*}) \in S$ tale che

a) $s^{i*} \in \varphi^i(s^{1*}, \dots, s^{(n-1)*}, s^{(n-1)*}, \dots s^{n*}), \forall i \in N$;

b) $u^i(s^* \setminus s^i) \leq u^i(s^*), \forall s^i \in \varphi^i(s^{1*}, \dots, s^{(n-1)*}, s^{(n-1)*}, \dots s^{n*}), \forall i \in N.$

La condizione a) esprime che ogni strategia ottima deve appartenere al sottoinsieme ammissibile per ciascun giocatore. La condizione b) manifesta che ogni strategia ottima deve massimizzare la funzione di payoff di ciascun giocatore, con riferimento a tutte le possibili strategie.

Definizione 12. Si dice *pseudogioco*, indicato con Γ_p, un gioco in forma strategica tale che:

1. un insieme di giocatori;

2. un insieme di strategie per ogni giocatore;

3. una funzione di payoff per ogni giocatore tale che, per almeno uno di essi, la funzione di payoff non é definita su tutto lo spazio delle strategie definite dell'intero gioco (ovvero di tutti i partecipanti).

Il concetto di pseudogioco deve intendersi come una generalizzazione del gioco strategico in quanto le funzioni di pagamento (o di payoff) in esso definite includano, come caso particolare, quelle aventi come insieme di definizione l'intero spazio di strategie S del gioco stesso.

0.2 I giochi strettamente competitivi (G.S.C.)

I G.S.C. contengono come sottoinsieme i giochi a somma nulla. I G.S.C. (a somma nulla e non) rappresentano un sottoinsieme dei giochi non cooperativi. Si ha un gioco a *somma nulla* quando si ha

$$u_1(s_1) \geq u_1(s_2) \text{ se e solo se } u_2(s_1) \leq u_2(s_2), \text{ con } s_1, s_2 \in S$$

I giochi a *somma zero* sono quelli per cui vale:

$$u_1(s) + u_2(s) = 0$$

e rappresentano una sottoclasse dei giochi a somma nulla.

Osservazione 2. Il gioco a due persone a somma nulla é strettamente competitivo (non vale il viceversa).

Un gioco a somma nulla ($n = 2$) si rappresenta comunemente mediante una matrice le cui riche e colonne sono intestate rispettivamente alle strategie pure di Rigo e Colonna (i nomi che diamo al giocatore 1 (Rigo) e al giocatore 2 (Colonna). In corrispondenza alla riga κ ed alla colonna j, la matrice riporta la coppia di vincite $u_1(\kappa, j)$ e $u_2(\kappa, j)$ associate alla combinazione strategica (κ, j). Le corrispondenti vincite di colonna si ricavano immediatamente osservando $u_2(\kappa, j) = -u_1(\kappa, j)$.

Dato un gioco G la funzione payoff garantita $\overline{u_i}(s_i)$ del giocatore i indica per ogni sua strategia pura s_i la vincita minima che questi puó conseguire al variare delle combinazioni di strategie dei suoi avversari. Essa é data da

$$\overline{u_i}(s_i) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Possiamo a questo punto introdurre la definizione di *soluzione di sicurezza*:

> dato un gioco G, chiamiamo *valore massiminimo* o *livello di sicurezza* (nel caso di strategie pure) per il giocatore i la quantitá $v_i = \max_{s_i \in S_i} \overline{u_i}(s_i)$.

Ogni strategia s_i^* che ottiene il valore massiminimo si chiama *strategia di massiminimo* o *strategia prudente.* Ogni combinazione di strategie prudenti costiuisce una soluzione di sicurezza per G.

Si introduce la seguente:

Proposizione 1. *Sia G (appartenente alla classe Γ) un gioco a due persone a somma nulla, inoltre gli insiemi di strategie S_1 e S_2 siano sottoinsiemi compatti di spazi euclidei e le funzioni di pagamento u_1 e u_2 siano continue. Allora condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di equilibrio in Γ é*

$$v_2 = \max_{s_2 \in S_2}[\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)] = - \min_{s_2 \in S_2}[\max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2)]$$

ossia

$$\max_{S_1} \min_{S_2} u_1(s_1, s_2)] = - \min_{S_2} \max_{S_1} u_1(s_1, s_2)$$

Osservazione 3. La compattezza degli spazi S e la continuitá delle funzioni u_1 e u_2 in essi definite si richiedono per assicurarel'esistenza di un massimo e di un minimo valore per le funzioni u (per il noto Teorema di Weierstrass). Se lo sono gli spazi S^i, anche il loro prodotto é compatto, inoltre le funzioni $\min u_1$ e $\max u_2$ sono continue e di conseguenza esiste $\max \min u_1$ e $\min \max u_2$.

Osservazione 4. Questa condizione esprime che se il maggior pagamento (vincite) che il giocatore 1 puó garantire per se stesso, giocando un'opportuna strategia, uguaglia il minore pagamento che il giocatore 2 garantisce che spetterá al giocatore 1, allora e solo allora, la strategia giocata da 1 risulta di equilibrio.

Introduciamo adesso la definizione di *equilibrio* (di Nash) di un gioco strettamente competitivo:

una coppia $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ tale che per ogni $t_1, t_2 \in S_1 \times S_2$ si abbia:

$$u(s_1, t_2) \leq u_1(s_1, s_2) \leq u_1(t_2, s_2)$$

il valore $u_1(s_1, s_2)$ é il valore di min max del gioco.

Infatti, la disequazione a sinistra esprime che il pagamento che spetta al giocatore 1 in seguito alla sua scelta s_1 é il massimo possibile tra quelle che lui stesso ottenibili al variare di tutte le sue strategie, ferma restando quella s_2 scelte dal giocatore 2. La diseguaglianza di destra equivale a dire che lo stesso pagamento é, invece, il minimo tra quelli che gli spetterebbero sempre con la scelta di s_1 al variare, in tutti i modi possibili, delle strategie del giocatore 2. La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punro di equilibrio di Γ é data dalla Proposizione 1 osservando che dalla stessa s_i puó desumere che non tutti i G.S.C. ammettono valori $\min\max$ (punti di sella) e tantomeno quelli di equilibrio.

Dimostrazione. (Proposizione 1) Si puó affermare che risulta sempre:

$$\max_{S_1}\min_{s_2} \leq \min_{S_2}\max_{S_1} u_2.$$

Infatti, per ogni s_1, s_2 si ha per definizione di massimo:

$$\max_{S_1} u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s_1, s_2).$$

Considerando il massimo su S_2 di entrambi i lati della diseguaglianza si ha ancora:

$$\min_{S_2}\max_{S_1} u_1(s_1, s_2) \geq \min_{S_2} u_1(s_1, s_2),$$

poiché quest'ultima disequazione é vera per ogni valore di s_1, lo sará anche per ogni valore di S_1, in corrispondenza del quale il membro a destra assume lo stesso valore massimo, cioé:

$$\min_{S_2}\max_{S_1} u_1(s_1, s_2) \geq \max_{S_1}\min_{S_2} u_1(s_1, s_2). \tag{2}$$

Si assuma ora che $S^* = (s^{1*}, s^{2*})$ sia un punto di equilibrio, cioé per ogni coppia s_1 e s_2 si assuma che

$$u_1(s_1, s^{s*}) \leq u_1(s^{1*}, s^{2*}) \equiv v \leq u_1(s^{1*}, s_2).$$

Allora, per ogni s_1 e s_2 si ha:

$$\max_{S_1}(s_1, s^{2*}) \leq u_1(s^{1*}, s^{2*}) \equiv v \leq \min_{S_2} u_1(s^{1*,s^2})$$

e anche

$\min_{S_1} \max_{S_2}(s_1, s_2) \leq \max_{S_1} u_1(s_1, s^{2*}) \leq u_1(s_{1*}, s^{2*}) \equiv v \leq \min_{S_2} u_1(s^{1*,s^2}) \leq \max_{S_1} \min_{S_2} u_1(s_1, s_2)$

cioé

$$\min \max u_1(s_1, s_2) \leq \max \min u_1(s_1, s_2) \tag{3}$$

La 2 e la 3 permettono di affermare che :

$$\max_{S_1} \min_{S_2} u_1(s_1, s_2) = \min_{S_2} \max_{S_1} u_1(s_1, s_2).$$

□

0.3 Giochi ad n-persone

Abbiamo visto come non tutti i giochi stettamente competitivi ammettono punti di equilibrio, al contrario quelli non cooperativi ad n-percone non strettamente competitivi, sotto determinate ipotesi, hanno *sempre* soluzioni di equilibrio. Per raggiungere questo obiettivo scientifico attraverso una rigorosa dimostrazione é necessario superare il contesto di gioco alla von Neumann (1928) basato sul concetto di valore min max e riferirsi alla generalizzazione di Nash (1950-51) attraverso gli assunti teorici che adesso seguiranno. Introduciamo formalmente il concetto di *strategia mista* introdotto in letteratura da Harseng (1973) per giungere alla definizione di un equilibrio di Nash nel caso di un gioco con estensione mista.

Si supponga che il generico giocatore i abbia n strategie pure $S_i = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}\}$. Una *strategia mista* per il giocatore i é una distribuzione di probabilitá $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$, dove p_{i_n} é la probabilitá che il giocatore scelga la strategia n, per $n = 1, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} p_{i_n} = 1$.

Definizione 13. [Gioco ad estensione mista] Estendendo le possibilitá delle scelte di ogni giocatore con l'attribuzione a ciascunsa di esse di una probabilitá appartenente all'intervallo $[0, 1]$, in modo che la somma di tali probabilitá sia 1, si ottengono le estensione miste del gioco.

Definizione 14. Una strategia mista di un gioco Γ non cooperativo ad n persone é una strategia nelle estensione miste del gioco medesimo.

Quindi risulta che una strategia si ottiene da quella mista, come caso particolare se associata a possibilitá pari all'unitá. Questa definizione racchiude un'importante proprietá dell'insieme delle strategie S^i. Esso é compatto e convesso, proprietá questa fondamentake per la dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio.

Introduciamo il concetto di *gioco ad informazione completa*.

Definizione 15. Un *gioco ad informazione completa* é quello in cui ogni giocatore i conosce tutti gli insiemi di strategie dei partecipanti, nonché le loro funzioni payoff.

Abbiamo, a questo punto, tutti gli elementi necessari per poter introdurre il famoso Teorema di Nash (1951)

Teorema 2 (Nash 1950-51)**.** *L'estensione mista di qualsiasi gioco non cooperativo ad n-persone, con un insieme S di strategie, ha un punto di equilibrio.*

Osservazione 5. Nash analiza un gioco ad n-persone, a ciascuna delle quali corrisponde un insieme finito di strategie pure, dalle quali si ottengobo le strategie miste come distribuzioni di probabilitá.

Dimostrazione. La dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio si puó ottenere mediante l'applicazione del *teorema del punto fisso* di Brouwer, di cui qui di seguito si riporta l'enunciato.[1]

[1] Giá nel 1950, Nash dimostra l'esistenza dell'equilibrio utilizzando il *teorema del punto fisso* dovuto a Kakutani (1941) che, sappiamo, é basato sul teorema dell'esistenza del punto di sella di von Neumann (1928), che é anche il primo contributo alla teoria dei giochi. Il teorema di Kakutani (1941), inoltre, é una generalizzazione proprio del noto teorema del punto fisso di Brouwer.

Sia C un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio euclideo. Sia f una funzione continua da C in C. Allora f ha un punto fisso, cioé esiste un punto $x \in C$ tale che $f(x) = x$.

Sia $N = \{1, 2, \dots, n\}$ l'insieme dei giocatori e per ogni $i \in N$ sia $S^i = \{1, 2, \dots, m^i\}$ l'insieme delle strategie pure del giocatore i, coincidente, per semplicitá, con il segmento di numeri naturali (interi positivi) da 1 a m^i.

La funzione di pagamento del giocatore i con strategie pure si indichi con

$$\pi^i(j^1, \dots, j^\kappa, \dots, j^n) \in \mathbb{R}$$

dove j^κ é la strategia pura del giocatore κ $(1 \leq j^\kappa \leq m^\kappa)$.

La corrispondente estensione mista del gioco é definita nel modo seguente:

1. l'insieme dei giocatori resta $N = \{1, 2, \dots, n\}$;
2. lo spazio delle strategie miste del giocatore i diventa:
   $X^i = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m^i}) \in \mathbb{R}^{m^i} | x_j \geq 0 \forall j \text{ e } \sum_{j=1}^{m^i} x_j = 1\}$;
3. la funzione di pagamento con strategie miste $\prod^i$ del giocatore i é del tipo:
   $\prod^i(x^1, \dots, x^\kappa, \dots, x^n) = \sum_{j^1=1}^{m^1} \sum_{j^2=1}^{m^2} \cdots \sum_{j^n=1}^{m^n} [x^1_{j^1} \cdots x^n_{j^n} \pi^i(j^1, \dots, j^n)]$
   con $x^\kappa = (x^\kappa_1, \dots, x^\kappa_{m^\kappa})$.

Si puó subito osservare che $\pi^i(x)$ é una funzione continua in quanto essa é un polinomio in x.

X^i, per definizione, é il simplesso di dimensione $m^i - 1$, che risulta certamente un compatto convesso.

Tale proprietá si puó estendere anche al prodotto cartesiano di piú spazi dello stesso tipo, per cui anche $X = X^1 \times X^2 \times \dots X^n$ é compatto convesso.

Si definisca ora la seguente funzione su X:

$$g^i_j(x) = \max[0, \prod^i(x \setminus e^i_j) - \prod^i(x)], \forall x \in X, \forall i \in N, \forall j \in S^i,$$

dove

$e^i_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ é il versore j-esimo di $\mathbb{R}^{m^i}$ e $\prod^i(x \setminus e^i_j)$ é il valore del pagamento del giocatore i quando la strategia mista x^i é sostituita dalla stategia pura e^i_j. Allora la differenza $\prod^i(x \setminus e^i_j) - \prod^i(x)$ misura il guadagno o la perdita spettanti al giocatore i in seguito alla sua scelta a favore della strategia pura e^i_j (invece della strategia mista x^i).

Anche la funzione $g^i_j(x)$ é continua essendo il massimo di funzioni continue. Si definisca ora la funzione $f : X \to X$ nel modo seguente:

$$f^i_j(x) = \frac{x^i_j + g^i_j(x)}{1 + \sum_{h=1}^{m^i} g^i_h(x)}.$$

Si puó subito vedere che $f(x) \in X$ e che $f(x)$ é una funzione continua, essendo $g^i_j(x)$ una funzione continua su X. A tale funzione é possibile perció applicare il teorema del punto fisso di Brouwer. Ció equivale a dire che esiste un $x \in X$ per cui:

$$\frac{x^i_j + g^i_j(x)}{1 + \sum_{h=1}^{m^i} g^i_h(x)} = x^i_j, \quad \forall i, \forall j.$$

Da quest'ultima segue anche:

$$x^i_j \sum_{h=1}^{m^i} g^i_h(x) = g^i_j(x). \tag{4}$$

Inoltre, é possibile dimostrare la seguente affermazione: per ogni $i \in N$ esiste un valore di j, con $1 \leq j \leq m^i$, per cui $x^i_j > 0$ e $g^i_j(x) = 0$. Infatti risulta:

$$\prod^i(x) = \sum_{j=1}^{m^i} x^i_j \prod^i(x \setminus e^i_j) = \sum_{x^i_j > 0} x^i_j \prod^i(x \setminus e^i_j). \tag{5}$$

Inoltre, se per assurdo l'affermazione non fosse vera, avendosi $g^i_j > 0$ per tutti i valori per cui $x^i_j > 0$ risulterebbe:

$$\prod^i(x \setminus e^i_j) > \prod^i(x), \forall j \text{ tale che } x^i_j > 0 \tag{6}$$

(si veda la definizione della stessa $g^i_j(x)$). Si avrebbe allora:

$$\sum_{x_j>0} x^i_j \prod^i (x \setminus e^i_j) > \sum_{x_j>0} x^i_j \prod^i (x) = \prod^i (x) \cdot \sum_{x_j>0} x^i_j = \prod^i (x). \qquad (7)$$

La diseguaglianza stretta tra il primo termine e l'ultimo della 7 é in contraddizione con la 6 che ovviamente é, di per se stessa, vera sempre, data la defınzione della funzione $\prod^i$. Questa contraddizione conferma che l'affermazione sopra enunciata non puó essere negata e pertanto é vera.

Per questa affermazione e per l'uguaglianza 5, si ha allora:

$$\sum_{j=1}^{m^i} g^i_j(x) = 0, \quad \forall i \in N.$$

Ma, poiché le $g^i_j(x)$ sono posivite o nulle, quest'ultima uguaglianza conduce a:

$$g^i_j(x) = 0 \quad \forall i \in N \text{ e } \forall j \in S^i.$$

Quindi si ha che

$$\prod^i (x \setminus e^i_j) \leq \prod^i (x)$$

e, per una generica strategia mista $y^i \in X^i$, vale la seguente relazione:

$$\prod^i (x \setminus y^i) = \sum_{j=1}^{m^i} y^i_j \prod^i (x \setminus e^i_j) \leq \sum_{j=1}^{m^i} y^i_j \prod^i (x) = \prod^i (x) \sum_{j=1}^{m^i} y^i_j = \prod^i (x)$$

(essendo $\sum_{j=1}^{m^i} y^i_j = 1$).

Ma quest'ultima serie di diseguaglianze prova che x é un punto di equilibrio per il gioco considerato. 6 $\square$

Osservazione 6. Nash analizza un gioco ad n-persone, a ciascuna delle quali corrisponde un insieme finito di strategie oure, dalle quali si ottengono le strategie miste come distorsioni di probabilitá.

L'esistenza di un equilibrio per un gioco non cooperativo del tipo $\Gamma = \{(N)_{i=1}^{n}, (S)_{i=1}^{n}, (u)_{i=1}^{n}\}$ definito in forma strategica puó essere provato attraverso un teorema. Tuttavia, prima del suo enunciato, si procederá con l'introduzione di alcune regole di ipotesi che lo sostengono:

> 1^a *regola.* I giocatori del gioco I non sono in grado di stabilire accordi specifici e vincolanti tra di loro.
>
> 2^a *regola.* Le scelte strategiche di ogni giocatore sono assunte prima dell'inizio del gioco, senza la conoscenza delle scelte fatte dagli altri giocatori (si parla in tal caso di scelte simultanee).
>
> *Ipotesi 1* $S^i \subset \mathbb{R}_+^m$ sia compatto e convesso per ogni $i \in N$;
>
> *Ipotesi 2* $u_i(s)$ sia una funzione definita continuae limitata $\forall s \in S$ e $\forall i \in N$, ossia $u : S^i \to \mathbb{R}_+$;
>
> *Ipotesi 3* $u_i(s \setminus t^i)$ sia concava rispetto a $T^i \in S^i$, $\forall s \in S$ e $\forall i \in N$.

Enunciamo il seguente teorema:

Teorema 3. *Se* $I = \{N, S, u\}$ *é un gioco con informazione completa che soddisfa le regole* 1, 2 *e le ipotesi* $1, 2, 3$, *allora esso ammette almeno un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Per dimostrare il Teorema 3 introduciamo la seguente proposizione:

Proposizione 4. *Una strategia* $s \in S$ *di un gioco n.c.* $I = \{N, S, u\}$ *é un equilibrio se e solo se essa é una scelta ottima per tutti i giocatori, cioé se e solo se* $s^i \in \varphi^i(s)$*, per ogni* i*, con*

$$\varphi^i(s) = \{t^i \in S^i : u_i(s \setminus t^i) = \max_{s^i \in S^i} u_i(S \setminus s^i)\}.$$

□

In altri termini, ogni strategia di equilibrio é tale da appartenere all'immagine di se stessa secondo le corrispondenze $\varphi^i : S^i \to 2^{S^i}$, $\forall i$, e, viceversa, ogni strategia $S^* \in \varphi(S^*)$ é un equilibrio de gioco. Allora si deduce che l'insieme dei punti di equilibrio di I é coincidente con l'insieme dei punti fissi delle corrispondenze $\varphi^i(s)$. Pertanto il Teorema 3 si dimostra ponendo che $\varphi(s)$ ammetta almeno un punto fisso.

Introduciamo l'importante

Lemma 5 (Kakutani (1941))**.** *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, convesso e non vuoto. Se $\varphi : S^i \to 2^{S^i}$ ha:*

1. *un dominio di esistenza compatto e convesso;*
2. *$\varphi(s)$ é convesso e non vuoto $\forall s \in S$*
3. *grafφ é chiuso (oppure similmente φ sia semicontinua.....)*

allora segue che esiste un punto fisso s^* tale che $s^* \in \varphi(s^*)$, cioé esiste almeno un equilibrio per I.

Capitolo 1

Primo Capitolo

Indichiamo con $N = \{1, 2, \dots, n\}$ il numero totale dei giocatori ed con i il giocatore generico. Ogni agente economico ha una propria strategia scelta all'interno di un insieme di disponibilitá di scelte strategiche che si indica con $X_i \neq \emptyset$. La totalitá delle possibile strategie espletabili lo denotiamo con il vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ad ogni strategia si associa naturalmente un certo risultato considerato all'interno di un certo insieme A. Un generico risultato lo indichiamo con la lettera a e scriveremo $a \in A$ per denotare l'appartenza del risultato a all'interno dell'insieme di tutti i possibili risultati A.

Consideriamo adesso l'insieme delle possibili strategie espletabili da ogni agente economico; si genera a partire da questo il prodotto cartesiano

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$

Ognuno di questi insiemi rappresenta un insiemi di azioni indipendenti da quelli degli altri insiemi.

Introduciamo a questo punto la funzione (o applicazione) g in modo tale da sugellare la relazione funzionale che intercorre tra l'insieme delle strategie X e l'insieme dei risultati A:

$$g : X \to A.$$

La quaterna $(N, (X_i)_{i \in N}, A, g)$ rappresenta la cosiddetta *game structure* o *game situation*. Indichiamo con il simbolo r_i la relazione di preferenza dei popssibili risulati:

$$r_i \subseteq A \times A,$$

dove $A \times A$ rappresenta il prodotto cartesiano di A con se stesso. Quindi si parte dal principio che ogni agente possa conseguire ogni risulato possibile. Un concetto molto interessante é quello di *Equilibrio di Nash*, eleborato nel 1950, I risultati scientifici ai quali Nash perviene furono conseguenze di precedenti importanti risulati dovuti a *von Newmann*.

Definizione 16 (Nash equilibrium)**.** Si definisce *punto di equilibrio di Nash* un output $x^* \in X$ tale $g(x^*) r_i g(x_1^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*)$, $\forall x_i \in X_i$.

Introducendo i due legami funzionali..... (Non capisco i simboli)..... si puó semplificare il modello eliminando g. Avremo

$$\{(X_i)_{i=1}^n, (r_i)_{i=1}^n\} \text{ (cioé si esprime una strategia in termini di un risulato)}$$

La precdente definizione si puó cosí riformulare:

Definizione 17 (Nash equilibrium)**.** Si definisce *punto di equilibrio di Nash* un output $x^* \in X$ tale $x^* r_i (x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*)$, $\forall x_i \in X_i$.

Con il simbolo X_{-i} indica il seguente prodotto cartesiano:

$$X_{-i} = X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n.$$

Le varie preferenze possono essere ordinate mediante la seguente funzione

$$u_i : X \to \mathbb{R} \quad (x r_i y \Leftrightarrow u_i(x) \geq u_i(y))$$

detta *funzione utilitá*.

Da questa introduzione avremo un gioco in forma normale che si presenta nel seguente modo:

$$\{(X_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n\}.$$

Definizione 18. x^* é un *punto diequilibrio di Nash* se e solo se $u_i(x^*) \geq u_i(x^*_{-i}x_i)$, $\forall x_i \in X_i$.

Definizione 19. Consideriamo uno spazio vettoriale E ed un sottoinsieme $X \subseteq E$. X é *convesso* se presi due punti distinti x^1 e x^2 di X e $\lambda \in (0,1)$ si ha $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$.

Definizione 20. $u : X \to \mathbb{R}$ é un *funzione concava* se per ogni $x^1, x^2 \in X$ e $\lambda \in (0,1)$ si ha:

$$u(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \geq \lambda u(x^1) + (1-\lambda)u(x^2).$$

Teorema 6. *[Existence Theorem] Se per ogni i $X_i \neq \emptyset$ é un sottoinsieme compatto e connesso di $\mathbb{R}^m$ e $u_i : X \to \mathbb{R}$ é continua essa é concava........ ed esisterá almeno un punto di equilibrio di Nash.*

1.1 Finite Games

Si parla di *finite games* quando per ogni i, l'insieme X_i é finito. Consideriamo solamente due giocatori e successivamente introduciamo l'insieme delle possibili strategie per entrambi i giocatori $X_1 = [1,2,3]$, $X_2 = [1,2]$,$\mathrm{u}_1(\kappa, l) = a_{\kappa l}$, $u_2(\kappa, l) = b_{\kappa l}$

Questi ultimi elementi portano all'introduzione di due matrici $A = (a_{\kappa l 1 \leq \kappa \leq 3, 1 \leq l \leq 2})$