Deformazione nella valutazione sotto incertezza: l'utilità attesa

3.1 Nozione intuitiva di certo equivalente

Partiamo con un esempio semplicissimo. Ci viene chiesto di scegliere tra due somme di danaro. La prima è certa, d'ammontare 50 euro: la seconda è aleatoria e può assumere, con probabilità che giudichiamo uguali, valore 0 oppure 100 euro. Si tratta di confrontare due ammontari monetari di natura diversa: il primo certo, il secondo aleatorio. Una visione superficiale del problema, con profonde radici nella storia di tali quesiti, suggerisce di risolvere il problema "trasformando" la somma aleatoria in certa attraverso il suo *valore atteso*[1] (in euro):

$$0 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

La somma aleatoria con la distribuzione di probabilità indicata dovrebbe essere indifferente rispetto a 50 euro certi, ma ciò non quadra con un comportamento comunemente giudicato

[1] Sinonimi come *valore medio, speranza matematica, media* sono di uso diffuso e ragionevole. Meno commendevole è l'uso di parole del tipo *aspettazione o aspettativa* trasferita pari pari dall'inglese *expectation*

ragionevole: chiunque (o quasi) preferirebbe i 50 euro certi alla prospettiva aleatoria, ancorché questa abbia lo stesso valore atteso.

Il punto cruciale sta proprio qui: il valore atteso d'una somma aleatoria sovrastima il valore certo al quale essa è giudicata equivalente da un valutatore normale. Chiamiamo *certo equivalente* di un ammontare aleatorio la somma certa che, razionalmente e soggettivamente, si giudica equivalente all'aleatoria. Al punto in cui siamo, possiamo per ora solo asserire che tale certo equivalente è tra 0 e 50 euro. Ciò dipende, come vedremo meglio, da una deformazione che possiamo pensare che un valutatore razionale operi (inconsciamente) sui possibili ammontari monetari di un guadagno aleatorio (o simili). La strada che ci porterà all'individuazione esatta di tale certo equivalente è lunga ma senza asperità.

3.2 Razionalità sotto incertezza

Nel 1944 è stata fornita una prima costruzione articolata di un modello di 'razionalità" sotto incertezza. Lo schema proposto da J. von Neumann e O. Morgenstern conduce ad un risultato parzialmente anticipato oltre due secoli fa da G. Cramer (effettivamente) e da D. Bernoulli (ufficialmente), che tentò di spiegare razionalmente perché il certo equivalente sia minore del valore atteso. Si tratta, in poche parole, di identificare alcuni requisiti che dovrebbe possedere un modo razionale di valutare somme aleatorie di danaro e di dedurre da essi come *deve* essere strutturato tale modo di valutare. Accettati questi principi (e non è difficile), disporremo di uno strumento utile per affrontare i problemi che ci interessano.

Introduciamo preliminarmente una nozione, di per sé interessante, che useremo anche nella costruzione dell'annunziato paradigma di razionalità.

La nozione è la *dominanza stocastica (del prim'ordine).* Essa identifica i casi in cui dovendo scegliere tra due somme aleatorie X, Y stocasticamente indipendenti, con assegnata distribuzione di probabilità, appare del tutto ragionevole individuare la migliore. Materializziamo il discorso perché sia facile capirne la sostanza. Supponiamo che X, Y siano i prezzi ad una data futura di due pacchetti azionari che oggi possiamo comprare allo stesso prezzo. Disponiamo di valutazioni di probabilità affidabili per l'uno e per l'altro valore, che sono concentrate nelle rispettive funzioni di ripartizione: $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$. Fissiamo una soglia s per il valore del pacchetto e confrontiamo le due probabilità di superare la soglia attraverso l'acquisto dell'un pacchetto o dell'altro:

$$1 - F(s) = P\,(X > s) \qquad ; \qquad 1 - G\,(s) = P(Y > s)$$

Supponiamo che per tutte le soglie s si abbia $P(X > s) \geq P$ (Y >

s). In questo caso si dice che X domina Y *(secondo la dominanza stocastica del prim'ordine*). Si parla di *dominanza stocastica del prim'ordine,* poiché si possono dare altre definizioni che affinano questo concetto.

Passiamo ora alla presentazione del paradigma annunciato.

Consideriamo somme aleatorie X, Y, Z, ... ed elenchiamo quattro requisiti che un sistema razionale di valutazione dovrebbe possedere. Tale sistema produce precisamente il certo equivalente.

1. Ogni ammontare aleatorio X ha un certo equivalente $z\,[X]$.
2. Se un ammontare X non è aleatorio ma è certo e vale c, il suo certo equivalente è esattamente c:

$$z\,[X] = c$$

3. Se la somma aleatoria X domina stocasticamente la somma aleatoria Y (e X e Y non hanno la stessa distribuzione di probabilità), vogliamo che questo si rivèrberi sul prezzo e chiediamo che X valga di più:

$$z\,[X] > z\,[Y]$$

4. Si supponga di voler confrontare le due situazioni aleatorie:

$$\text{situazione I} \begin{cases} X & Y \\ p & 1-p \end{cases}; \text{ situazione } \begin{cases} z[X] & Y \\ p & 1-p \end{cases};$$

La prima dà X a Y (aleatori) con probabilità rispettive p e 1- p, mentre la seconda è esattamente come la prima, con la sola differenza che, in luogo dell'ammontare X, essa dà $z[X]$, ossia la somma certa che il valutatore ritiene indifferente a X. Ci aspettiamo che un valutatore razionale rammenti la sua valutazione d'indifferenza e richiediamo, pertanto, che giudichi indifferenti le due situazioni.

Sia X un ammontare aleatorio che assume i valori x_1, x_2, ... x_0 con probabilità rispettive: p_1, p_2, .., p_0. Qualora un sistema di valutazione soddisfi le quattro condizioni 1-4, esiste[2] una deformazione u degli ammontari monetari, continua e strettamente crescente, tale che il certo, equivalente $z = z\ [X]$ soddisfa l'equazione:

$$u(z) = u(x_1)p_1 + u\ (u\ (x_2)p_2 +... + u(x_n)p_n \quad (3.1)$$

Tale funzione $u(.)$ può essere sostituita da qualsiasi funzione $v(.)= au(.)+b$, con a positiva e b qualsiasi: cambia il valore dei due membri dell'equazione, ma non cambia il certo equivalente. Usando, come d'abitudine, il simbolo X per l'ammontare aleatorio e la lettera "**E**" per l'operatore "valore atteso", avremo la seguente formula:

$$u(z)= \mathbf{E}[u(X)]$$

[2] Il risultato è conseguenza del fondamentale teorema di Nagumo-Kolmogorov-de Finetti sulle medie associative.

L'equazione definisce il *certo equivalente dal punto di vista del venditore.* Ciò significa che si chiede al valutatore razionale quale somma certa ritenga indifferente ricevere per cedere la somma aleatoria[3]. In molti problemi la prospettiva e rovesciata: ci si chiede quale somma è indifferente pagare per acquisire una somma aleatoria[4]. La risposta è il *certo equivalente dal punto di vista del compratore.* Da questo punto di vista il certo equivalente è il prezzo d'acquisto d'una somma aleatoria, che rende l'acquisto né vantaggioso né svantaggioso. Se il soggetto non acquista, nulla cambia e il risultato *è 0*; se acquista riceve X e paga z*,* cosicché il risultato è X - z. L'equazione che stabilisce l'indifferenza tra le due decisioni è:

$$u(0) = \mathbf{E}[u(X - z)]$$

e generalmente conduce ad un certo equivalente diverso da quello del venditore anche se la distribuzione di probabilità della somma aleatoria e la funzione u sono le stesse. Vedremo sotto quali condizioni si verifica l'uguaglianza.

[3] È il caso di vendita di un'azione di valore aleatorio. Rimane inteso che se la somma aleatoria fosse negativa, il suo certo equivalente dal punto di vista del venditore sarebbe negativo. Il caso tipico è l'acquisto di una copertura assicurativa: si cede alla :compagnia d'assicurazione il rischio e, in cambio, si *paga* il premio.
[4] È il caso dell'acquisto di un'azione con valore aleatorio. Sempre con riferimento all'ambito assicurativo, è il punto di vista della compagnia di assicurazione che "compra" una somma aleatoria negativa (i risarcimenti eventualmente dovuti) e, in cambio, "paga" una somma negativa, cioè incassa un premio.

Esempio - Supponiamo, provvisoriamente, di conoscere la funzione *u:*

$$u(x) = -e^{-x/100} \qquad (3.2)$$

e di voler valutare con essa la somma aleatoria precedentemente incontrata:

$$\begin{cases} 0 & 100 \\ 1/2 & 1/2 \end{cases}$$

La formula (2.1) si riduce a:

$$-e^{-x/100} = -\, e^{-0/100} \cdot \frac{1}{2} - e^{-100/100} \cdot \frac{1}{2}$$

ossia:

$$-\, e^{-z/100} = \frac{1+e^{-2}}{2}$$

da cui:

$$z = -100 \cdot \left[\ln\left(1+e^{-1}\right) - \ln 2 \right] \simeq 38{,}035 \qquad (3.3)$$

La valutazione che abbiamo ottenuto è, come si vede, ben al di sotto di 50 milioni e concorda (magari anche troppo) con le considerazioni di carattere qualitativo fatte sopra. Naturalmente un'obiezione corretta è: "E chi ci dice che a sia proprio quella?"

Torneremo sull'argomento.

La valutazione fornita è dal punto di vista del venditore. Impostando i calcoli dal punto di vista del compratore otterremmo:

$$-e^{-0/100} = e^{-(0-z)/100} \cdot \frac{1}{2} - e^{-(100-Z)/100} \cdot \frac{1}{2}$$

Quindi i due certi equivalenti coincidono. Ripetiamo che ciò non accade in generale.

La funzione *u* che deforma le *somme* di danaro da valutare sotto incertezza è comunemente detta *funzione (di) utilità* nel senso di J. von Neurnann e O. Morgenstern e poche volte s'è vista una scelta così infelice del nome. Nella teoria economica la nozione di *utilità* è stata introdotta come misura della soddisfazione derivante dalla disponibilità di un determinato paniere di beni di consumo e ha ben poco a che vedere con il nostro problema. Nel seguito useremo, solo per rispetto alla tradizione consolidata, la parola "utilità". Il lettore si abitui a pensare "utilità" come sinonimo della locuzione più ingombrante "deformazione sotto incertezza".

L'ordinamento di preferibilità tra somme aleatorie è leggibile tramite i loro certi equivalenti: preferiamo la somma aleatoria X alla somma aleatoria Y se e solo se il certo equivalente di X è maggiore del certo equivalente di Y:

$$z[X] > z[Y]$$

Può essere utile osservare che il confronto tra le due somme aleatorie dal punto di vista del venditore può essere, di fatto, anticipato d'un passo, senza giungere a calcolare i certi equivalenti.

Infatti abbiamo visto che $u(z)$ = **E** $[u(X)]$ definisce il certo equivalente dal punto di vista del venditore, che riuscirebbe:

$$z[X] = u^{-1}\,[\mathbf{E}(u(X))]$$

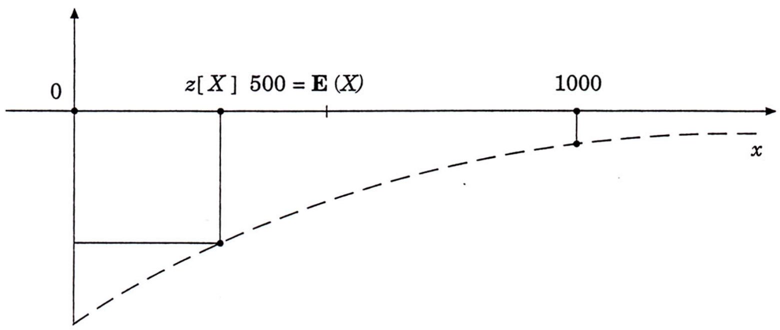

Figura 3.1

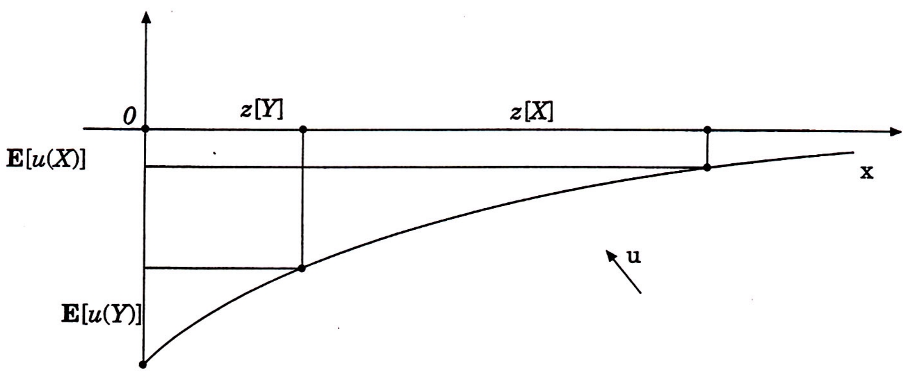

Figura: 3.2

Analogamente si otterrebbe per $z[Y]$ la rappresentazione:

$$z[Y] = u^{-1}[\mathbf{E}(u(Y))]$$

Si veda nella Fig. 3.1 la rappresentazione geometrica del certo equivalente (del venditore) della somma aleatoria X con la distribuzione di probabilità:

$$X \sim \begin{cases} \quad valore \rightarrow & 0 \quad 1.000 \\ probabilit\grave{a} \rightarrow & 50\% \;\; 50\% \end{cases}$$

Poiché u è crescente, confrontare i certi equivalenti $z[X]$ e $z[Y]$ fornisce lo stesso risultato del confronto tra $u(z[X])$ e $u(z[Y])$, cioè:

$$z[X] > z[Y] \text{ se e solo se } \mathbf{E}[u(X)] > \mathbf{E}[u(\mathrm{Y})]$$

Per decidere allora quale preferire tra due somme aleatorie in vendita, si può evitare il ricorso al confronto tra i certi equivalenti, ma basta confrontare le loro *utilità attese.* In simboli:

$$X \text{ è preferita a } Y \text{ se e solo se } \mathbf{E}[u(X)] > \mathbf{E}[u(\mathrm{Y})]$$

Illustriamo ulteriormente questo punto attraverso un semplice:

Esempio — Consideriamo due somme aleatorie con lo stesso valore atteso:

$$X:\begin{cases} 0 & 100 \\ 50\% & 50\% \end{cases} \quad \text{e} \quad X:\begin{cases} -50 & 150 \\ 50\% & 50\% \end{cases}$$

e prendiamo la funzione d'utilità:

$$u(x) = -e^{-x/100}$$

Calcoliamo dapprima le loro utilità attese:

$$\mathbf{E}\left[u(X)\right] = -1 \cdot 50\% - e^{-1} \cdot 50\% \simeq -0{,}684$$

e:

$$\mathbf{E}\left[u(Y)\right] = -e^{-5} \cdot 50\% - e^{-1{,}5} \cdot 50\% \simeq -0{,}936$$

Come si vede:

$$\mathbf{E}\left[u(X)\right] > \mathbf{E}\left[u(Y)\right]$$

Calcoliamo i certi equivalenti e controlliamo che siano nello stesso ordine. Si ha infatti:

$$z\left[X\right] = u^{-1}\left(-0{,}684\right) \simeq 37{,}953$$

e:

$$z\left[Y\right] = u^{-1}\left(-0{,}936\right) \simeq 6{,}615$$

E ora il momento di indicare in quali casi si possa evitare il "distinguo" tra punto di vista del venditore e punto di vista del compratore. Si dimostra (v. [8] che *i due certi equivalenti coincidono se* e *solo se la funzione d'utilità è lineare* o *esponenziale* ossia, a meno di trasformazioni lineari (affini) crescenti, se:

$$u(x) = x \quad \text{oppure} \quad u(x) = -\,e^{-kx}$$

3.3 Concavità dell'utilità e avversione al rischio

L'esempio sopra considerato, di valutazione di una somma aleatoria, ci ha condotti a un certo equivalente ($\simeq$ 38 euro) minore del valore atteso (50 euro). Magari, anche a naso, concordiamo sullo "sconto" di circa 12 euro, usualmente detto *premio per il rischio,* che è uscito nella valutazione di questa specifica somma aleatoria, ma quando si osserva questo buon comportamento del modello? In altri termini, ci chiediamo che forma debba avere la funzione u perché si abbia:

certo equivalente < valore atteso

per qualsiasi ammontare aleatorio.

Una risposta generale al quesito non è difficile.

1. Se la funzione *u è* lineare (affine):

$$u(x) = ax + b$$

certo equivalente e valore atteso coincidono. L'equazione che definisce il certo equivalente di X è infatti:

$$az + b = \mathbf{E}(aX + b)$$

onde z = $\mathbf{E}(X)$. È il caso d'un valutatore neutrale nei confronti del rischio: gli stanno ugualmente bene la somma certa di 50 euro e 100 euro o niente a testa e croce. Questo atteggiamento si osserva quando le somme in gioco sono modeste. Se ci vien proposto di vendere a 5 centesimi una vincita di 10 centesimi o nulla a testa e croce non ci sentiamo né truffati né beneficati. Nessuno, crediamo, giudicherebbe invece indifferente vendere a 50 euro il diritto a vincere a testa o croce 100 euro. Chiunque si libererebbe volentieri della lotteria in cambio dell'ammontare certo.

2. Se la funzione u è concava (verso il basso), e solo in questo caso, il certo equivalente è minore del valore atteso per qualunque ammontare aleatorio[5]. Parliamo, in questo caso, di valutatore avverso al rischio. Funzioni siffatte sono, per es., $-e^{-kx}$ con $k > 0$.

3. Se la funzione u è convessa (cioè concava verso l'alto), e solo in questo caso, la disuguaglianza tra certo equivalente e valore atteso si rovescia. E il caso di valutatori propensi al rischio, che, nel nostro contesto non interessa prendere in considerazione. Funzioni siffatte sono, per es., $-e^{-kz}$ con $k < 0$.

Qualora la funzione u fosse concava in alcuni intervalli e convessa in altri, non sarebbe in generale possibile predire alcunché su disuguaglianze tra certo equivalente e valore atteso.

---

[5] La proposizione, che per brevità non dimostriamo, si chiama comunemente *teorema di Jensen,* ancorché precedentemente provata da B. de Finetti. Si rifletta sulla Fig. 2.2 per convincersi della naturalezza del risultato.

E affatto intuitivo che, quanto più *u è* concava, tanto più rilevante dovrebbe essere la discrepanza tra certo equivalente e valore atteso. Tale differenza è detta *premio per il rischio:*

premio per il rischio = valore atteso - certo equivalente

Di primo acchito si potrebbe pensare di misurare "quanto *u* è concava" prendendone la derivata seconda (se esiste), ma il fatto che a *u* possiamo sostituire una sua trasformazione lineare crescente[6] fa sì che sia opportuno prendere una sorta di "derivata seconda normalizzata". Poiché, in aggiunta, la derivata seconda di una funzione concava è negativa, conviene adottare, come *misura dell'avversione al rischio* la funzione, detta *misura dell'avversione al rischio* nel senso di de Finetti-Arrow-Pratt[7]:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Non occorre mettere a fuoco con precisione il significato di questa quantità. Basta pensarla come descrizione del processo di "tosatura" che, applicato al valore atteso produce il certo equivalente. Vale un importante risultato in proposito: se per due

[6] È quanto riportato sopra in tema di non unicità di *u*.

[7] Essa è nota nella letteratura internazionale come *avversione al* rischio *nel senso di Arrow-Pratt,* che indipendentemente la indicarono nel 1964, ancorché essa già fosse stata proposta nel 1952 da B. de Finetti in [5].

funzioni di utilità u_1, u_2, che generano i certi equivalenti (entrambi del venditore o entrambi del compratore) rispettivi z_1, z_2 di un dato ammontare aleatorio X si ha che:

$$r(x) = \frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} > -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = r_2(x) \qquad\qquad \forall x \in R$$

allora:

$$z_1 < z_2$$

ossia: un valutatore più avverso al rischio di un altro valuta una somma aleatoria a livello inferiore dell'altro.

In molte applicazioni, segnatamente in ambito assicurativo, si accetta, almeno in prima approssimazione, che *r(x)* sia costante, ossia:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = k > 0$$

È analiticamente piuttosto banale, ed è lasciato per esercizio al lettore, provare che ciò accade se e solo se *u è* del tipo[8]:

$$u(x) = -\, e^{-kx}$$

ossia del tipo usato classicamente in teoria delle decisioni (con

[8] L'asserzione vale se $k \neq 0$. Nel caso d'avversione al rischio costante la funzione u è lineare.

k = 1/100). Sarà conveniente, in molti casi, prendere questo tipo di funzione esponenziale per modellare l'atteggiamento di un gestore razionale nei confronti del rischio. Naturalmente sarà cruciale "scegliere bene" k per ottenere uno strumento di valutazione non discordante con la psicologia del valutatore cui si vuole prestare aiuto.

Si ha molto semplicemente una conferma. Riprendiamo l'esempio e valutiamo la stessa somma aleatoria per vari valori di k. Si ottengono questi risultati:

$$\begin{cases} \text{se } k = 1/20 \text{ allora } z = 13{,}729 \\ \text{se } k = 1/40 \text{ allora } z = 24{,}552 \\ \text{se } k = 1/60 \text{ allora } z = 31{,}223 \\ \text{se } k = 1/80 \text{ allora } z = 35{,}299 \\ \text{se } k = 1/100 \text{ allora } z = 38{,}035 \\ \text{se } k = 1/120 \text{ allora } z = 39{,}890 \end{cases} \tag{3.4}$$

Come si vede, **al diminuire dell'avversione al rischio *k* il certo equivalente cresce.**

3.4 Come stimare la funzione d'utilità

Sciogliamo ora un dubbio già sollevato. Valutare somme aleatorie richiede la disponibilità della funzione *u.* Come ottenerne una stima per un decisore? I procedimenti comunemente proposti sono due:

1. Stima per punti della funzione *u* sottoponendo al decisore una sequenza ben orchestrata di lotterie da valutare: "Quale prezzo come minimo chiederesti per vendere il diritto a riscuotere la somma aleatoria con questa distribuzione di probabilità?". Supponiamo di voler stimare *u* nell'intervallo tra 0 e 1.000. Poiché possiamo scegliere arbitrariamente origine ed unità di misura sull'asse dei valori di *u,* scegliamo, p. es.:

$$u(0) = 0 \text{ e } u(1.000) = 100 \qquad (3.5)$$

Sottoponiamo al decisore la lotteria che gli dà 0 o 1.000 con uguale probabilità. Se il valutatore ci dice che, dal suo punto di vista, avere la lotteria o avere 400 certi è indifferente, rivela che:

$$u(400) = \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}u(1.000)$$

onde, rammentando le scelte (3.5):

$$u(400) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}100 = 50$$

Attraverso la valutazione d'una lotteria con vincite 0 e 400 si individua un altro valore assunto da *u*. Con una lotteria con vincite 400 e 1.000 se ne trova un altro e così via. Su intervalli non troppo ampi, già con cinque punti si cattura abbastanza bene la forma di *u*.

2. Assunzione di avversione al rischio costante, almeno su un dato intervallo. Ciò implica utilità esponenziale e si ottiene la stima del parametro *k* chiedendo al decisore di valutare *un'unica somma aleatoria.*

In molti casi conviene pragmaticamente accettare la procedura 2 e pensar d'ottenere una stima di massima del parametro *k* dal prezzo che un decisore attribuisce ad una somma aleatoria.

L'equazione che ci ha consentito di determinare i vari certi equivalenti della (3.4) e:

$$-e^{-kz} = \frac{e^{-0 \cdot k} - e^{-100 \cdot k}}{2} \qquad (3.6)$$

ove assumevamo *k* dato e ci interessava determinare il valore del certo equivalente *z*. Si tratta di muovere da *z* noto: il decisore lo dichiara e si propone di determinare, in corrispondenza, il valore dell'avversione al rischio *k*. Quindi avremo, risolvendo rispetto a *k*:

$$2e^{-kz} = 1 + e^{-100k}$$

che è impossibile risolvere esplicitamente, ma che non presenta problemi dal punto di vista numerico.

La seguente tabella fornisce, per vari valori del certo equivalente *z* che un ipotetico valutatore può enunziare, i corrispondenti valori del parametro *k* per una funzione d'utilità con argomento espresso in milioni:

$$\begin{cases} z = 24 \text{ milioni } \Rightarrow = 0{,}024 \\ z = 30 \text{ milioni } \Rightarrow = 0{,}018 \\ z = 35 \text{ milioni } \Rightarrow = 0{,}013 \\ z = 40 \text{ milioni } \Rightarrow = 0{,}008 \end{cases}$$

Come si controlla facilmente, al crescere del certo equivalente diminuisce la corrispondente avversione al rischio.

E così possibile, attraverso la valutazione di una somma aleatoria con una semplicissima distribuzione di probabilità, stimare il parametro *k* e "inferirne" l'intiera funzione *u,* che descrive efficacemente come un determinato soggetto si atteggi nei confronti del rischio. E chiaro che disponendo di tale funzione possiamo poi usarla *invece* del decisore per valutare ammontari aleatori in situazioni ben più complesse.

A scopo illustrativo abbiamo mostrato come approssimare *k* "prendendo le misure" su somme da incassare. Nel caso della gestione del rischio può apparire più immediato fare riferimento a possibili esborsi. Il seguente esempio numerico mostra come procedere da questo punto di vista.

Esempio - Un rischio X può comportare le seguenti uscite, con relative probabilità:

$$X \sim \begin{cases} \text{Valori} \rightarrow & 10 \quad 0 \\ \text{probabilità} \rightarrow & 10\% \quad 90\% \end{cases}$$

e quindi, il valore atteso dell'esborso è **E**(X) = 10. 10% + 0,90% =1. Un soggetto è disposto ad assicurarsi contro questo rischio pagando al massimo un premio di 1,16. Assumiamo che il suo atteggiamento nei confronti del rischio sia descritto dalla funzione:

$$u(x) = -e^{-kx}$$

ove k *è* il parametro positivo che misura la sua avversione al rischio. L'equazione che sancisce indifferenza tra le situazioni di non copertura e di copertura con premio massimo è:

$$u(-1{,}167) = u(-10) \cdot 10\% + u(0) \cdot 90\%$$

ossia:

$$-e^{-k\,(-1{,}16)} = -\, e^{-k\,\cdot\,(-10)} \cdot 90\%$$

Con metodi numerici si ottiene:

$$k \simeq 0{,}0020699$$

Come si vede, dalla valutazione del premio massimo per una copertura assicurativa abbiamo ricavato una stima per la deformazione sotto incertezza fatta dal decisore.

Rammentiamo infine che la struttura descritta si riferisce a scelte relative a somme aleatorie disponibili o dovute *ad una certa data.* Per la valutazione di somme aleatorie distribuite nel tempo l'apparato necessario è ben più complesso.