Statistica
A.A. 2019/2020
CdL Scienze Economiche

Prof. Massimiliano Ferrara
Dott. Bruno Antonio Pansera

Lezione n.5-TEST


1773
TLÍNG
TLÍNG
IL PEGGIO È CHE QUESTO FINALE INDECISO MI HA FATTO DIMENTI-CARE COSA DOVEVO DECIDERE
©QUINO

Operazioni con gli Eventi

- somma logica (o unione): $A \cup B$
- prodotto logico (o intersezione): $A \cap B$
- evento contrario il complementare di *A* rispetto a *S*: $\overline{A}$
- *A* e *B* si dicono incompatibili (o mutuamente esclusivi) se $\boxed{A \cap B = \varnothing}$

Relazioni Elementari

- Probabilità del complementare

$$\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)} \Rightarrow \boxed{P(\varnothing) = 0}$$

- Monotonia

$$E_2 \subset E_1 \Rightarrow \boxed{P(E_1) \geq P(E_2)}$$

- Unione e intersezione

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

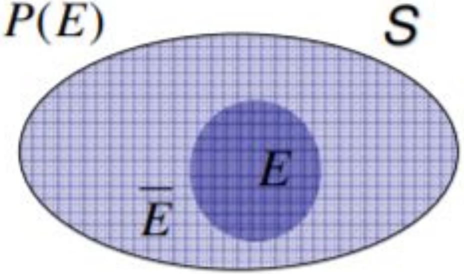
Relazioni elementari

- Probabilità del complementare

E ed $\overline{E}$ sono eventi incompatibili

$$1 = P(S) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

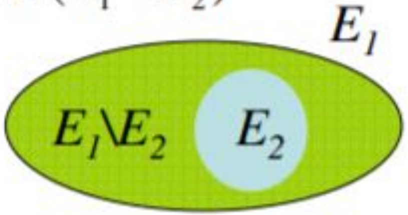
$$\Rightarrow \quad \boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$



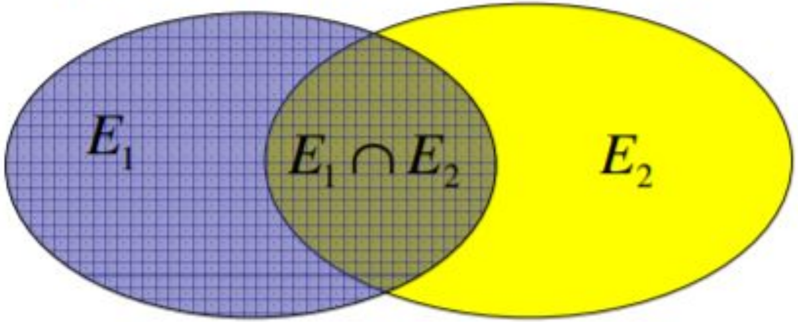
- Monotonia

Se $E_2 \subset E_1$, $P(E_1) = P(E_2) + P(E_1 - E_2)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(E_1) \geq P(E_2)}$$



Relazioni elementari



$$P(E_1) = P(E_1 - E_2) + P(E_1 \cap E_2) \qquad +$$

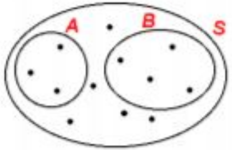
$$P(E_2) = P(E_2 - E_1) + P(E_1 \cap E_2) \qquad -$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 - E_2) + P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 - E_1) \qquad =$$

$$P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 \cap E_2)$$

Due eventi si dicono ***incompatibili*** se non possono verificarsi contemporaneamente.

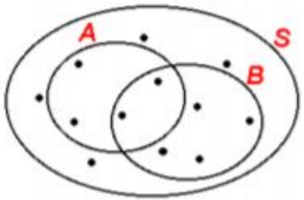
Estraendo una carta da un mazzo di 40, i due eventi:
E_1 = "Esce l'asso di cuori"
E_2 = "Esce una figura"
sono incompatibili.



Due eventi sono, invece, ***compatibili*** se c'è anche una sola possibilità che possano verificarsi simultaneamente, in una data prova.

Estraendo una carta da un mazzo di 40,

i due eventi:
E_1 = "Esce una figura"
E_2 = "Esce una carta di cuori"
sono compatibili perché in una estrazione potrebbe uscire una figura di cuori.



Somma Logica di Eventi

Consideriamo 12 gettoni numerati e sia

E_1= esce un multiplo di 5

E_2= esce un multiplo di 3

Casi favorevoli per E_1; A=$\{5, 10\}$ $\rightarrow$ $p(E_1)$=2/12=1/6

Casi favorevoli per E_2; B=$\{3, 6, 9, 12\}$ $\rightarrow$ $p(E_2)$=4/12=1/3

E= esce un numero multiplo di 3 **o** di 5

L'insieme dei casi favorevoli, per definizione del connettivo logico o, è l'unione dei due insiemi precedenti

$$A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$$

Quindi $p(\mathrm{E})= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Dal momento che $\frac{6}{12} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12}$, sembrerebbe ovvio dedurre che allora

$$p(E) = p(E_1) + p(E_2)$$

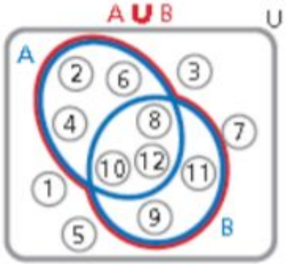
Ma è sempre così?? Vediamo un altro esempio

Somma Logica di Eventi

Consideriamo 12 gettoni numerati e sia
E_1= esce un numero pari
E_2= esce un numero maggiore di 7
Casi favorevoli per E_1; A=$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \rightarrow p(E_1)$=6/12=1/2
Casi favorevoli per E_2; B=$\{ 8, 9, 10, 11, 12\} \rightarrow p(E_2)$=5/12
E= esce un numero pari **o** un numero maggiore di 7
L'insieme dei casi favorevoli, per definizione del connettivo logico o, è l'unione dei due insiemi precedenti

$$A \cup B = \{2,4,6,8,9,10,11,12\}$$

Quindi p(E)= $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
Si noti che $p(E) \neq p(E_1) + p(E_2)$
Cosa cambia nei due esempi??



Algebra della probabilità: somma logica

Consideriamo un evento più complesso, come l'estrazione di "*un asso **o** una figura*" da un mazzo di 40 carte: esso si verifica se si verifica uno dei due eventi E_1: "esce un asso" oppure E_2: "esce una figura".

Si definisce tale evento come **somma logica** dei due eventi e si indica con $E_1 \cup E_2$; la sua probabilità è $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

In questo esempio:

$$P(E_1) = \frac{4}{40}; \quad P(E_2) = \frac{12}{40}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{40} + \frac{12}{40} = \frac{16}{40}$$

Ma… attenzione!

Questo vale solo se gli eventi E_1 ed E_2 non possono verificarsi contemporaneamente, cioè se gli insiemi E_1 ed E_2 non hanno elementi in comune. In questo caso si dicono ***eventi disgiunti*** o ***incompatibili.***

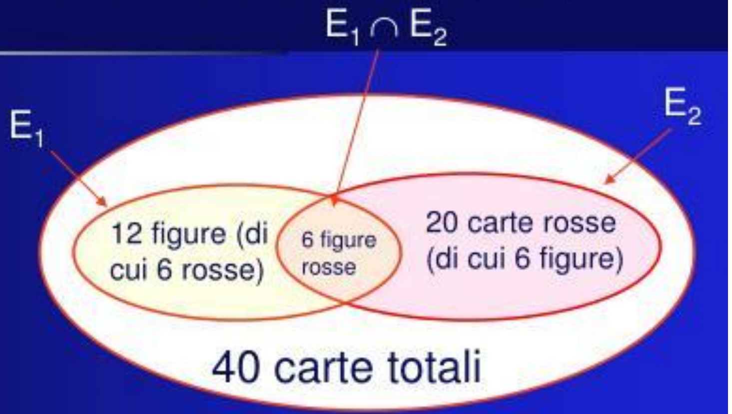
Probabilità della somma logica di eventi incompatibili:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Somma logica di eventi compatibili

Se gli eventi E_1 ed E_2 possono verificarsi contemporaneamente, si dicono eventi ***compatibili***. Ad esempio, l'evento "*da un mazzo di 40 carte estraggo una figura o una carta rossa*" è composto dagli eventi compatibili E_1: "estraggo una figura" ed E_2: "estraggo una carta rossa"; la carta estratta potrebbe essere una figura rossa. Ma qual è la probabilità di due eventi compatibili? Quanto vale ora $P(E_1 \cup E_2)$?

Se applichiamo la formula di prima, contiamo due volte gli eventi compatibili (contenuti sia in E_1 che in E_2): si evita questo errore dicendo che gli eventi favorevoli sono quelli di E_1 più quelli di E_2 meno quelli contenuti in entrambi gli insiemi, cioè $E_1 \cap E_2$.



Probabilità della somma logica di eventi compatibili:

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

Nel nostro esempio, si ha:

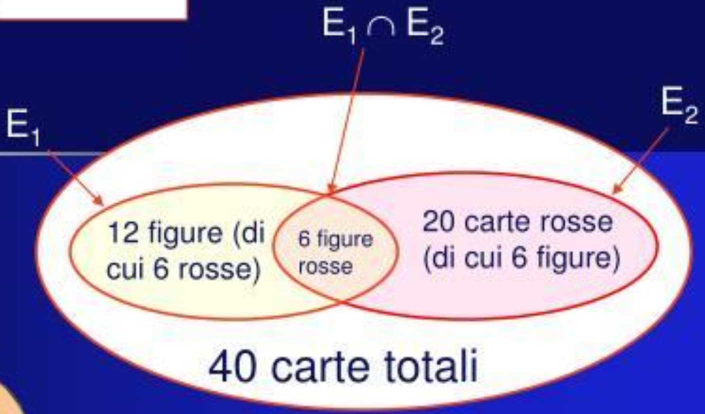
$$P(E_1)=\frac{12}{40};\quad P(E_2)=\frac{20}{40};\quad P(E_1\cap E_2)=\frac{6}{40}$$

$$P(E_1\cup E_2)=\frac{12}{40}+\frac{20}{40}-\frac{6}{40}=\frac{26}{40}$$

La probabilità di questo evento **non** è 32/40, ma solo 26/40.

Gli eventi compatibili hanno una probabilità totale che è minore della somma delle loro singole probabilità.

Se non ne tenessimo conto, potremmo costruire eventi con probabilità maggiore di uno, oppure metodi "sicuri" per vincere al gioco (che ci farebbero perdere un sacco di soldi…!)



Probabilità della somma logica di eventi compatibili:

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$$

Somma Logica di Eventi

Qual è la probabilità di estrarre una carta di <u>spade</u> oppure una <u>figura</u>?

Dato che le figure sono 12, è corretto affermare che la probabilità dell'evento atteso è

$$\frac{10}{40} + \frac{12}{40} = \frac{22}{40} \; ?$$

Proviamo a contare il numero dei casi favorevoli: tutte le 10 carte di spade e 9 figure rimanenti, dunque la probabilità dell'evento atteso è $\frac{19}{40}$. Come si giustifica questa discrepanza?

Somma Logica di Eventi

Qual è la probabilità di estrarre una carta di spade oppure una figura?

Dato che le figure sono 12, è corretto affermare che la probabilità dell'evento atteso è

$$\frac{10}{40} + \frac{12}{40} = \frac{22}{40} \ ?$$

Proviamo a contare il numero dei casi favorevoli: tutte le 10 carte di spade e 9 figure rimanenti, dunque la probabilità dell'evento atteso è $\frac{19}{40}$. Come si giustifica questa discrepanza?

Somma Logica di Eventi

Il punto è che nella prima valutazione non si è tenuto conto che anche tra le spade ci sono delle figure e quindi abbiamo contato le figure delle spade **due volte**. Quindi la prima valutazione deve essere corretta in questo senso

$$\frac{10}{40}+\frac{12}{40}-\frac{3}{40}=\frac{19}{40}$$

Teorema della probabilità totale

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) - p(A \text{ e } B)$$
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Se i due eventi sono incompatibili (come, nel primo caso, l'uscita delle spade e dei bastoni) allora $p(A \; e \; B) = 0$ e quindi vale il caso particolare

$$p(A \; o \; B) = \mathrm{p(A)} + \mathrm{p(B)}$$

Esercizi

3 Un sacchetto contiene 20 dischi, numerati da 1 a 20. Calcola la probabilità di pescare:

a) un disco con un multiplo di 10 o con due cifre uguali;

b) un disco con un multiplo di 4 o di 6.

$\left[a) \frac{3}{20}; b) \frac{7}{20}\right]$

4 Un'urna contiene 3 palline rosse, 3 palline verdi, 5 cubetti rossi e 2 cubetti blu. Calcola la probabilità di estrarre:

a) una pallina o un oggetto blu;

b) una pallina o un oggetto rosso.

$\left[a) \frac{8}{13}; b) \frac{11}{13}\right]$

5 Un pacchetto di caramelle contiene 3 caramelle alla fragola, 4 all'arancia, 3 alla menta e 2 al limone. Calcola la probabilità di prendere una caramella al limone o all'arancia.

$\left[\frac{1}{2}\right]$

6 Un pacco di biscotti ne contiene 100. Metà sono alle mandorle e metà al cacao. Di ogni gusto, metà sono tondi e metà rettangolari. Calcola la probabilità che hai di prendere un biscotto alle mandorle o un biscotto di forma rettangolare.

$\left[\frac{3}{4}\right]$

Prodotto logico di eventi

evento intersezione

Consideriamo 12 gettoni numerati e sia

E_1= esce un numero pari

E_2= esce un numero maggiore di 7

Casi favorevoli per E_1; A=$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \rightarrow p(E_1)$=1/2

Casi favorevoli per E_2; B=$\{ 8, 9, 10, 11, 12\} \rightarrow p(E_2)$=5/12

E= esce un numero pari **e** un numero maggiore di 7

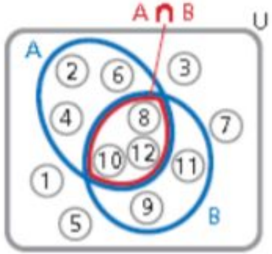
L'insieme dei casi favorevoli, per definizione del connettivo logico e, è l'intersezione dei due insiemi precedenti

$$A \cap B = \{8, 10, 12\}$$

Quindi $p(\mathrm{E}) = p(E_1 \ \cap \ E_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

mentre

$p(E_1) \cdot p(E_2) = 5/24$



Prodotto logico di eventi

evento intersezione

Consideriamo 12 gettoni numerati e sia

E_1= esce un multiplo di 5

E_2= esce un multiplo di 3

Casi favorevoli per E_1; A=$\{5, 10\} \rightarrow p(E_1)$=2/12=1/6

Casi favorevoli per E_2; B=$\{ 3, 6, 9, 12\} \rightarrow p(E_2)$=4/12=1/3

E= esce un numero multiplo di 3 **e** di 5

L'insieme dei casi favorevoli, per definizione del connettivo logico e, è l'intersezione dei due insiemi precedenti

$$A \cap B = \emptyset$$

Sempre? E se i gettoni fossero 18?

Quindi $p(E_1 \cap E_2)= 0$

mentre si ha $p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{1}{18}$

Nel caso dei **12** gettoni, i due eventi

E_1= esce un multiplo di 5

E_2= esce un multiplo di 3

sono incompatibili. Di certo, nel caso di eventi incompatibili, non vale la regola del prodotto logico: $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$

Ma allora, quando rimane valida?

Per dare una risposta dobbiamo fare un'ulteriore distinzione negli eventi compatibili tra *eventi indipendenti ed eventi dipendenti*

Eventi indipendenti

Attenzione:
Indipendenti non vuol dire incompatibili!

Due eventi compatibili E_1e E_2si dicono **indipendenti** se il fatto che si verifichi E_1non altera la probabilità che si verifichi E_2.

Ad es., se lanciamo due dadi, gli eventi

E_1= esce un 2 nel primo dado

E_2=esce un 5 nel secondo dado

sono indipendenti. In questo casi vale il *Teorema del prodotto per eventi compatibili e indipendenti (o Teorema della probabilità composta)*

Teorema della probabilità composta

$$p(A\ e\ B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Il prodotto logico di eventi

Abbiamo così introdotto il cosiddetto ***prodotto logico*** di eventi: è l'evento che si verifica se si verificano contemporaneamente sia l'evento E_1 che l'evento E_2; nel linguaggio degli insiemi (e della logica) si indica con $E_1 \cap E_2$.

Se il verificarsi di E_1 non influenza E_2 e viceversa, i due eventi sono ***indipendenti*** e il calcolo di $P(E_1 \cap E_2)$ si riduce al prodotto di $P(E_1)$ e $P(E_2)$:

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)}$$

Probabilità del prodotto logico di eventi indipendenti

Tirando una moneta e un dado la probabilità di avere "croce e un sei" è 1/12, dato che si devono verificare entrambi gli eventi la cui probabilità è rispettivamente 1/2 e 1/6, e che sono manifestamente indipendenti.

$P(E_1) = 1/2$

$P(E_2) = 1/6$

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}}$$

Esercizi

esercizio 1

Trovare la probabilita', estraendo una carta da un mazzo di 40, e rimettendo la carta nel mazzo prima della seconda estrazione, di estrarre due volte l'asso di bastoni

esercizio 2

Abbiamo un'urna con 10 palline bianche, 20 rosse e 30 nere: trovare la probabilita' di estrarre successivamente due palline bianche senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna

Es 3) Nel gioco della roulette vi sono 36 numeri piu' lo zero

Trovare la probabilita' alla roulette di fare due volte "en plein" su due giocate successive puntando sul numero 3 Attenzione: "En plein" e' l'uscita del numero che si e' puntato

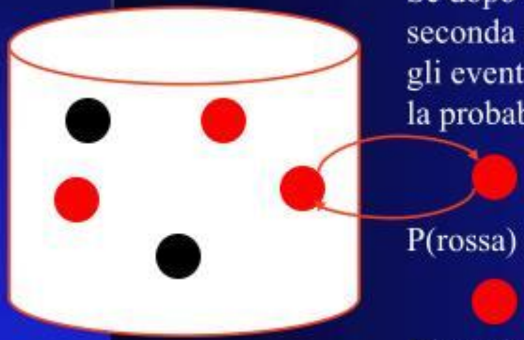
Eventi dipendenti

Accade spesso che il verificarsi di un evento possa influenzare un secondo evento, modificandone la probabilità. In tal caso, gli eventi si dicono ***dipendenti*** e la probabilità del loro prodotto logico è diversa da quella degli eventi indipendenti.

Un esempio che aiuta a capire questa differenza è quello dell'estrazione con o senza reimbussolamento.

Un'urna contiene due palline nere e tre rosse; estraendo successivamente due palline, qual è la probabilità che entrambe siano rosse?

Se dopo la prima estrazione rimettiamo la pallina nell'urna , la seconda estrazione avverrà nelle stesse condizioni della prima: gli eventi sono completamente indipendenti l'uno dall'altro e la probabilità totale è il prodotto di due valori identici.



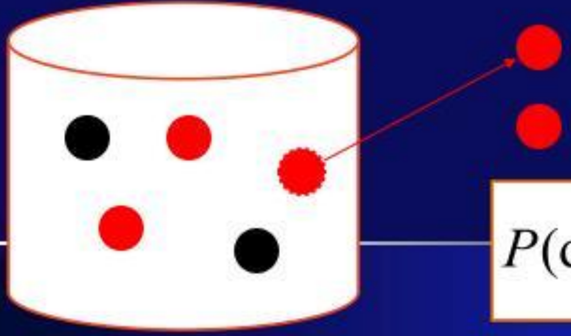
P(rossa) = 3/5

P(rossa) = 3/5

$$P(\text{due rosse}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

I due eventi sono indipendenti

Ma se dopo la prima estrazione **non** rimettiamo la pallina nell'urna, la probabilità che alla seconda estrazione si ottenga una pallina rossa è diversa: ora l'urna ne contiene solo quattro, di cui due rosse e due nere, e la probabilità cambia.



P(prima pallina rossa) = 3/5

P(seconda pallina rossa) = 2/4

$$P(\text{due rosse}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Eventi dipendenti o correlati

Il verificarsi del primo evento influenza la probabilità del secondo evento, e dunque i due eventi sono **dipendenti** o **correlati**.

Il nostro risultato è corretto: lo si può ottenere applicando la definizione classica di probabilità e il calcolo combinatorio, dividendo il numero dei casi favorevoli $C_{3,2}$ per il numero dei casi possibili $C_{5,2}$.

$$P(\text{due rosse}) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{C_{3,2}}{C_{5,2}} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$$

Probabilità Condizionata

Abbiamo un mazzo di carte da 40. Estraendo due carte in successione, senza rimettere la prima carta estratta nel mazzo, i due eventi:
E_1 = "La prima carta estratta è un asso"
E_2 = "La seconda carta estratta è un asso"
sono dipendenti.

Per la precisione la probabilità di E_2 dipende dal verificarsi o meno di E_1.
Infatti:
a) la probabilità di E_1 è 4/40
b) la probabilità di E_2, se la prima carta era un asso, è 3/39
c) la probabilità di E_2, se la prima carta non era un asso, è 4/39

Probabilità Condizionata

Vediamo questo esempio. Nel portamonete ho 2 monete da 2 euro e 1 moneta da 1 euro. Qual è la probabilità di estrarre come prima e seconda moneta le due monete da 2 euro?

E_1 : prima pesca di una moneta da 2 euro

E_2 : seconda pesca di una moneta da 2 euro

Per valutare la probabilità del primo evento, interviene la definizione classica

$$p(E_1) = \frac{2}{3}$$

Prima di precipitarsi ad affermare che la probabilità è la stessa per il secondo evento, bisogna riflettere un poco.

Probabilità Condizionata

Se suppongo che si sia verificato E_1, nel mio portamonete sarà rimasta una moneta da 2 euro e una moneta da 1 euro, dunque la probabilità di pescare la moneta da 2 euro questa volta è 1/2

$$p(E_2) = \frac{1}{2} \text{ e } \textbf{non più } \frac{2}{3}!!$$

In questo caso, per sottolineare la dipendenza di E_2da E_1, la notazione diventa

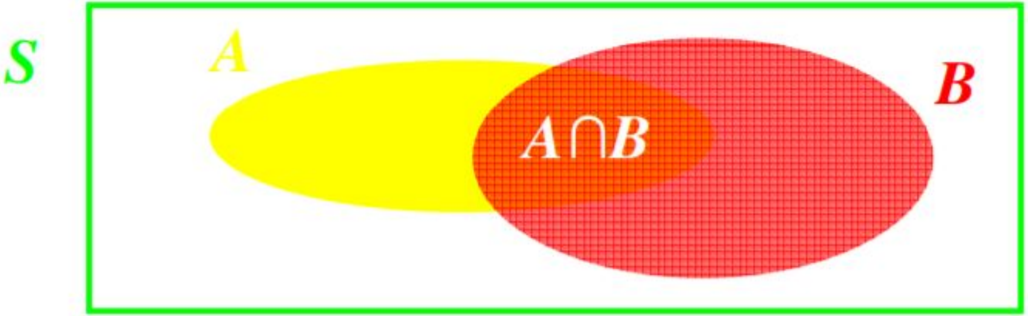
$$p(E_2/E_1) = \frac{1}{2}$$

e si legge *probabilità di* E_2*condizionata a* E_1

Probabilità Condizionata: Definizione

Si definisce **probabilità di un evento A condizionata (o subordinata)** all'evento *B*, e s'indica *P(A / B)*, la probabilità del verificarsi di *A* nell'ipotesi che *B* si sia verificato.

Probabilità Condizionata: Definizione



Dobbiamo restringere a B lo spazio campionario e ridefinire su B la probabilità. La sola parte di A significativa resta $A \cap B$.

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilità Condizionata

Due eventi A e B si dicono (stocasticamente) indipendenti quando la conoscenza del verificarsi di uno dei due non dà alcuna informazione sul verificarsi dell'altro.

Due eventi A e B si dicono (stocasticamente) indipendenti quando si verifica una delle due condizioni equivalenti

$$P(A) = P(A \mid B) \quad \text{o} \quad P(B) = P(B \mid A)$$

Teorema della Probabilità Composta

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B) = P(B \mid A)\, P(A).$$

la probabilità che due eventi si verifichino contemporaneamente è pari alla probabilità di uno dei due eventi moltiplicato con la probabilità dell'altro evento condizionato al verificarsi del primo

Teorema della Probabilità Marginale

$$P(B) = P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid \bar{A})\, P(\bar{A})$$

Questa formula può essere dimostrata, sfruttando le proprietà delle operazioni fra eventi e della probabilità, attraverso i seguenti passaggi:

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P[B \cap (A \cup \bar{A})] = P[(B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})] = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid \bar{A})\, P(\bar{A}),$$

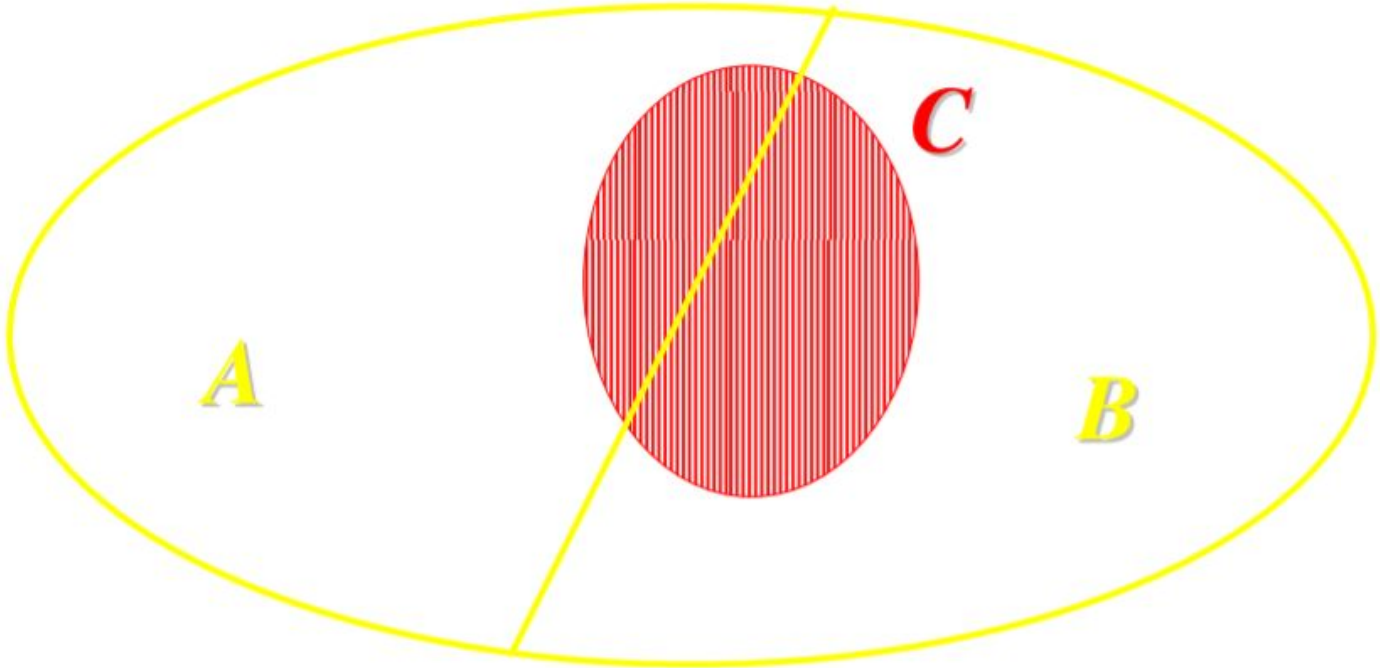
dove fra le altre cose oltre alla formula di probabilità composte si sfrutta il fatto che $(B \cap A)$ e $(B \cap \bar{A})$ sono incompatibili (lo si può verificare utilizzando i diagrammi di Venn).

Probabilità Condizionata: Esempio

9 studenti: 4 maschi e 5 femmine partecipano ad un concorso. Una delle femmine : Maria ha la probabilità di vincita di 1/9. Prima dell'uscita dei risultati trapela la notizia che la vincitrice è una femmina. La probabilità di vincita di Maria adesso è 1/5 perché nel concorso c'erano 5 femmine. L'informazione extra che la vincitrice è una femmina, ha cambiato la probabilità di vincita di Maria. Sia A l'evento "Maria ha vinto" e B l'evento "una femmina ha vinto", allora la probabilità dell'evento A condizionato del evento B è *P(A|B)* è rappresenta la probabilità che l'evento A si verifica dato che B si è verificato.

- $P(A \cap B) = P(A) = 1/9$,
- $P(B) = 5/9$,
- $P(A \mid B) = (1/9)/(5/9) = 1/5$.

Teorema di Bayes



Teorema di Bayes

Sia { A, B } una partizione dell'insieme campionario, cioè una coppia di eventi tali che

$$A \cup B = S \quad e \quad A \cap B = \varnothing$$

Supponiamo di conoscere P(A)>0 e P(B)>0

Sia C un terzo evento del quale si conoscono

$$P(C \mid A) \text{ e } P(C \mid B)$$

Teorema di Bayes

Se si verifica C, qual è la probabilità che si sia verificato A?

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C \mid A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C \mid A) \cdot P(A)}{P(C \cap A) + P(C \cap B)}$$

$$= \frac{P(C \mid A) \cdot P(A)}{P(C \mid A) \cdot P(A) + P(C \mid B) \cdot P(B)}$$

Teorema di Bayes

Sia $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ una partizione si S, cioè una collezione di eventi tali che

$$E_i \cap E_j = \varnothing \quad se \quad i \neq j \quad e \quad \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

Allora, se $P(E_i)>0$ per ogni i ed A è un evento con $P(A)>0$ vale la formula

Cause

$$P(E_j | A) = \frac{P(A | E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A | E_i) \cdot P(E_i)}$$

Effetto

Teorema di Bayes: Esempio 1

Una malattia colpisce 1 persona su 100.

Un test dà esito positivo nel 98% dei casi su persone effettivamente malate e nello 0,5% dei casi su persone che invece stanno bene.

Se una persona fa il test, che probabilità p ha di essere davvero malata se il test dà esito positivo?

- p(M/P): p che la persona sia malata posto che il test sia positivo
- 1/100: p di incidenza della malattia
- 98/100: incidenza di positività sui malati
- 99/100 (cioè 1-1/100): incidenza sulla non-malattia
- 5/1000: esito positivo sui sani

Teorema di Bayes: Esempio 1

$$p(M/P) = \frac{\frac{1}{100} * \frac{98}{100}}{(\frac{1}{100} * \frac{98}{100}) + (\frac{99}{100} * \frac{5}{1000})} = \frac{980}{1475} = 66{,}4\%$$

Teorema di Bayes: Esempio 2

In un caso di omicidio ci sono due sospetti, A e B, considerati dalla polizia "ugualmente sospettati". Sul luogo del delitto sono stati rinvenuti dei capelli non appartenenti alla vittima, e quindi appartenenti al colpevole. La prova del DNA sui capelli e sui due sospetti ha portato alla conclusione che il DNA ritrovato potrebbe appartenere all'80% ad A e al 50% a B. Qual'è la probabilità che sia A il colpevole alla luce dell'analisi del test sul DNA? E che sia B?

Sappiamo: $P(A) = P(B) = 0{,}5$ $\quad P(test|A) = 0{,}80$ e $P(test|B) = 0{,}50$

Allora: $P(test|A)P(A) + P(test|B)P(B) = 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}65$ e

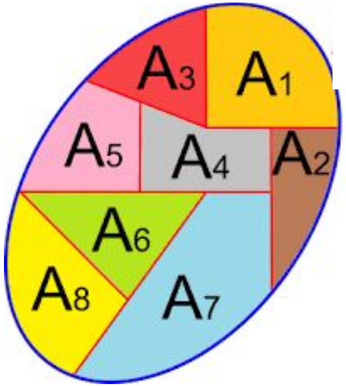
$$P(A|test) = 0{,}8x0{,}5/0{,}65 = 0.6$$

$$P(B|test) = 0{,}5x0{,}5/0{,}65 = 0{,}4$$

Teorema di Bayes: Generalizzazione

La formula della probabilità marginale può essere estesa anche ad una partizione dello spazio campionario $\boldsymbol{\Omega}$ più “fine” di quella vista in precedenza fra A e $\bar{A}$. Il termine “più fine” in matematica indica la ricchezza di elementi: tanto più fine è una famiglia di insiemi tanto è più ricca in termini di numero di elementi presenti. Ricordiamo che una partizione di un insieme $\boldsymbol{\Omega}$, spazio campione, (ma la definizione di partizione vale per un qualsiasi evento B) è una suddivisione di tale spazio in tanti eventi A_1, A_2, ..., A_k che siano esaustivi ed incompatibili:

- esaustivi in quanto devono esaurire $\boldsymbol{\Omega}$, cioè la loro unione deve coincidere con tale spazio.
- gli eventi non devono avere punti campionari in comune.



Teorema di Bayes: Generalizzazione

La formula della probabilità marginale

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

La formula di Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{P(B)}$$

dove P(B) viene definita dalla formula precedente.

- P(Ai|B) è detta ***probabilità a posteriori*** della causa Ai;
- P(Ai) è detta ***probabilità a priori*** della stessa causa e
- P(B|Ai) è detta *verosimiglianza* dell'evento B.

Esercizi

Esercizio A

In un'azienda ci sono due macchine che vengono utilizzate quotidianamente. Nel corso di una giornata la probabilità che si rompa la prima è 0,1 e che si rompa la seconda 0,15. Le due macchine possono rompersi indipendentemente l'una dall'altra.

- Qual è la probabilità che nel corso di una giornata non si rompa nessuna macchina?
- Qual è la probabilità che nel corso di una giornata si rompa almeno una macchina?
- I due eventi considerati al punto 1 e 2 sono indipendenti? Sono incompatibili?

Esercizio B

Un dado regolare viene lanciato due volte. Nell'ipotesi che si sappia che il punteggio totale dei due lanci è 6 qual è la probabilità che il punteggio del primo lancio sia stato 3?

Esercizi

Esercizio C

Tra i partecipanti ad un concorso per giovani musicisti, il 50% suona il pianoforte, il 30% suona il violino ed il restante 20% suona il violoncello. Inoltre, partecipano per la prima volta ad un concorso il 10% dei pianisti, il 33% dei violinisti ed il 10% dei violoncellisti.

- Scelto a caso un partecipante, qual è la probabilità che sia al suo primo concorso?
- Sapendo che il partecipante scelto è al suo primo concorso, qual è la probabilità che sia un violoncellista?
- Sapendo che il partecipante scelto non è al suo primo concorso, qual è la probabilità che sia un violoncellista?
- Si stabilisca se sono incompatibili gli eventi “suonare il piano” e “partecipare per la prima volta ad un concorso”, motivando la risposta