Università degli Studi
Mediterranea
di Reggio Calabria

DECISIONS_LAB
FOR COVID-19

Corso di Matematica per l'Economia

ESERCITAZIONE STUDIO DI FUNZIONE

Parte 1

Prof. **Massimiliano Ferrara**
Prof. **Bruno Antonio Pansera**

A cura della Dott.ssa **Mariangela Gangemi**

Anno Accademico 2020-2021

DIPARTIMENTO DI ECCELLENZA
DiGiES
DIPARTIMENTO
GIURISPRUDENZA
ECONOMIA
SCIENZE UMANE
International Program
Terza Missione

Esercizio 1

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = 3x^4 + 4x^3 + 1$$

1. **Dominio**

$$\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \left]-\infty; +\infty\right[$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = 3(-x)^4 + 4(-x)^3 + 1 = 3x^4 - 4x^3 + 1 \neq f(x)$$

La funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezione con gli assi

ASSE X

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 3x^4 + 4x^3 + 1 \end{cases}$$

$3x^4 + 4x^3 + 1 = 0$

Poiché si tratta di una equazione di quarto grado, si risolve applicando la Regola di Ruffini:

$N\colon \pm 1$
$D\colon \pm 1;\ \pm 3$
$\frac{N}{D} = \pm 1; \pm \frac{1}{3}$

$P(-1) = 3(-1)^4 + 4(-1)^3 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$

	3	4	0	0	1
-1		-3	-1	1	-1
	3	1	-1	1	0
-1		-3	2	-1	
	3	-2	1	0	

$(x + 1)(3x^3 + x^2 - x + 1) = 0$

Si tratta di un polinomio di terzo grado, pertanto per abbassare di grado si applica ancora la Regola di Ruffini:

$$P(-1) = 3(-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = -3 + 1 + 1 + 1 = 0$$

Nella scomposizione si avrà:

$$(x+1)^2(3x^2 - 2x + 1) = 0$$

Si eguaglia a zero ogni singolo fattore:

1° Fattore: $(x+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

2° Fattore: $3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad Impossibile$

Il grafico della funzione ha un solo punto di intersezione con l'asse *x*: $A(-1; 0)$.

ASSE Y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3x^4 + 4x^3 + 1 \end{cases}$$

Il grafico della funzione ha un solo punto di intersezione con l'asse *y*: $\mathrm{B}(0; 1)$.

4. Segno della funzione

$3x^4 + 4x^3 + 1 > 0$

$(x+1)^2(3x^2 - 2x + 1) > 0$

1° Fattore: $(x+1)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2° Fattore: $3x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione è sempre positiva.

5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^4 + 4x^3 + 1) = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 \left(\frac{3x^4}{x^4} + \frac{4x^3}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) = (-\infty)^4 \cdot 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^4 + 4x^3 + 1) = +\infty + \infty = +\infty$$

Non esistono Asintoti Orizzontali, potrebbero esistere gli Asintoti Obliqui.

$$y = mx + q$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+4x^3+1}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} (12x^3 + 12x^2) = -\infty + \infty$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(\frac{12x^3}{x^3} + \frac{12x^2}{x^3}\right) = (-\infty)^3 \cdot 12 = -\infty$$

Non esistono asintoti obliqui a sinistra. In maniera analoga si può vedere che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4+4x^3+1}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} (12x^3 + 12x^2) = +\infty$$

Non esistono asintoti obliqui a destra.

6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$y' = 12x^3 + 12x^2$

$y' \geq 0$

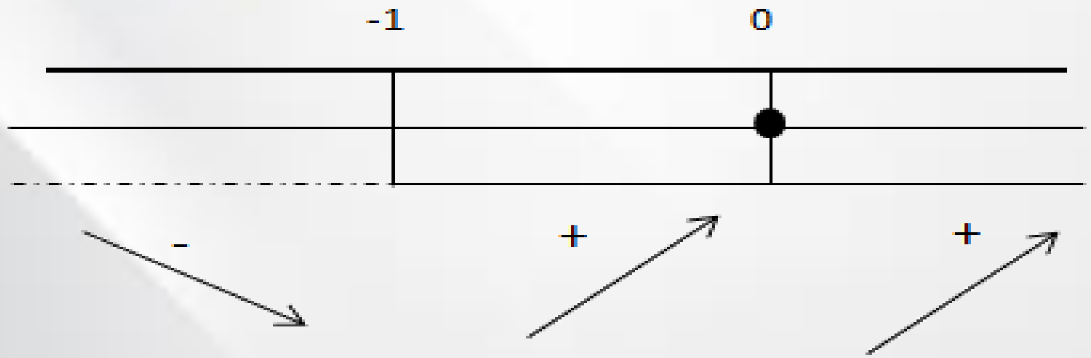
$$12x^3 + 12x^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \quad x^2(x+1) \geq 0$$

1° Fattore: $x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in D$

2° Fattore: $x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq -1$

$x = -1$ è un punto di minimo relativo $A(-1; 0)$.

$x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale $B(0; 1)$.



7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$y'' = 36x^2 + 24x$

$y'' \geq 0$

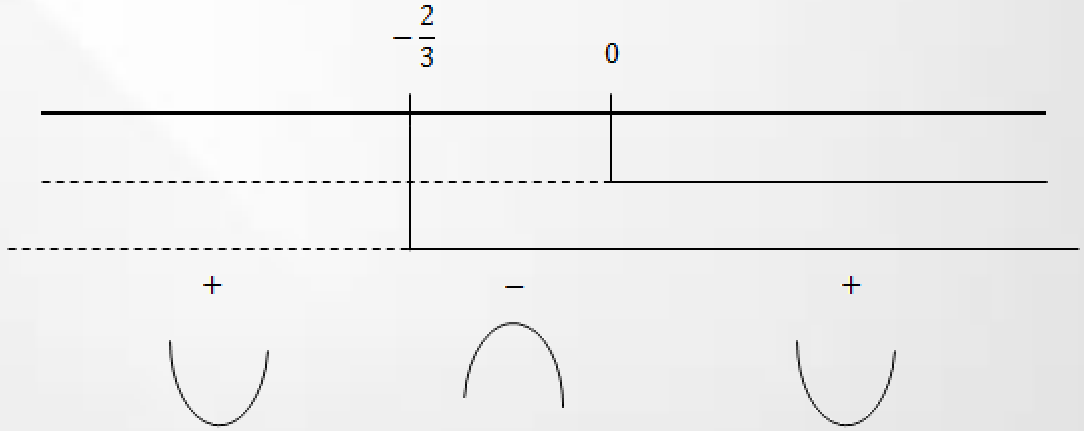
$36x^2 + 24x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x(3x+2) \geq 0$

1° Fattore: $x \geq 0$

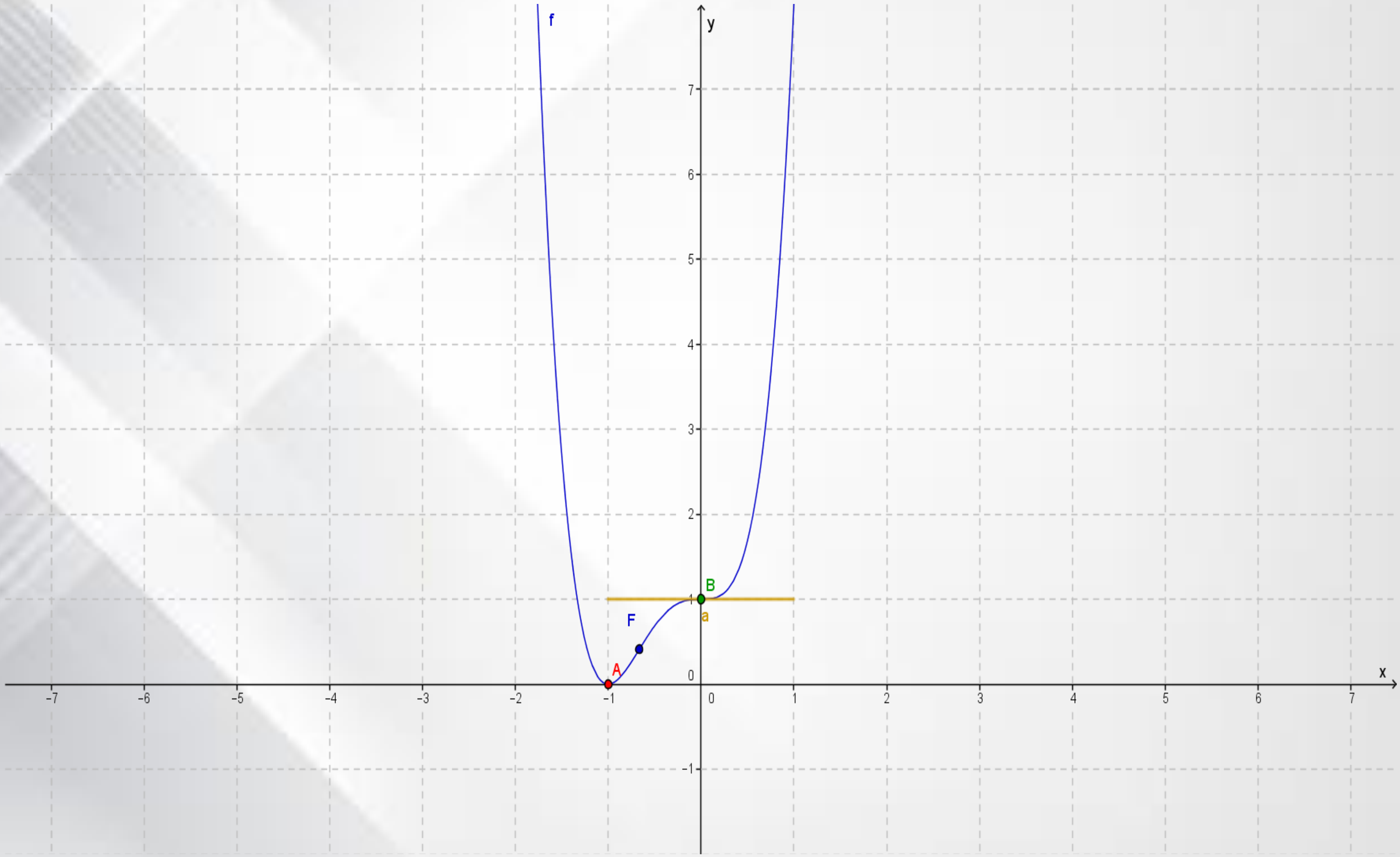
2° Fattore: $3x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{2}{3}$

$x = -\frac{2}{3}$ è un punto di flesso.

$F\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{27}\right)$



Il grafico è riportato nella seguente figura:



Esercizio 2

Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = \frac{x^2-1}{x-2}$$

1. **Dominio**

$x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2 \qquad x \in \left]-\infty; 2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$

2. Simmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x-2} = \frac{x^2-1}{-x-2} \neq f(x)$$

La funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezione con gli assi

ASSE X

$$\begin{cases} y = \frac{x^2-1}{x-2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che una frazione è nulla quando il suo numeratore è uguale a zero:

$$x^2 - 1 = 0$$

Il grafico incontra l'asse delle ascisse nei punti: $A(-1; 0)$ e $B(1; 0)$.

ASSE Y

$$\begin{cases} y = \frac{x^2-1}{x-2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{0^2-1}{0-2} \\ x = 0 \end{cases}$$

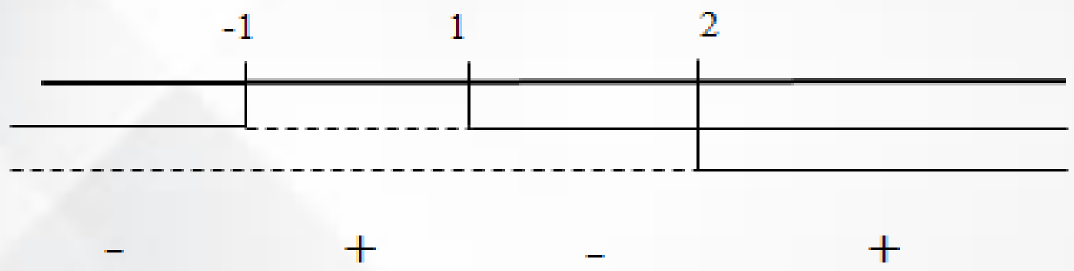
Svolgendo i calcoli si ottiene $y = \frac{1}{2}$, cioè il grafico incontra l'asse y nel punto $C\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

4. Segno della funzione

$$\frac{x^2-1}{x-2} > 0$$

$N: \ x^2 - 1 > 0 \qquad \Rightarrow \quad x < -1 \ \lor \ x > 1$

$D: x - 2 > 0 \qquad \Rightarrow \quad x > 2$



Dallo studio del grafico dei segni si deduce che:

$f(x) > 0$ per $-1 < x < 1 \quad \lor \quad x > 2$
$f(x) < 0$ per $x < -1 \quad \lor \quad 1 < x < 2$

5. Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Questi due limiti si presentano nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che si può risolvere in maniera più rapida utilizzando il teorema di De L'Hospital; si ottiene in tal modo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} 2x = \pm\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali, potrebbero esserci asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$m = 1$

Per quanto riguarda il secondo limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=q$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2+2x}{x-2}\right)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-2}=2$$

Pertanto la retta

$$y=x+2$$

È un asintoto obliquo completo per il grafico della funzione.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{4-1}{2-2}=\pm\infty$$

Pertanto, $x=2$ è un asintoto verticale completo; inoltre esso è un punto di discontinuità di II specie.

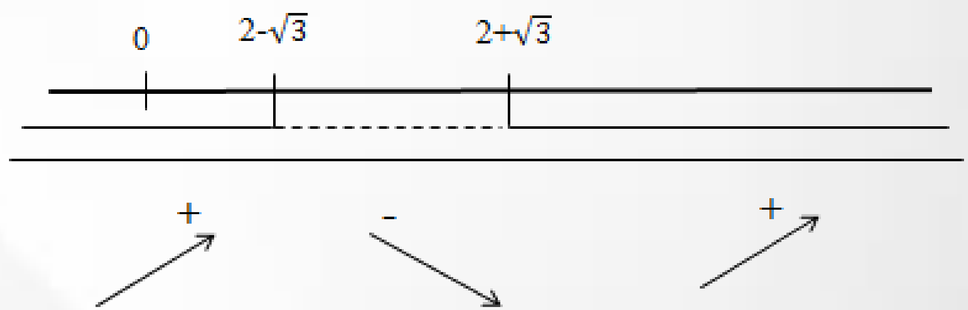
6. Derivata prima: crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi

$$y' = \frac{2x(x-2)-\left(x^2-1\right)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2+1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$y' \geq 0$

$N: x^2 - 4x + 1 \geq 0 \qquad \Rightarrow \quad x \leq 2-\sqrt{3} \ \lor \ x \geq 2+\sqrt{3}$

$D: (x-2)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \ \forall x \in D$



$x = 2-\sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo
$x = 2+\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.

$M\left(2-\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}\right)$
$m\left(2+\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}\right)$

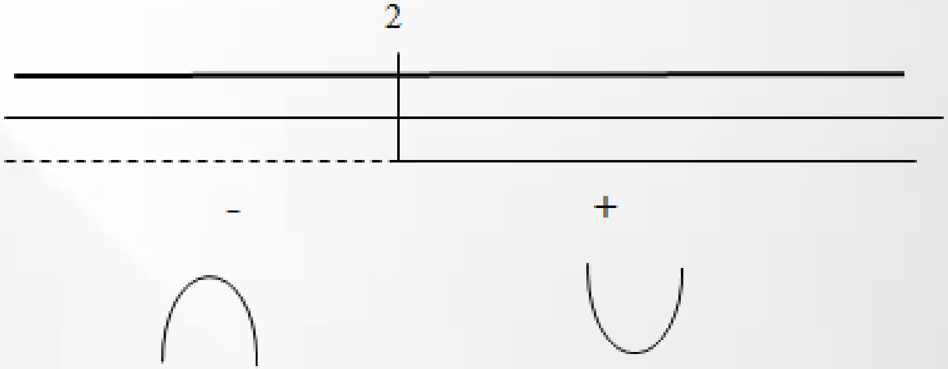
7. Derivata seconda: concavità, convessità, flessi

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+1)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$
$$= \frac{(x-2)[(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x+1)]}{(x-2)^4}$$
$$= \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-2}{(x-2)^3} = \frac{6}{(x-2)^3}$$

$y'' \geq 0$

$N: 6 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \forall x \in D$

$D:\ (x-2)^3 > 0 \qquad \Rightarrow \quad x > 2$



Non ci sono punti di flesso.

Il grafico della funzione è rappresentato in figura: