Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

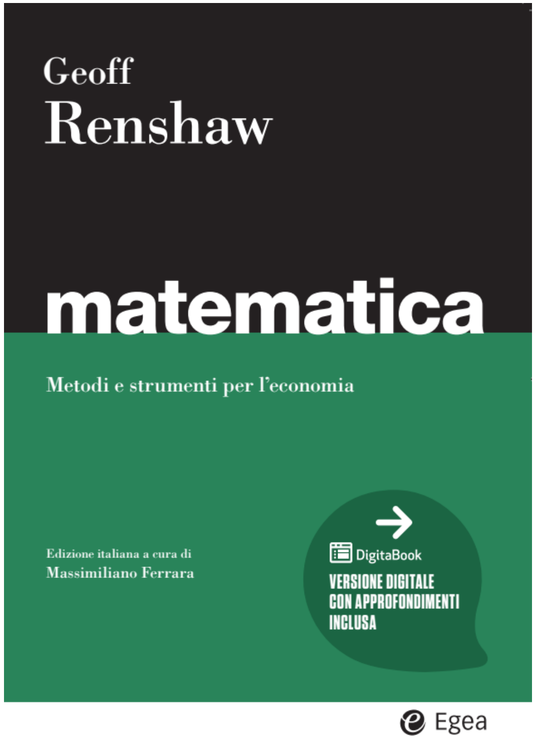
A.A. 2022/2023

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 2 – Algebra e dintorni



L'**algebra** è semplicemente l'aritmetica con le lettere al posto dei numeri. Le regole dell'algebra, perciò, sono le stesse dell'aritmetica (Capitolo 1).

Addizione e sottrazione di numeri con segno:

+ seguito da +

– seguito da –

si addizionano i termini

+ seguito da –

– seguito da +

si sottraggono i termini

(Regola 1.1)

1. Non si devono mischiare “pere con mele”: data la somma $a + a + a + b + b$, possiamo sommare le a scrivendo 3a e sommare le b scrivendo 2b.

Perciò $a + a + a + b + b = 3a + 2b$
(Nota: 3a e a3 sono la stessa cosa)

2. I segni × e : si usano raramente, in algebra. Si preferisce scrivere ab anziché $a \times b$ e $\frac{a}{b}$ o a/b invece di $a : b$.

3. Per evitare di scrivere parentesi inutili si scrive, per esempio:
$-ab$ anziché $(-a) \times b$ anziché $a \times (-b)$.

Moltiplicazione e divisione di numeri con segno

Moltiplicazione

$$\left.\begin{array}{l}(+\text{ numero}) \times (+\text{ numero})\\[2ex](-\text{ numero}) \times (-\text{ numero})\end{array}\right\}\ \text{il risultato è positivo}$$

$$\left.\begin{array}{l}(+\text{ numero}) \times (-\text{ numero})\\[2ex](-\text{ numero}) \times (+\text{ numero})\end{array}\right\}\ \text{il risultato è negativo}$$

(Regola 1.2)

Divisione

Poiché la divisione è l’inverso della moltiplicazione, valgono per essa le stesse regole. (Regola 1.3)

Parentesi e precedenza delle operazioni

La precedenza P–E–D–M–A–S si applica anche all’algebra:

Parentesi

Elevamenti a esponente (x^2)

Divisioni

Moltiplicazioni

Addizioni

Sottrazioni (Regola 1.4)

Errore frequente: $\frac{4x+3y}{2x+9y}$ $\frac{(4x+3y)}{(2x+9y)}$ $\frac{4x}{2x}+\frac{3y}{9y}$

Sviluppo e fattorizzazione di espressioni algebriche

Sviluppo:

Dal Capitolo 1: 3 × (4 + 5) = (3 × 4) + (3 × 5) = 12 + 15 = 27

In algebra: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) = ab + ac$

Evitare l'errore comune: $-a \times (b + \mathrm{c}) = -ab + ac$ ERRATO!

Fattorizzazione:

È l'inverso dello sviluppo: $ab + ac = a(b + c)$

Errore comune: $-ab - ac = -a(b - c)$ ERRATO!

Frazioni algebriche

In algebra si incontrano spesso frazioni come $\frac{a}{b}$.

Semplificare le frazioni algebriche

Come in aritmetica, in generale è possibile semplificare una frazione algebrica dividendo numeratore e denominatore per la stessa espressione.

Sia data: $\frac{ac}{ab}$

Sia il numeratore, sia il denominatore possono venire divisi per a, dando:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{\frac{ac}{a}}{\frac{ab}{a}}$$

Dalla slide precedente: $\frac{ac}{ab} = \frac{\frac{ac}{a}}{\frac{ab}{a}}$

Al numeratore, *c* viene moltiplicato e diviso per *a*, e dato che la divisione è l'inverso della moltiplicazione le due *a* si semplificano a vicenda, lasciando semplicemente *c*. Analogamente si semplificano le due *a al* denominatore: resta semplicemente *b*. Dunque otteniamo $\frac{ac}{ab} = \frac{c}{b}$.

Evitare il seguente errore: in $\frac{a+b}{bc}$ o $\frac{a+b}{b+c}$, non è consentito semplificare le *b*.

(Perché? Quale regola viene violata, nel caso?)

Addizione e sottrazione di frazioni algebriche

Vogliamo calcolare la somma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

Come in aritmetica, dobbiamo trovare un denominatore comune.

Moltiplichiamo sopra e sotto ciascuna frazione per il

denominatore dell'altra frazione: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$

Moltiplicazione e divisione di frazioni algebriche

Valgono le stesse regole valide in aritmetica.

Moltiplicazione: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Divisione: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Fattorizzazione di frazioni algebriche

Esempio: $\frac{a}{b} + \frac{ad}{c}$

In questo caso *a* compare al numeratore di entrambe le frazioni. In altre parole, *a* è un fattore comune ad ambo i numeratori. Possiamo allora riscrivere l'espressione nel seguente modo:

$$\frac{a}{b} + \frac{ad}{c} = \left[\frac{a}{1} \times \frac{1}{b}\right] + \left[\frac{a}{1} \times \frac{d}{c}\right] =$$

$$= \frac{a}{1}\left(\frac{1}{b} + \frac{d}{c}\right) = a\left(\frac{1}{b} + \frac{d}{c}\right)$$

(Verificalo sviluppando)

Potenze e radici

Estendiamo all'algebra quanto visto nel Capitolo 1.

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ (Regola 2.2)

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (Regola 2.3)

$(a^m)^n = a^{mn}$ (Regola 2.4)

$(ab)^n = a^n b^n$ (Regola 2.5)

$a^0 = 1$ $\quad a = 0)$ (Regola 2.6)

Potenze a esponente negativo o frazionario

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (come nel Capitolo 1) (Regola 2.7)

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ e in generale $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ (Regola 2.8)

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (Regola 2.9)

Segno di a^n

Se a è positiva, anche a^n è positiva, indipendentemente dal valore di n.

Esempi: $3^{0,5} = \sqrt[2]{3}$ (positiva per definizione); $3^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}$

Condizioni necessarie e sufficienti: vedi il Paragrafo 2.13