Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

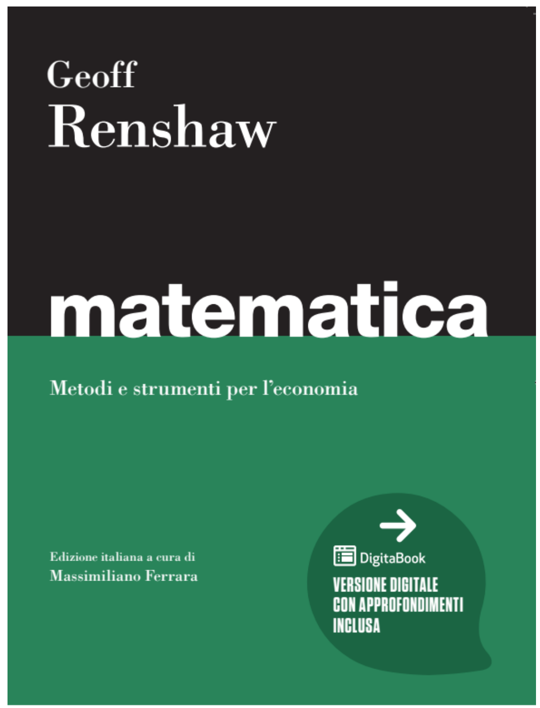
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 3 – Equazioni lineari



Egea

Uguaglianze, equazioni e identità

Manipolare le equazioni

Eseguendo una qualsiasi operazione elementare su entrambi gli interi membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente. Esempi:

Se $x = 5$, allora $x + 100 = 105$; se $a = b$, allora $2a = 2b$

Con «operazione elementare» si intende un'addizione, una sottrazione, una moltiplicazione, una divisione o un elevamento a esponente.

(Regola 3.1)

Variabili e parametri

In un'equazione compaiono tipicamente variabili (dette anche incognite, x, y, z) e parametri (detti anche coefficienti o costanti, a, b, c).

Equazioni lineari e non lineari

Un'equazione è lineare se l'incognita o le incognite vi compaiono al massimo al grado 1. ($x = x^1$)

L'equazione lineare ha forma generale $ax + b = c$. La soluzione è

$x = \frac{c-b}{a}$ (Regola 3.2).

La verifica si può effettuare sostituendo a *x* questa espressione:

$a\left(\frac{c-b}{a}\right) + b = c \quad \Rightarrow \quad c - b + b = c$ (un'identità).

Nota che ogni equazione, quando si sostituisce l'incognita con la soluzione, diventa un'identità.

Funzioni lineari

Un’equazione lineare con 2 (o più) variabili rappresenta una funzione lineare $y = ax + b$. Non esiste una soluzione unica: per ogni x, la y corrispondente soddisfa l’equazione.

Abbiamo trattato variabili dipendenti/indipendenti e la funzione inversa.

Grafici delle funzioni lineari (fig. 3.3)

Esempio: $y = 2x + 1$ (fig. 3.4)

Pendenza e intercetta all’origine di una funzione lineare. Rette verticali e orizzontali.

Funzioni (discrete) a gradino. (fig. 3.5)

Figura 3.3 Il sistema di assi cartesiani, con i quattro quadranti

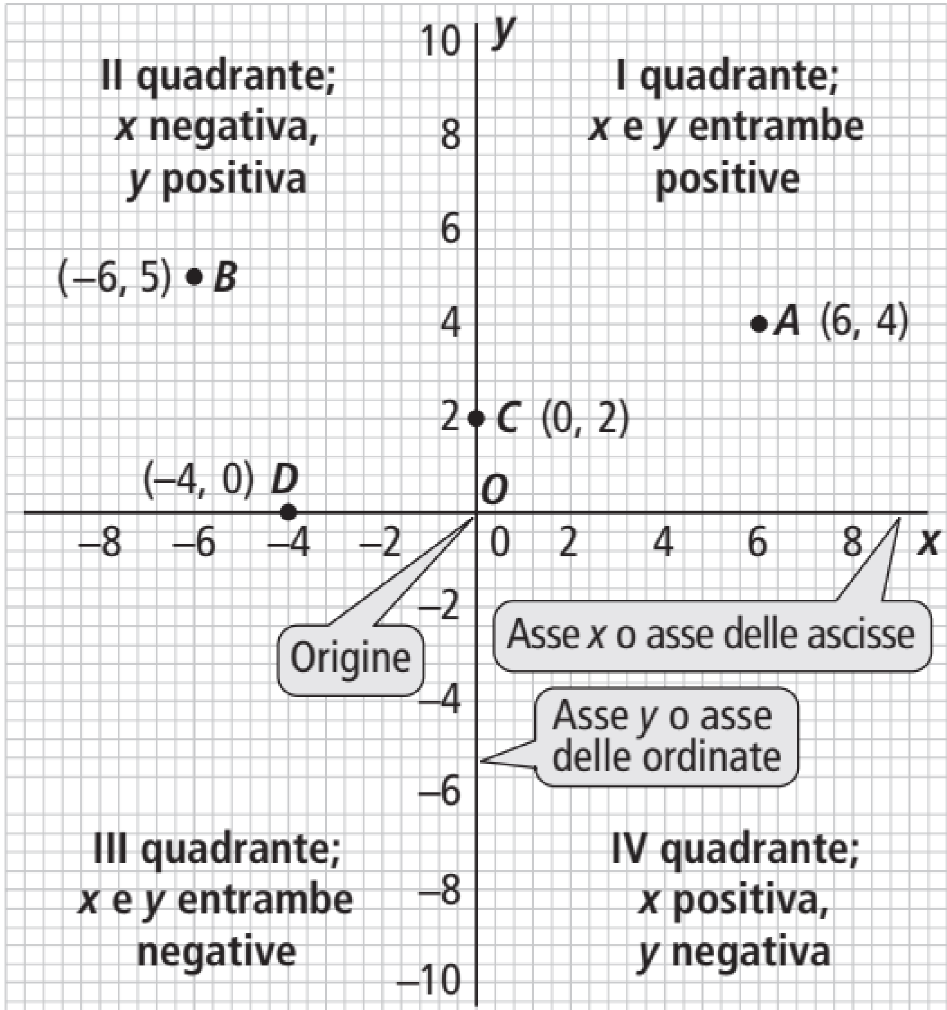


Figura 3.4 Il grafico della funzione lineare $y = 2x + 1$

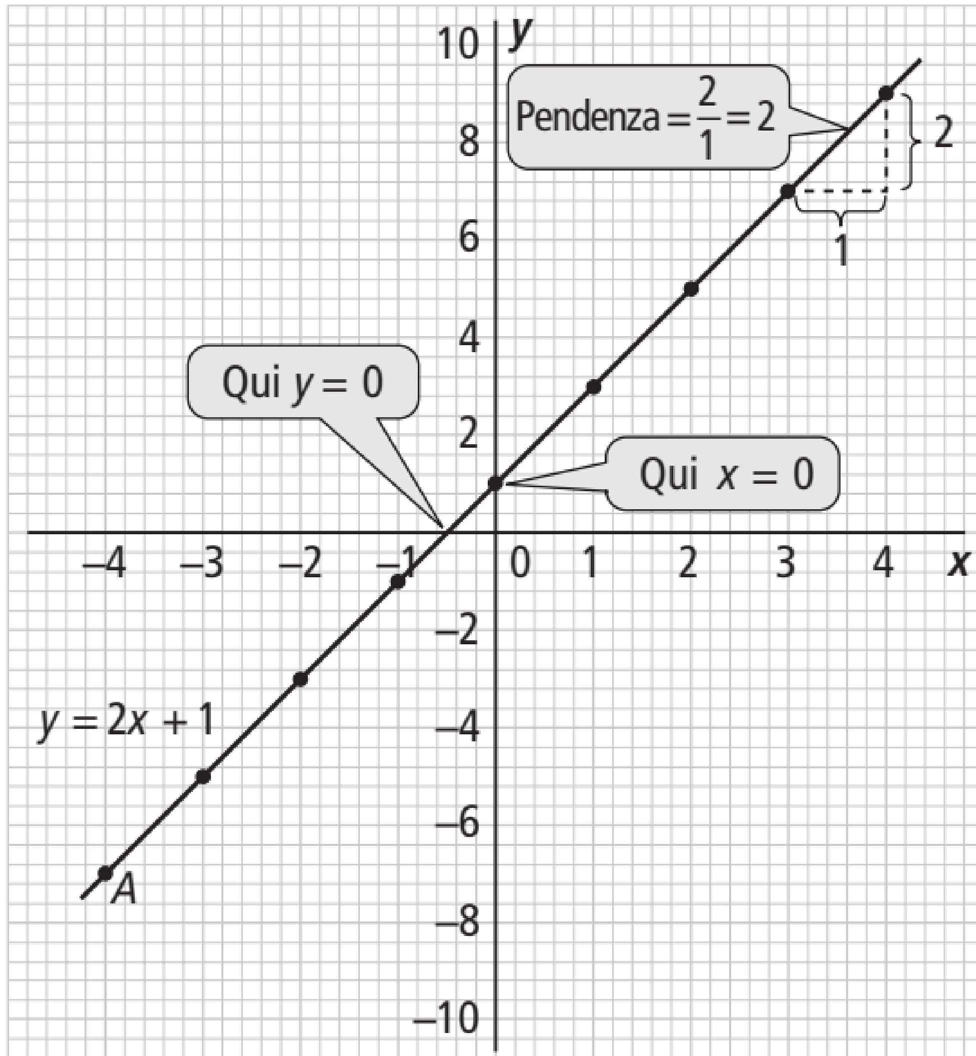
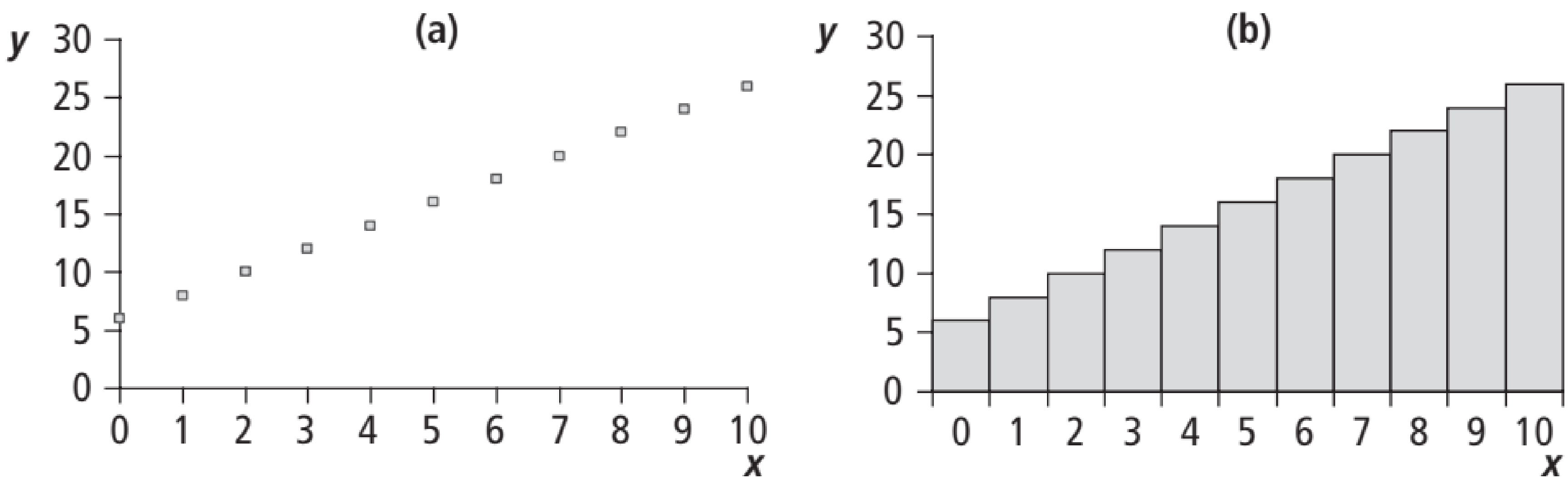


Figura 3.5 Il grafico della funzione discreta $y = 2x + 6$, con x appartenente all'insieme dei numeri interi non negativi



Se x può assumere solo valori interi non negativi, $y = 2x + 6$ risulta una funzione discreta, il cui grafico è una sequenza di punti discreti **(a)**. È possibile anche rappresentare la funzione mediante un diagramma a barre **(b)**.

Soluzione grafica e algebrica di un'equazione lineare

Esempio 3.14: $y = -3x + 2$ (fig. 3.7)

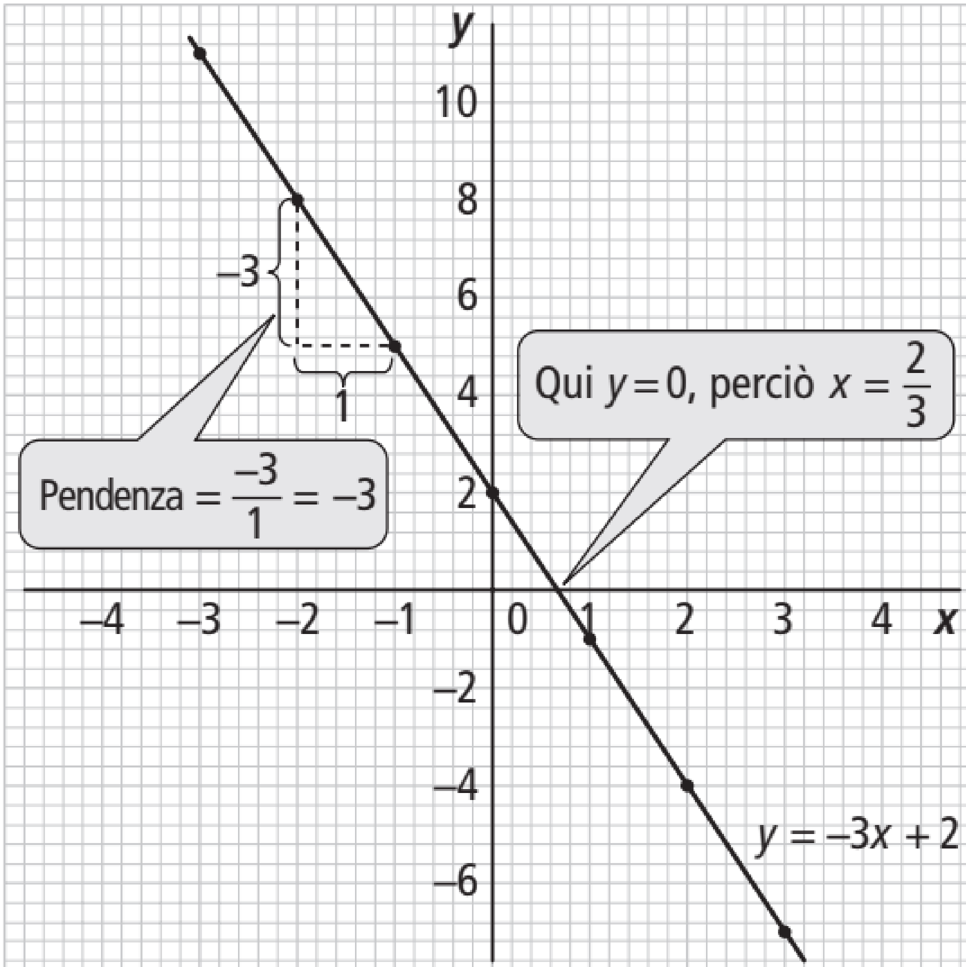
Dalla fig. 3.7 vediamo che per *y* = 0, $-3x + 2 = 0$.

La soluzione algebrica di questa equazione si ottiene addizionando 3*x* ad ambo i membri ($\Rightarrow \quad 2 = 3x$) e poi dividendo tutto per 3.

$\left(\Rightarrow x = \frac{2}{3}\right)$

L'intercetta all'origine $\left(x = \frac{2}{3}\right)$ è dunque il valore di *x* in corrispondenza del quale *y* = 0, perciò è la soluzione dell'equazione $-3x + 2 = 0$.

Figura 3.7 Il grafico della funzione lineare $y = -3x + 2$



Sistemi di equazioni lineari

Esempio 3.18 $\begin{cases} y = 3x \\ y = x + 10 \end{cases}$ (fig. 3.9)

La soluzione del sistema è la coppia (*x*, *y*) che soddisfa le due equazioni simultaneamente. La soluzione grafica è data in fig. 3.9.

Soluzione algebrica: in corrispondenza delle soluzioni, la *y* di un'equazione è uguale alla *y* dell'altra equazione, perciò $3x = x + 10$.

Il problema si riduce a risolvere 1 equazione in 1 incognita.

Esistenza della soluzione (figg. 3.11, 3.12a, 3.12b)

Le equazioni devono essere compatibili e indipendenti.

(3 equazioni, 2 incognite? Sistema sovradeterminato)

Figura 3.9 Soluzione grafica delle equazioni simultanee $y = 3x$; $y = x + 10$

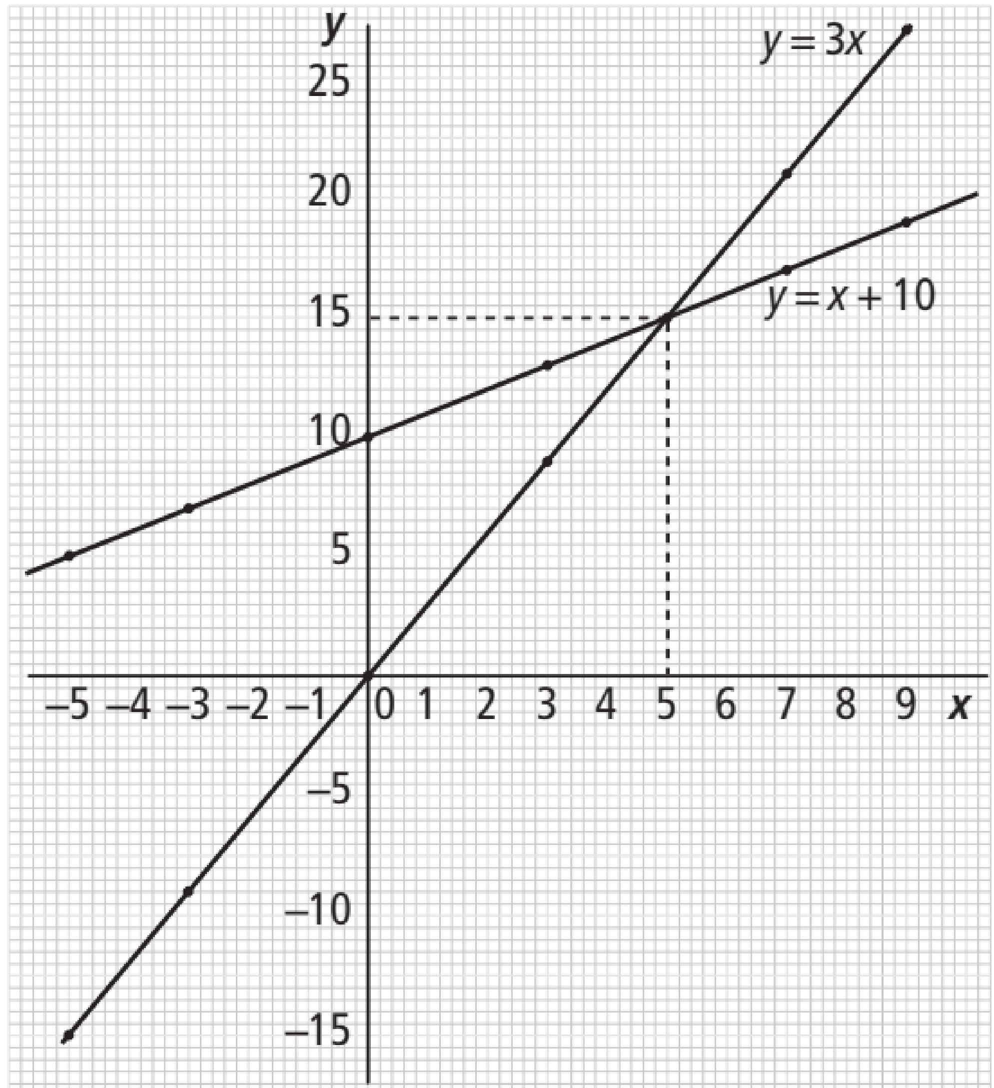


Figura 3.11 Esempio di equazioni incompatibili: $y = 2x + 3$; $y = 2x - 2$

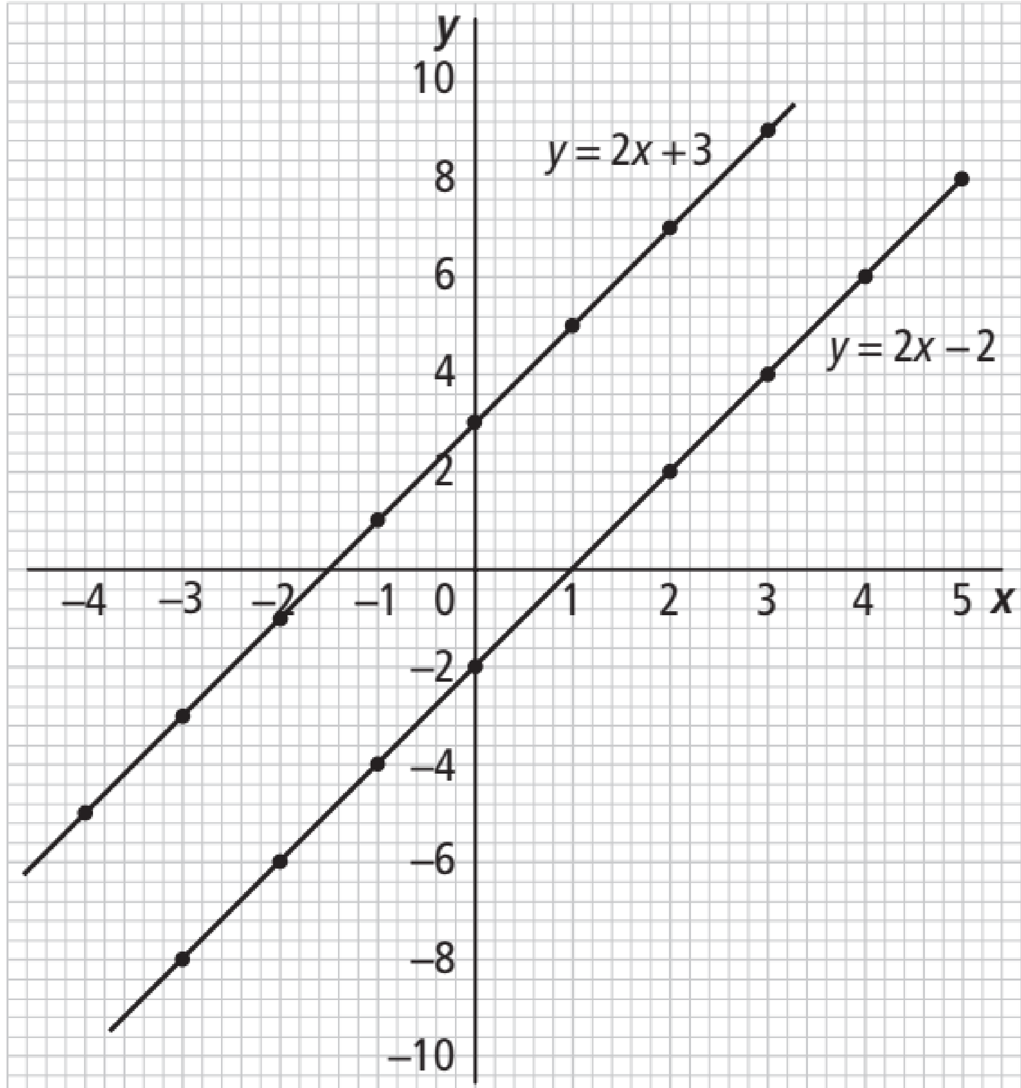


Figura 3.12(a) Rappresentazione di un sistema di tre equazioni in due incognite

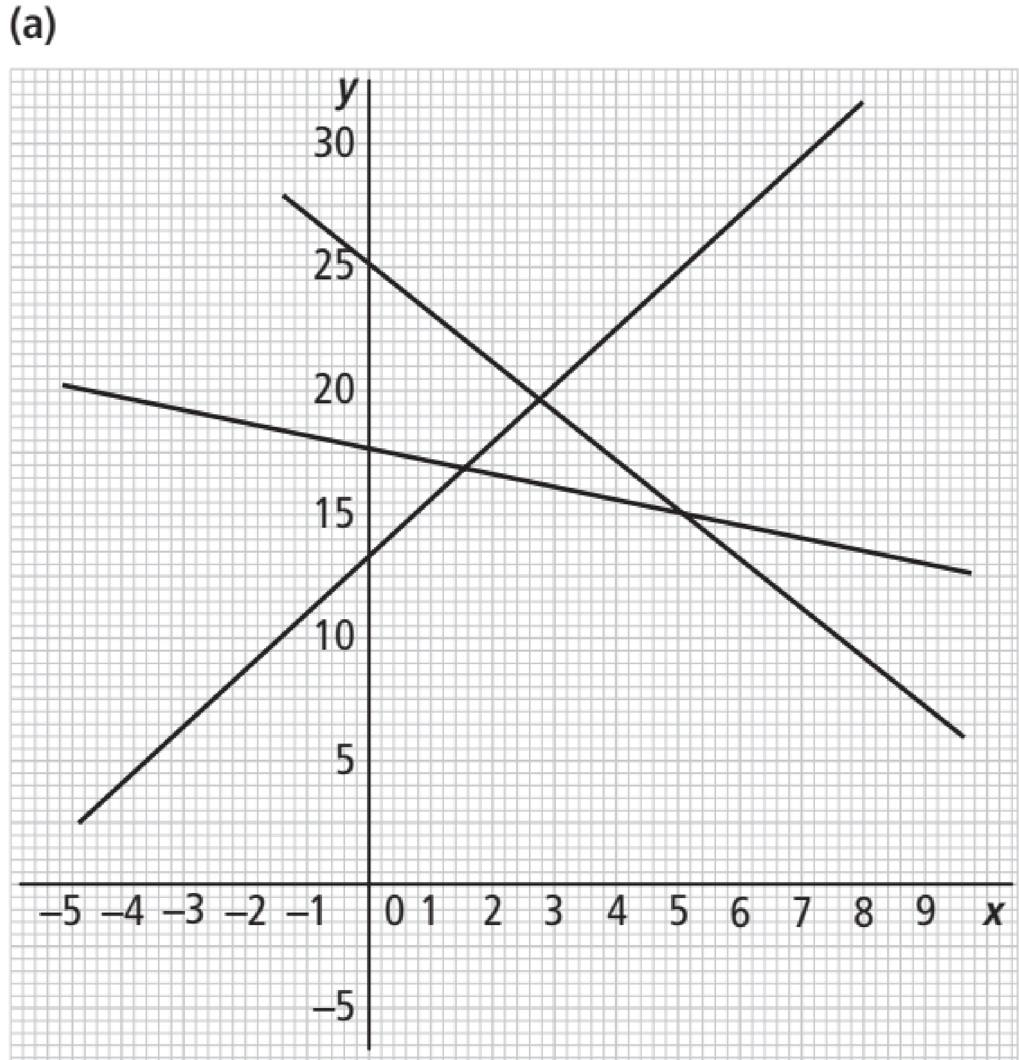
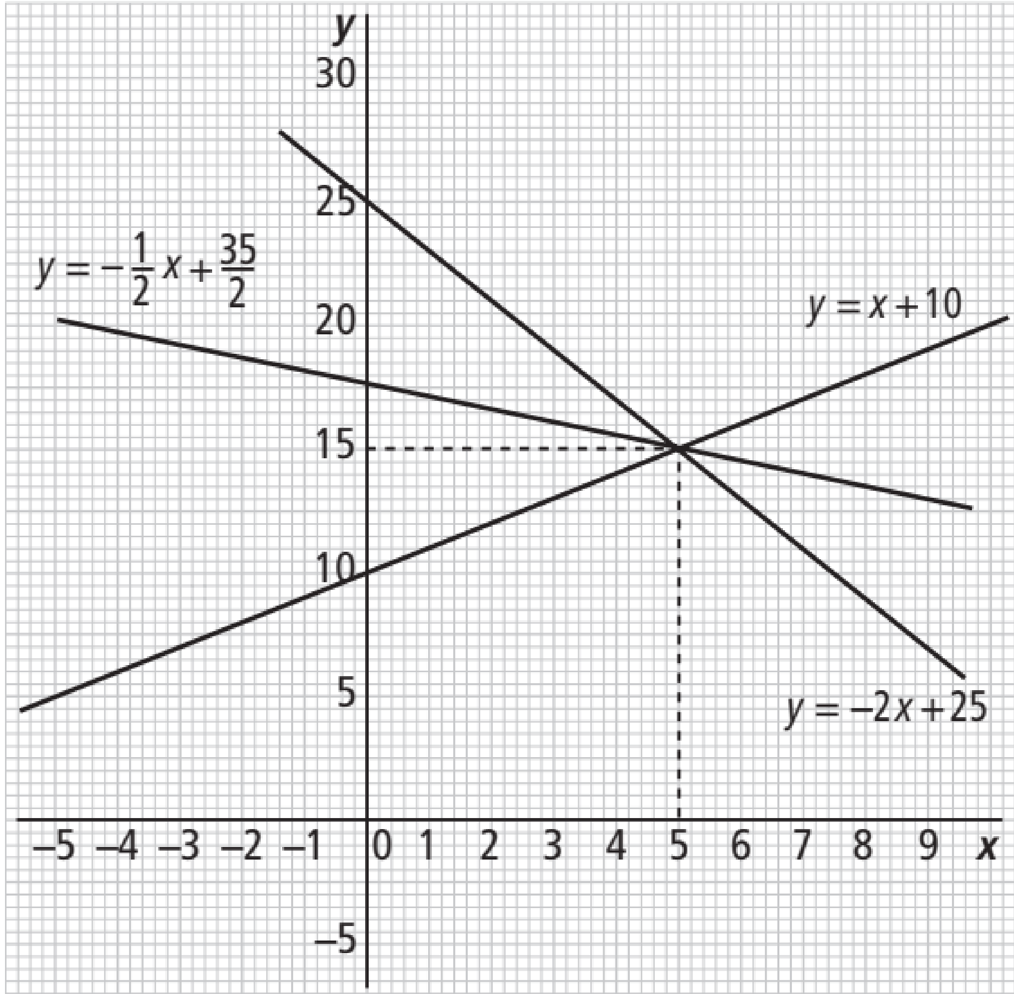


Figura 3.12(b) Rappresentazione di un sistema di tre equazioni non indipendenti

(b)



Applicazioni economiche (1): domanda e offerta di un bene

Modello di mercato: $q^D = -2p + 2000 \;\; ; \;\; q^O = 2p - 200$ (fig. 3.13)

Condizione di equilibrio $q^D = q^O$ 3 eq.ni, 3 incognite⇒ soluzione.

Il mercato è sempre in equilibrio? Eccesso di domanda/offerta

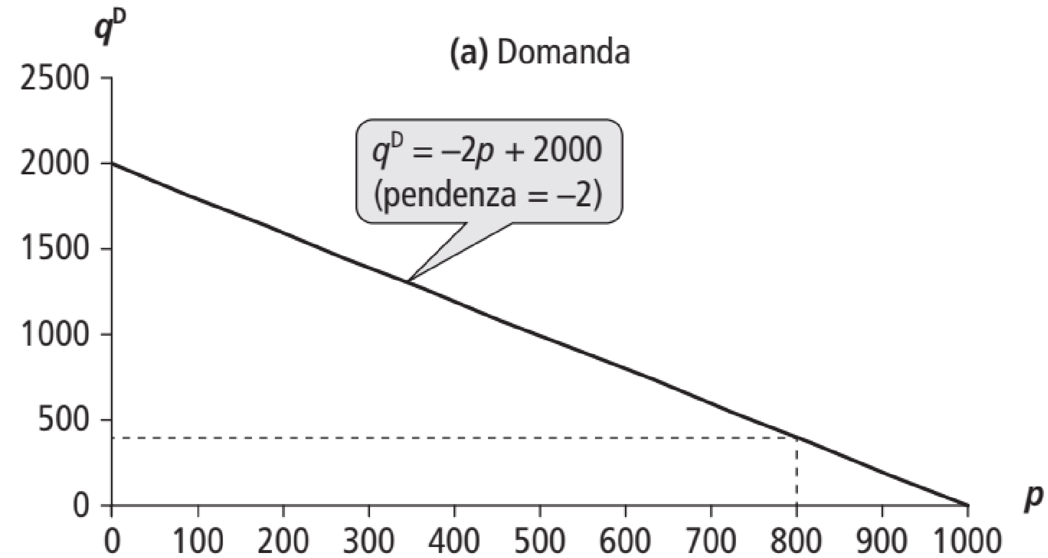
Funzioni di domanda/offerta inverse

Vengono usate per seguire la convenzione economica di disporre *p* sull'asse verticale. Il modello precedente diventa:

$$p^D = -\frac{1}{2}q^D + 1000 \;\; ; \;\; p^O = \frac{1}{2}q^O + 100$$

Prezzo di offerta e di domanda. (figg. 3.16-3.17); 4 incognite

Figura 3.13 Funzioni di domanda e di offerta per il bene "mele"



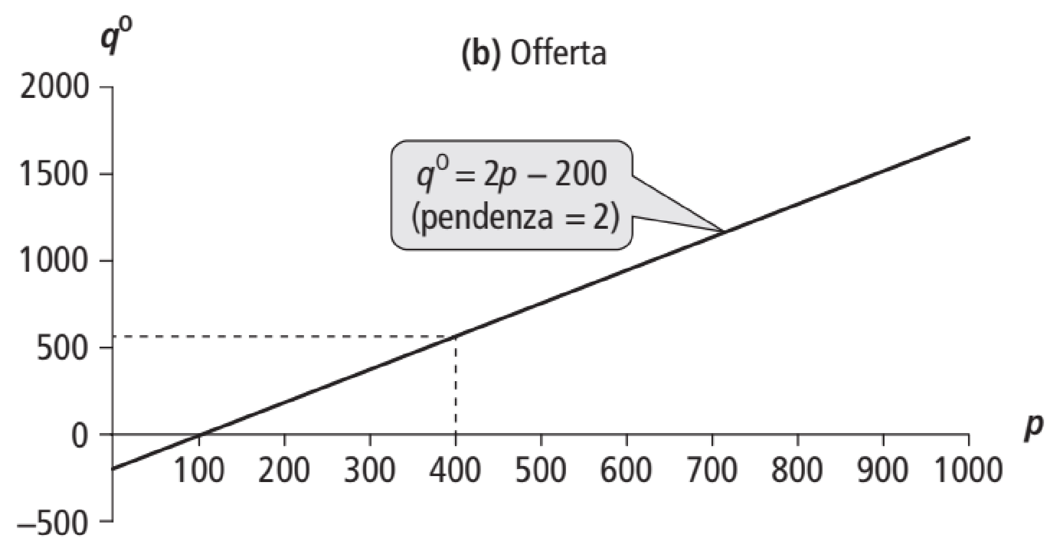
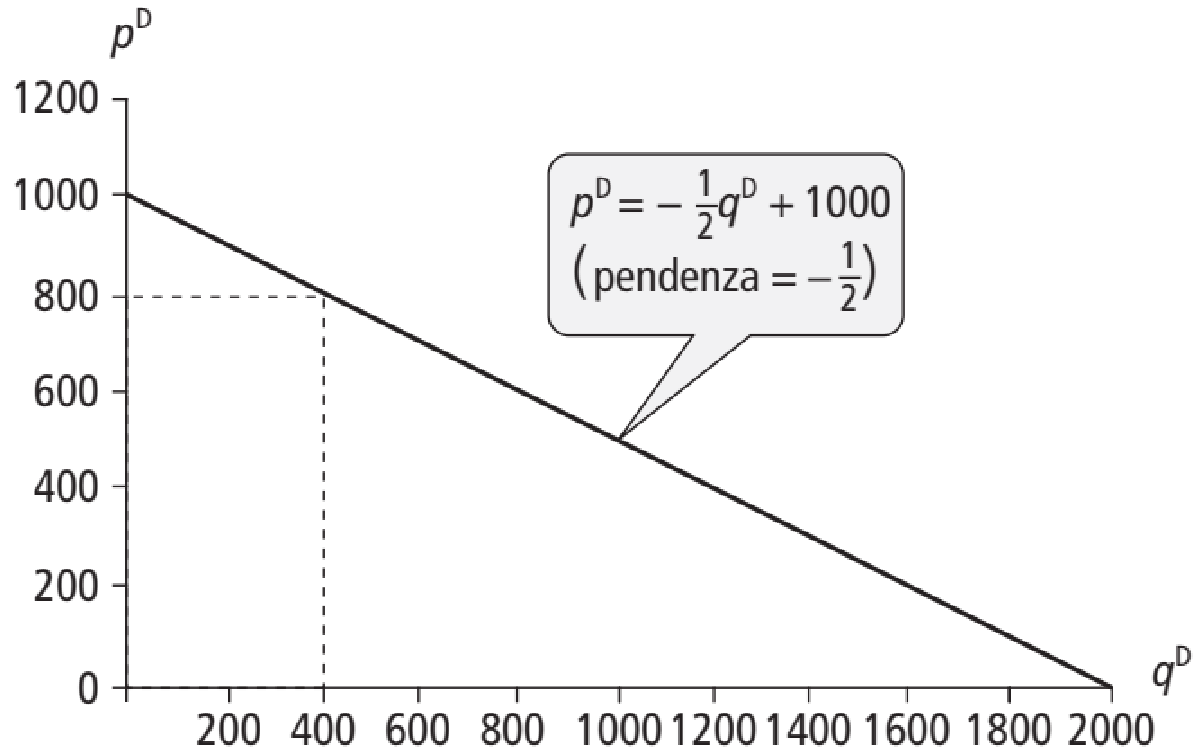
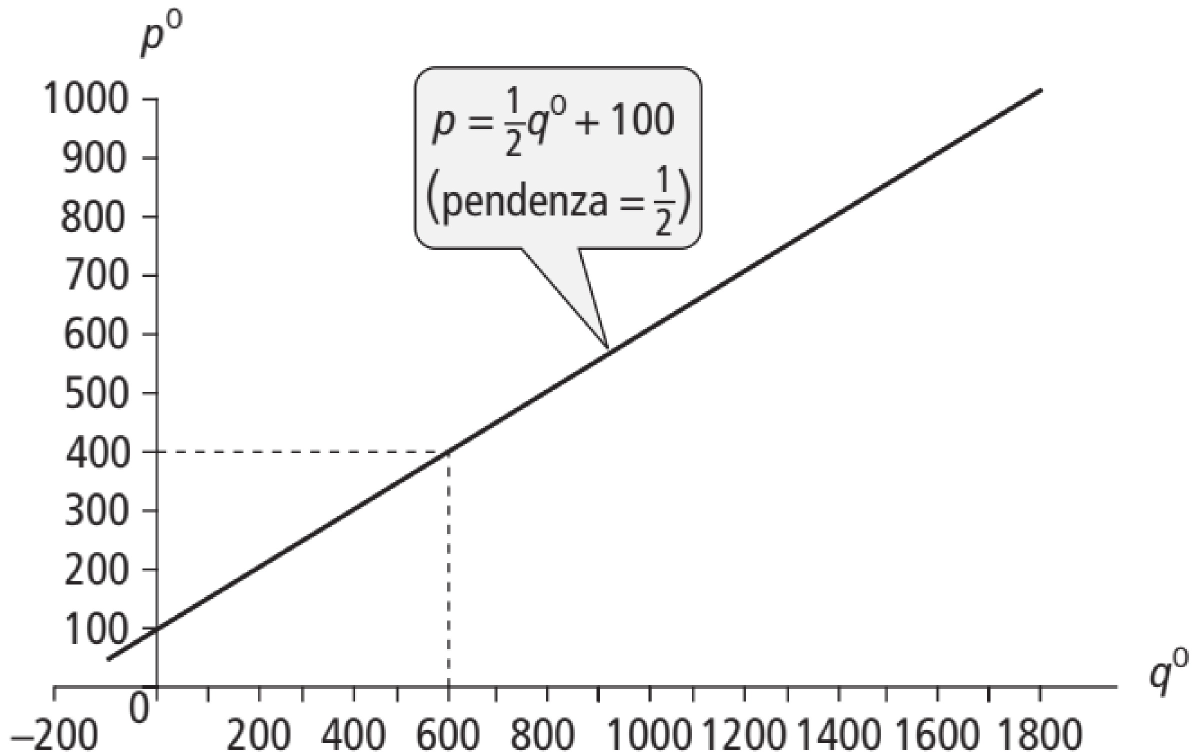


Figura 3.16 Funzione di domanda inversa per le mele



Ogni punto che appartiene al grafico della funzione di domanda inversa, come $q^D = 400$, $p^D = 800$, appartiene anche al grafico della funzione di domanda (Figura 3.13(a)).

Figura 3.17 Funzione di offerta inversa per le mele



Ogni punto che appartiene al grafico della funzione di offerta inversa, come $q^0 = 600$, $p^0 = 400$, appartiene anche al grafico della funzione di offerta (Figura 3.13(b)).

Statica comparata per domanda e offerta

Effetto di una imposta specifica (T cent al chilo) (Esempio 3.20)

Funzione di offerta inversa: $p^{O+} = p^{O} + T = \frac{1}{2} q^{O} + 100 + T$

(Perché?)

Equilibrio dove $p^{O+} = p^{D}$ (punto E_1 in fig. 3.19)

Effetto di una imposta ad valorem (tasso t, gettito tp^{O})

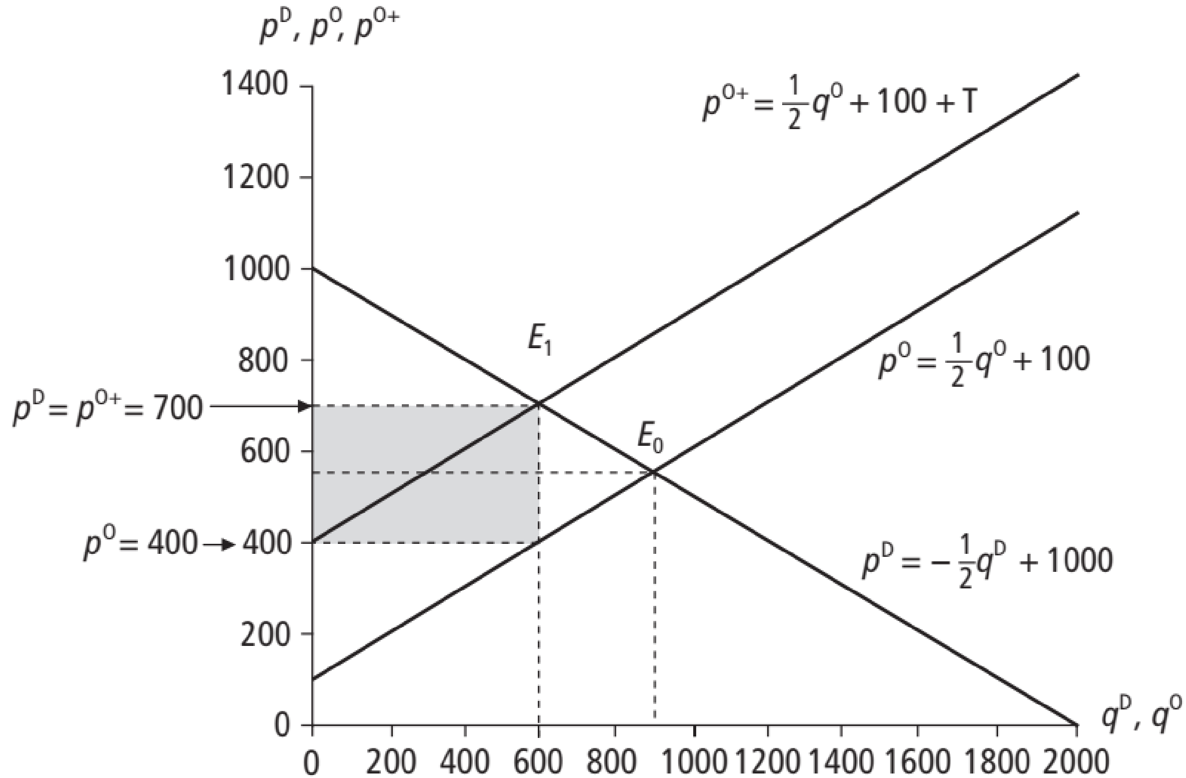
Funzione di offerta inversa: $p^{O+} = p^{O} + tp^{O} = p^{O}(1 + t) =$

$= \left(\frac{1}{2} q^{O} + 100\right)(1 + t)$ (Perché?)

Equilibrio dove $p^{O+} = p^{D}$ (punto E_1 in fig. 3.20)

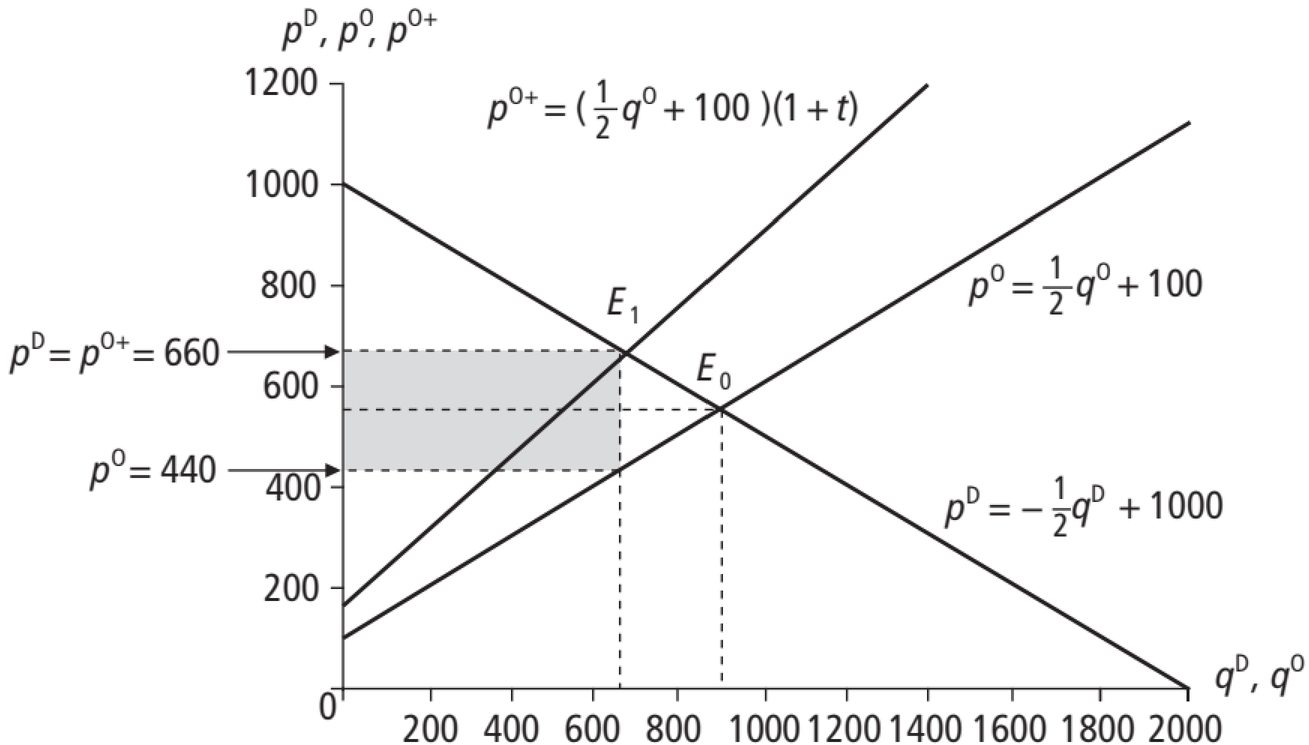
Differenza sostanziale fra traslazione parallela e proporzionale.

Figura 3.19 Effetti di una imposta specifica



Poiché l'imposta aggiunge un importo fisso (T cent al chilo) su ogni unità venduta, la funzione di offerta inversa modificata dall'imposta, p^{O+}, trasla verso l'alto di T rispetto alla funzione di offerta inversa non modificata, p^O. Quando $T = 300$ l'equilibrio si sposta da E_0 a E_1. La quantità scende da 900 a 600. Il prezzo di mercato, che include l'imposta, cresce da 550 a 700. Il prezzo ricevuto dai venditori scende da 550 a 400.
L'area del rettangolo ombreggiato misura il gettito fiscale.

Figura 3.20 Effetti di un'imposta ad valorem (proporzionale).



Poiché l'imposta è in forma di proporzione fissa (t) del prezzo dei venditori, la funzione di offerta inversa modificata dall'imposta, p^{O+} ha un'intercetta maggiore e una pendenza più accentuata rispetto alla funzione di offerta inversa non modificata, p^O. Quando $t = 0{,}5 = 50\%$ l'equilibrio si sposta da E_0 a E_1. La quantità scende da 900 a 680. Il prezzo di mercato, che include l'imposta, cresce da 550 a 660. Il prezzo ricevuto dai venditori scende da 550 a 440. L'area del rettangolo ombreggiato misura il gettito fiscale.

Applicazioni economiche (2): equilibrio macroeconomico

Sia Q = output finale totale. Sia Y = reddito familiare aggregato = stipendi + profitti. Allora abbiamo $Q = Y$ (Perché?)

Sia E = domanda finale totale. Allora abbiamo $Q = E$ (Perché?)

La domanda finale è per i beni di consumo, C, e per gli investimenti, I.

Da quanto precede, $Y = E = C + I$

Tutte le uguaglianze scritte sono identità di bilancio.

Relazione comportamentale:

Funzione di consumo (pianificato), $C = 0{,}8Y + 200$ ($MPC = 0{,}8$)

Condizione di equilibrio : $C = \hat{C}$

Nostro modello: $Y = C + I$; $\hat{C} = 0{,}8Y + 200$; $C = \hat{C}$

3 eq.ni, 4 incognite, nessuna soluzione unica.

Combinando le equazioni otteniamo:

$$Y = 0{,}8Y + 200 + I \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{1 - 0{,}8}(200 + I)$$

Ossia una forma ridotta, che dà *Y* in funzione di dell'incognita *I* (variabile esogena).

Abbiamo 0,8 = *MPC,* perciò $Y = \frac{1}{1-MPC}(200 + I)$

dove $\frac{1}{1-MPC} > 1$ è il «moltiplicatore».

Assumendo *I* = 800, si ha $Y = \frac{1}{1-0{,}8}(200 + 800) = 5000$