



Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

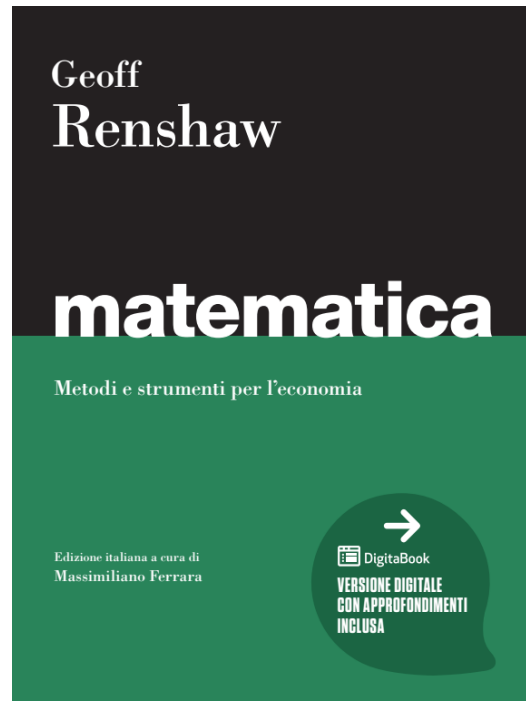
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 11 – Funzione esponenziale e logaritmi



 Egea

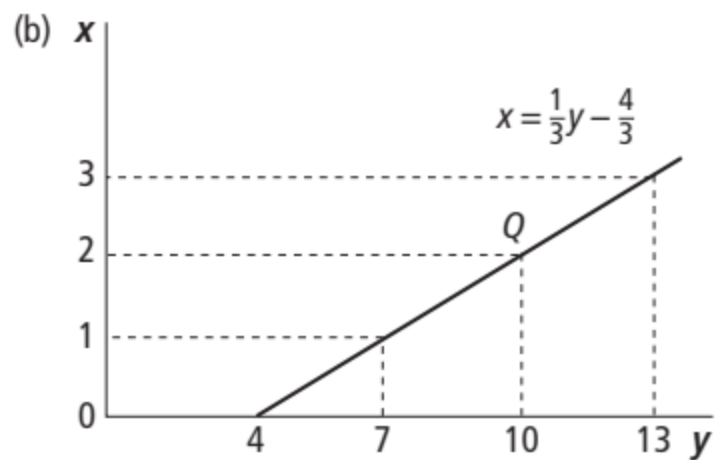
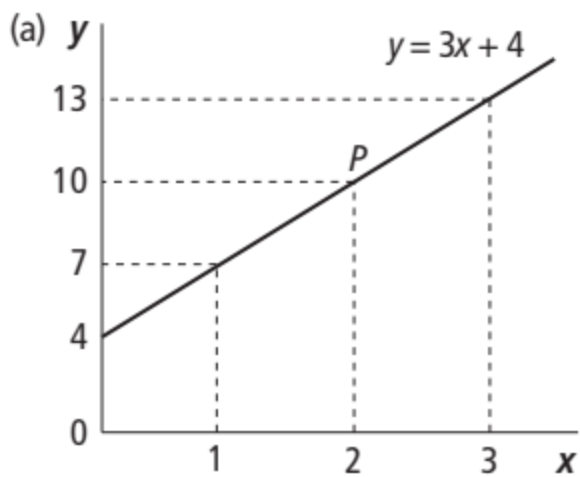
Premessa: ripasso sulla funzione inversa

Esempio: data $y = 3x + 4$, la funzione inversa è $x = \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}$

Il punto essenziale è che la relazione fra x e y è la stessa nella funzione e nella sua inversa, perciò:

- Ogni coppia di valori, x_0, y_0 , che soddisfa l'equazione di una funzione soddisfa automaticamente anche l'equazione dell'altra.
- Le due funzioni hanno il medesimo grafico (fig. 11.1)

Figura 11.1 Una funzione lineare e la sua funzione inversa (assi non in scala)



La funzione esponenziale $y = 10^x$

Caratteristica principale: base costante (in questo caso 10) elevata a un esponente che è funzione di x (in questo caso x)

Com'è il suo grafico?

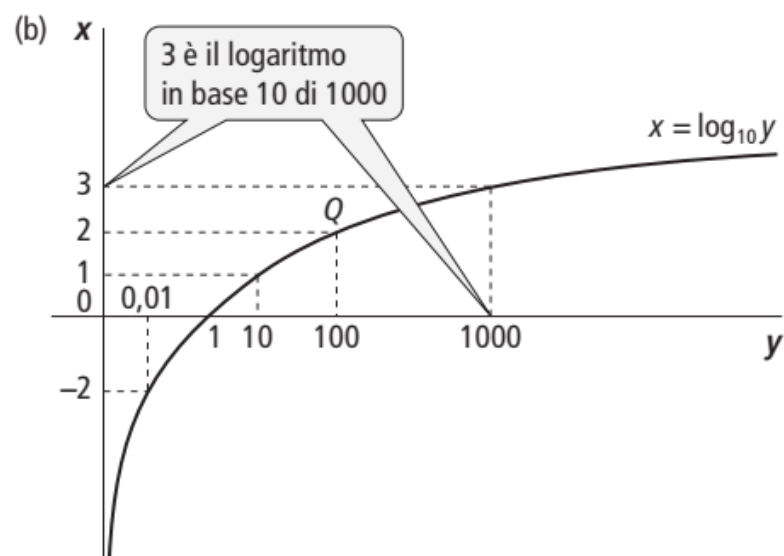
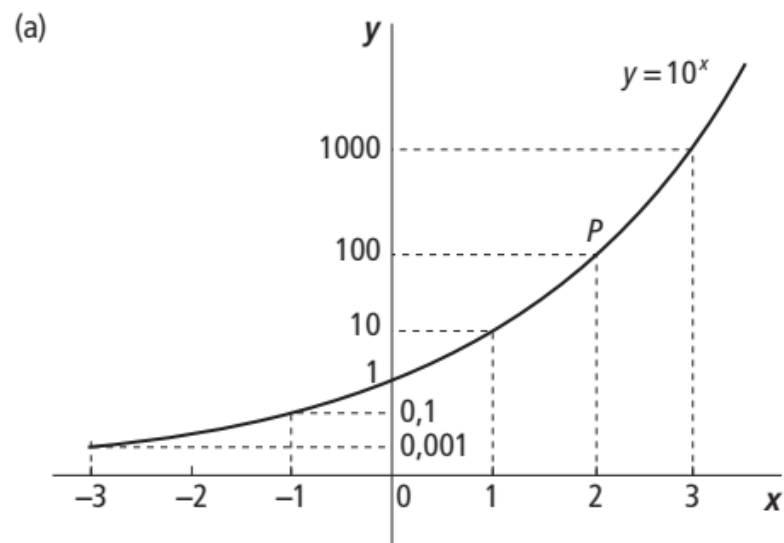
Quando $x = 0$, $y = 10^0 = 1$ per cui l'intercetta all'origine è 1.

Quando x cresce da 1 a 2, y cresce da $10^1 = 10$ a $10^2 = 100$ quindi il grafico ha forte pendenza

Quando $x < 0$, per esempio $x = -1$, $y = 10^{-1} = \frac{1}{10}$; perciò y è sempre maggiore di 0.

Vedi la fig. 11.2(a).

Figura 11.2 Grafici di $y = 10^x$ e di $x = \log_{10} y$ (non in scala)



La funzione inversa di $y = 10^x$

(1)

Nell'esempio $y = 3x + 4$ abbiamo determinato la funzione inversa mediante l'algebra elementare, ma questa non funziona con $y = 10^x$ (Perché no?)

Dobbiamo allora definire un nuovo concetto, il logaritmo. Data $y = 10^x$, si dice che « x è il logaritmo in base 10 di y » e si scrive $x = \log_{10} y$. Ciò definisce la funzione inversa della funzione $y = 10^x$ (Regola 11.1). Com'è il suo grafico? È semplicemente quello di $y = 10^x$, ma con gli assi scambiati (poiché ora è x la variabile dipendente). Vedi la fig. 11.2b.

La funzione inversa di $y = 10^x$

(2)

La funzione inversa di $y = 10^x$ è $x = \log_{10} y$

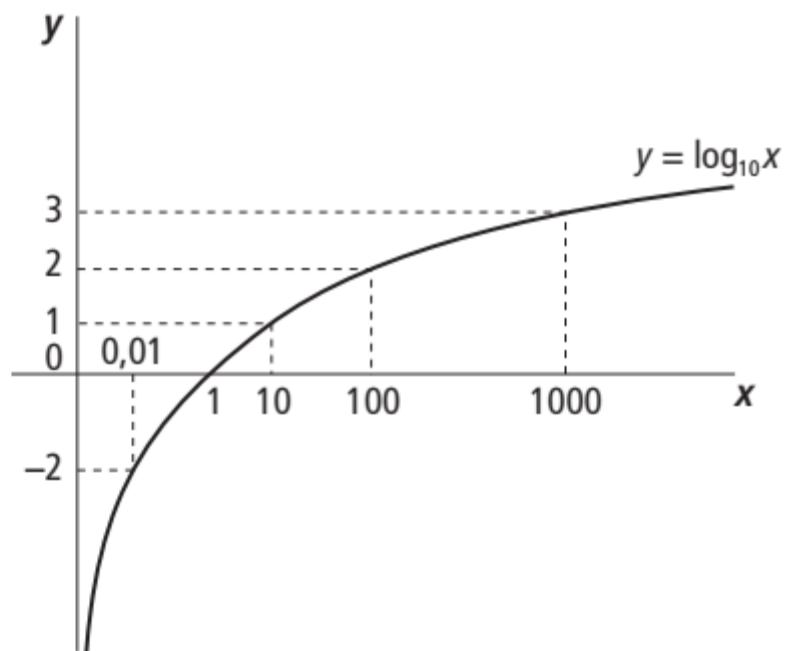
Caratteristiche principali del grafico di $x = \log_{10} y$:

- Quando $y = 1$, $x = 0$ (perché $10^0 = 1$)
- Quando $0 < y < 1$, $x < 0$ (perché per esempio $10^{-1} = \frac{1}{10}$)
- Quando $y < 0$, non esistono x corrispondenti. I logaritmi dei numeri negativi non esistono.

Si costruisce il grafico di $y = \log_{10} x$ scambiando x e y (fig. 11.3)

(per la convenzione per cui si etichetta con y la variabile dipendente)

Figura 11.3 Grafico di $y = \log_{10} x$ (asse x non in scala)



Chiarimenti sui logaritmi

- Le figg. 11.2(a) e 11.2(b) forniscono le stesse informazioni, ma in formato leggermente diverso.
- Esempio: $\log_{10} 100 = 2$ e $10^2 = 100$

Logaritmi con la calcolatrice

- Premere $\log/100/=$, ottenendo 2
- Per l'operazione inversa, premere SHIFT o INV (a seconda del modello), seguito da $\log/2/=$, ottenendo 100.
(Nota: in effetti si sta calcolando 10^2)
- Nota: $\log_{10} x$ viene spesso scritto più compattamente $\log x$.

Regole di manipolazione dei logaritmi (Regola 11.2)

1. Se $A = B$, allora $\log A = \log B$

2. $\log(AB) = \log A + \log B$

REGOLA IMPORTANTE

3. Dalla 2, se $A = B$, $\log(A^2) = \log A + \log A = 2(\log A)$

Generalizzando, $\log(A^n) = n(\log A)$

4. $\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$ (inverso della 2)

5. From 4, if $A = B$, $\log\left(\frac{A}{A}\right) = \log A - \log A = 0$ da cui $\log 1 = 0$

6. $\log(10) = 1$ (perché $10^1 = 10$)

Uso dei logaritmi per la risoluzione di problemi

Esempio: Se l'indice dei prezzi sale del 5% all'anno, quanto tempo occorre perché raddoppi?

Soluzione: $y = a(1 + r)^x$ con $a = 100$, $r = 0,05$, $y = 200$, x incognita

Pertanto: $200 = 100(1,05)^x \Rightarrow 2 = (1,05)^x$

$\Rightarrow \log(2) = \log[(1,05)^x] = x \log(1,05)$ (Regole **1, 3**)

$\Rightarrow x = \frac{\log(2)}{\log(1,05)} = \frac{0,3010}{0,02119} = 14,2$ (anni)

(Si assume che l'indice dei prezzi aumenti per salti annuali)