Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

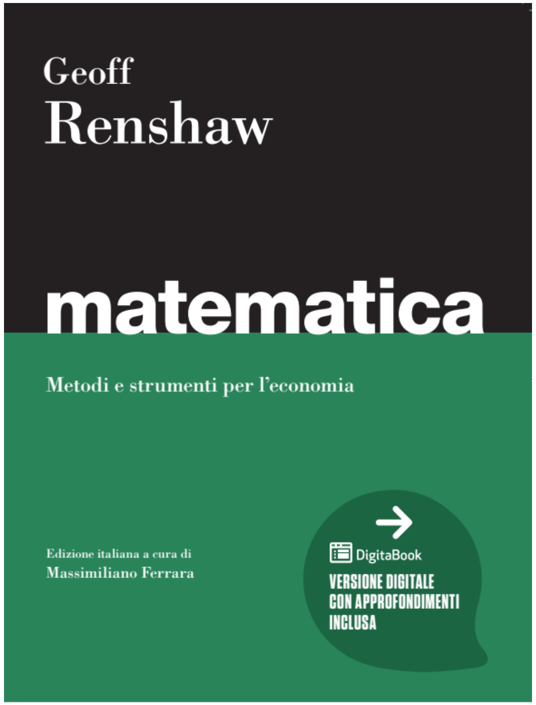
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 12 – Crescita continua e funzione esponenziale in base *e*



Ripasso sulla crescita discreta (Par. 10.4)

1. Formula di crescita composta $y = a(1+r)^x$ (Regola 10.1)

a = valore iniziale della variabile

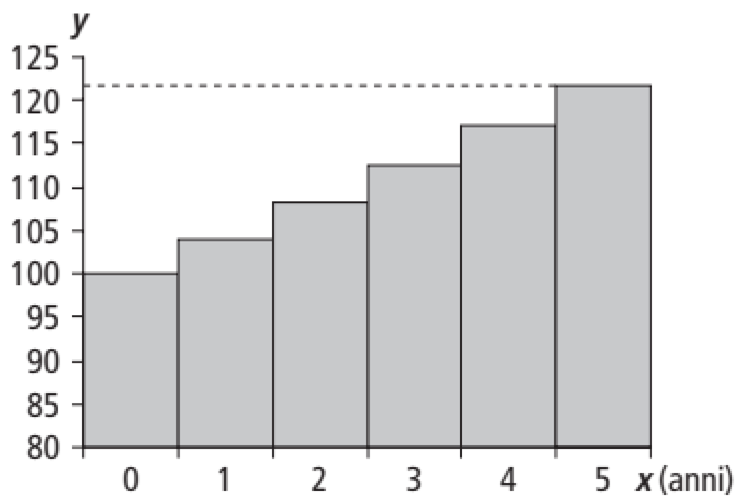
r = tasso di interesse annuo o tasso di crescita (in termini proporzionali, per cui *r* = 0,1 significa 10%)

x = numero di anni (*x* = 1, 2, 3,...)

y = «valore composto futuro» (= valore della variabile dopo *x* anni)

- Poiché *x* è un intero, *y* cresce per salti (crescita discreta)
- Il grafico è una funzione a gradini (come in fig. 10.1, prossima slide)

Figura 10.1 Crescita composta di un deposito bancario (Esempio 10.9) o di un indice dei prezzi (Esempio 10.11)



2. Se si compone l'interesse, o se la crescita avviene, *n* volte all'anno:

$y = a(1 + r)^x$ diventa: $y = a(1 + \frac{r}{n})^{nx}$ (Regola 10.5)

Il **tasso di interesse effettivo** o tasso di crescita è ora maggiore del tasso **nominale** (Regola 10.6).

Esempio: *a* = 100, *r* = 0,1, *x* = 1 (anni)

$$n = 1 \; : \; y = a(1 + \frac{r}{n})^{nx} = 100(1 + \frac{0{,}1}{1})^1 = 110$$

$$n = 2 \; : \; y = a(1 + \frac{r}{n})^{nx} = 100(1 + \frac{0{,}1}{2})^2 = 110{,}25$$

Crescita continua

Nella formula $y = a(1 + \frac{r}{n})^{nx}$, che cosa succede al crescere di *n*, ossia quando l'interesse viene composto (o la crescita avviene) sempre più di frequente?

Semplifichiamo ponendo *a* = 1, *r* = 1, *x* = 1

Allora abbiamo $y = (1 + \frac{1}{n})^{n}$

Che cosa succede a *y* al crescere di *n*?

$y = (1 + \frac{1}{n})^n$ al crescere di n :

$n = 1$	$y = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$
$n = 10$	$y = (1 + \frac{1}{10})^{10} = 2{,}5937$
$n = 10\,000$	$y = (1 + \frac{1}{10000})^{10000} = 2{,}7181459$
$n = 1\,000\,000$	$y = (1 + \frac{1}{1000000})^{1000000} = 2{,}718280469$

Concludiamo:

per $n \to \infty$

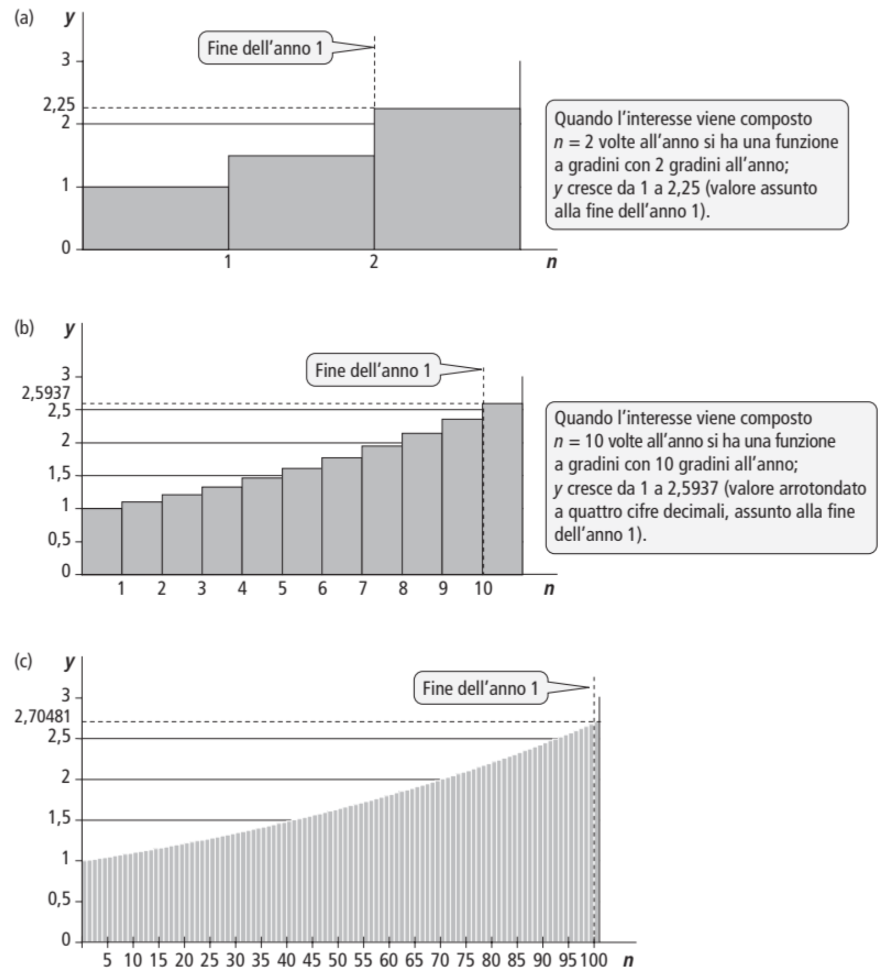
1. $y = (1 + \frac{1}{n})^n \to\ 2{,}71828......\ \ (\text{limite})$

Etichettiamo il limite con e, per cui $y = (1 + \frac{1}{n})^n \to\ e\ \text{ per } n \to \infty$

2. Il grafico di $y = (1 + \frac{1}{n})^n$ si approssima a quello di una curva «liscia»

(fig. 12.1)

Figura 12.1 Valori di $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$, con $x = 1$, dopo 1 anno, per diversi valori di n



Quando l'interesse viene composto $n = 100$ volte all'anno si ha una funzione a gradini con 100 gradini all'anno; y cresce da 1 a 2,70481 (valore arrotondato a cinque cifre decimali, assunto alla fine dell'anno 1). Al tendere di n a infinito la funzione a gradini tende a divenire una funzione continua e y tende al valore limite indicato con e.

Generalizzazione

Facendo variare *a*, *r* e *x* otteniamo:

Per $n \to \infty, y = a(1+\frac{r}{n})^{nx} \;\to\; ae^{rx}$

Perciò $y = ae^{rx}$ è la nostra formula di crescita continua (Regola 12.2b)

Questa funzione è detta **funzione esponenziale in base *e***.

Nelle prossime slide: grafici di $y = ae^{rx}$ per vari valori dei parametri (figg. 12.2 – 12.6)

Figura 12.2 Grafico di $y = e^x$ (asse y non in scala)

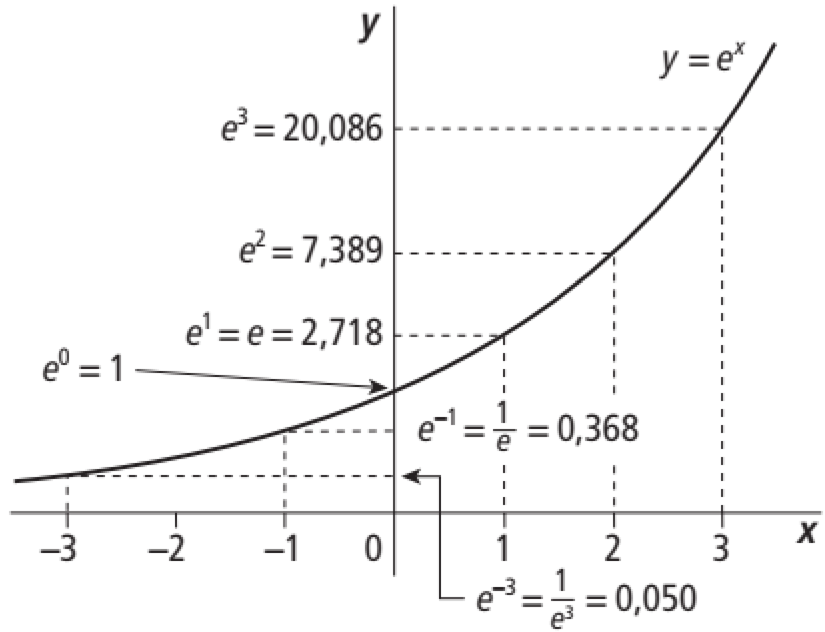


Figura 12.3 Grafici di $y = e^{2x}$ e di $y = e^x$ a confronto (asse y non in scala)

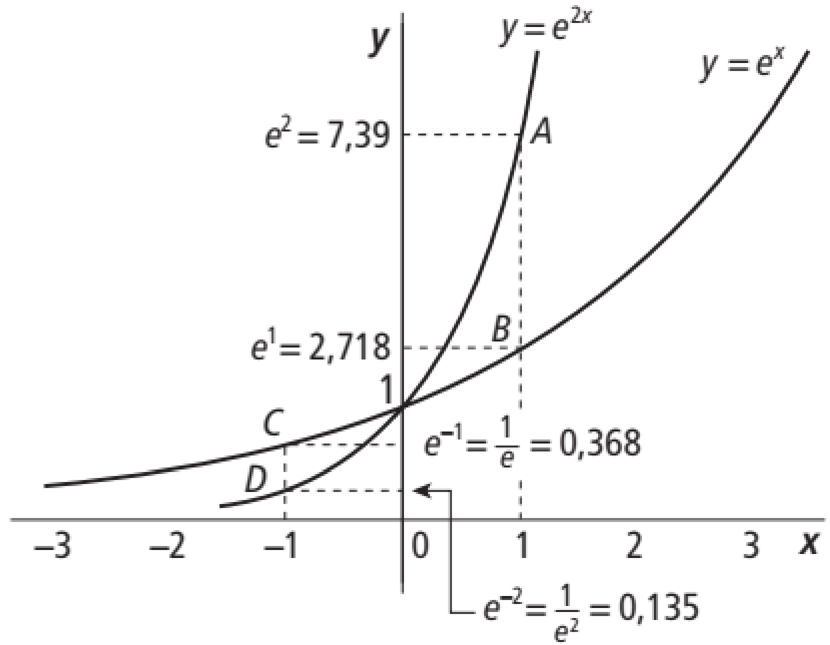


Figura 12.4 Grafici di $y = e^{0,5x}$ e di $y = e^x$ a confronto (asse y non in scala)

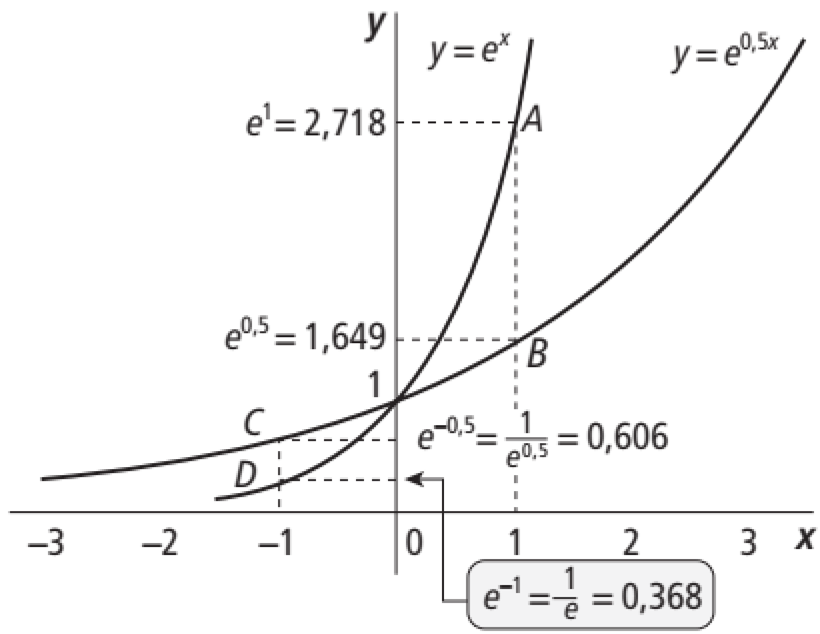


Figura 12.5 Grafico di $y = e^{-x}$ (asse y non in scala)

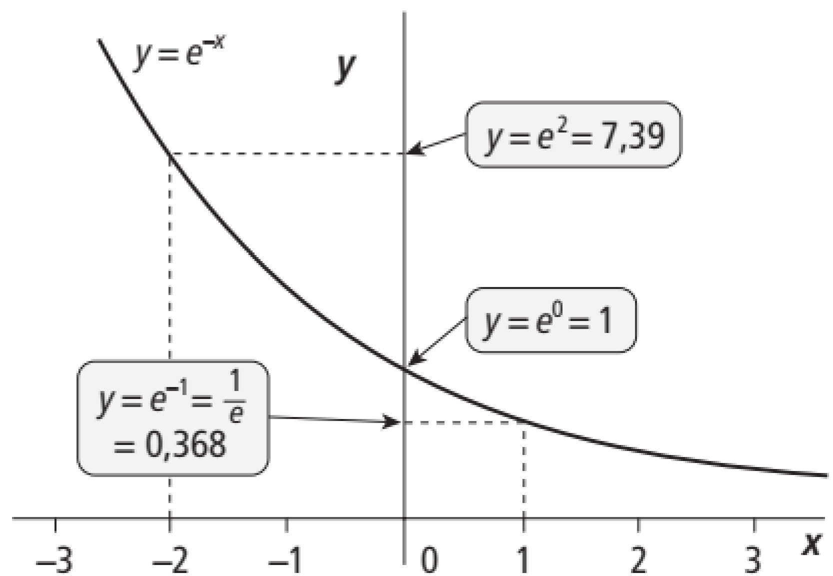
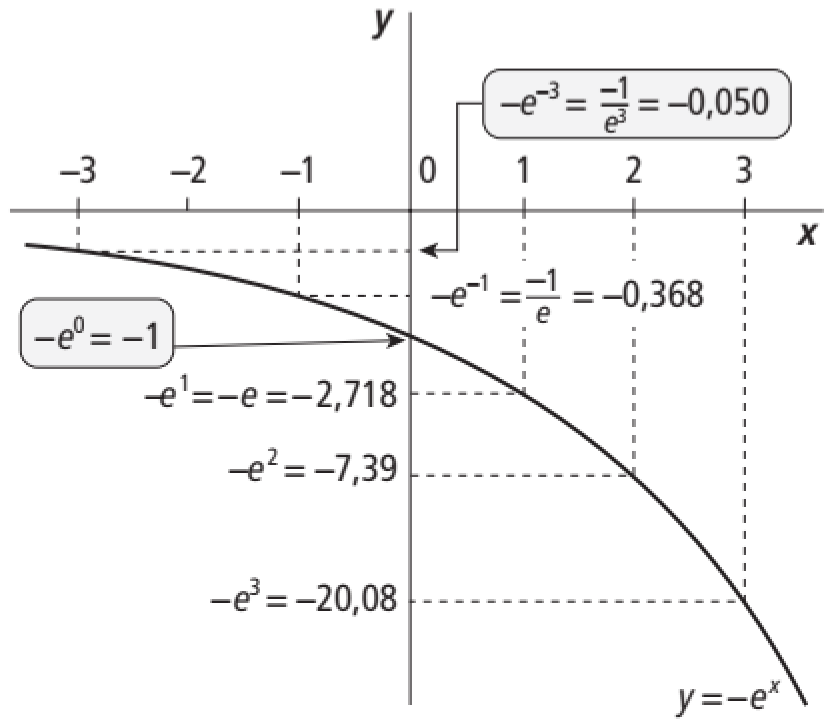


Figura 12.6 Grafico di $y = -e^x$ (asse y non in scala)



Logaritmi naturali

1. Ripasso: dai Paragrafi 11.1 – 11.6:

$x = \log_{10} y$ è la funzione inversa di $y = 10^x$ (Regola 11.1)

perciò ha il suo stesso grafico (fig. 11.2). Ne riscriviamo l'equazione

come $y = \log_{10} x$ in modo che la variabile dipendente sia *y*

2. Analogamente:

$x = \log_e y$ è la funzione inversa di $y = e^x$ (Regola 12.3)

perciò ha il suo stesso grafico. Ne riscriviamo l'equazione come

$y = \log_e x$ in modo che la variabile dipendente sia *y* (fig. 12.8).

Figura 11.2 Grafici di $y = 10^x$ e di $x = \log_{10} y$ (non in scala)

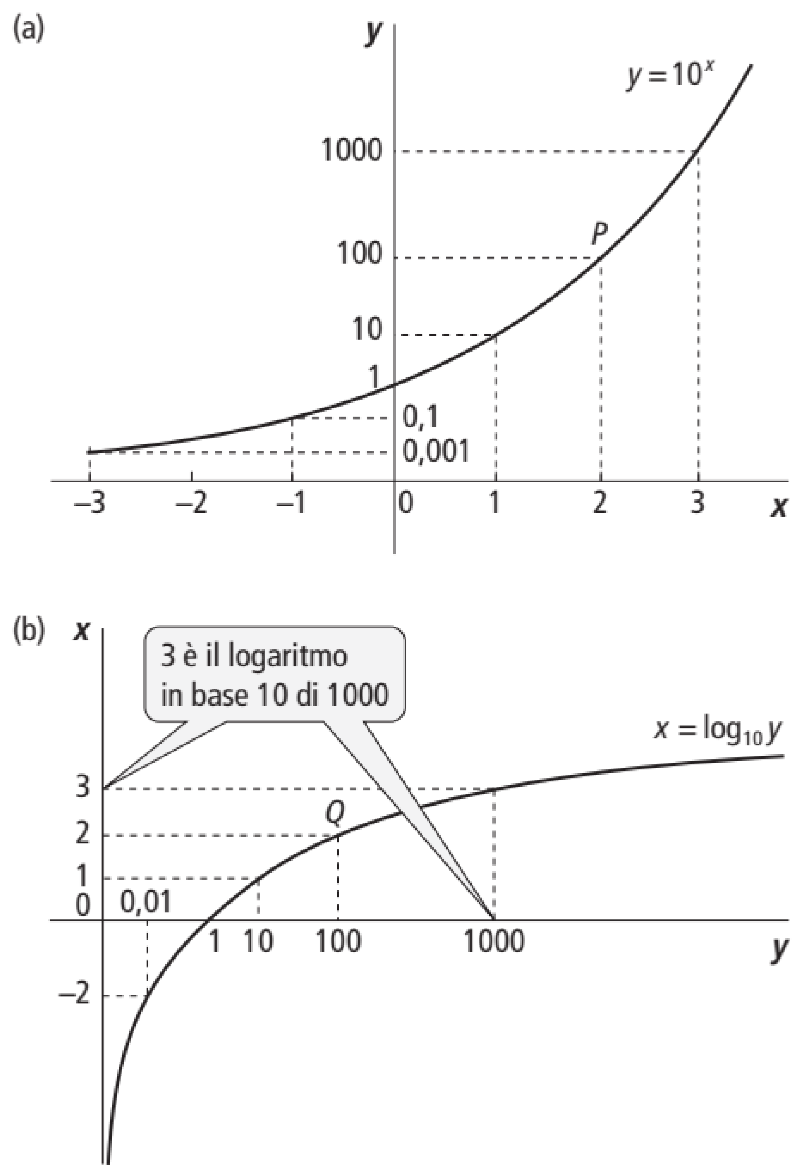
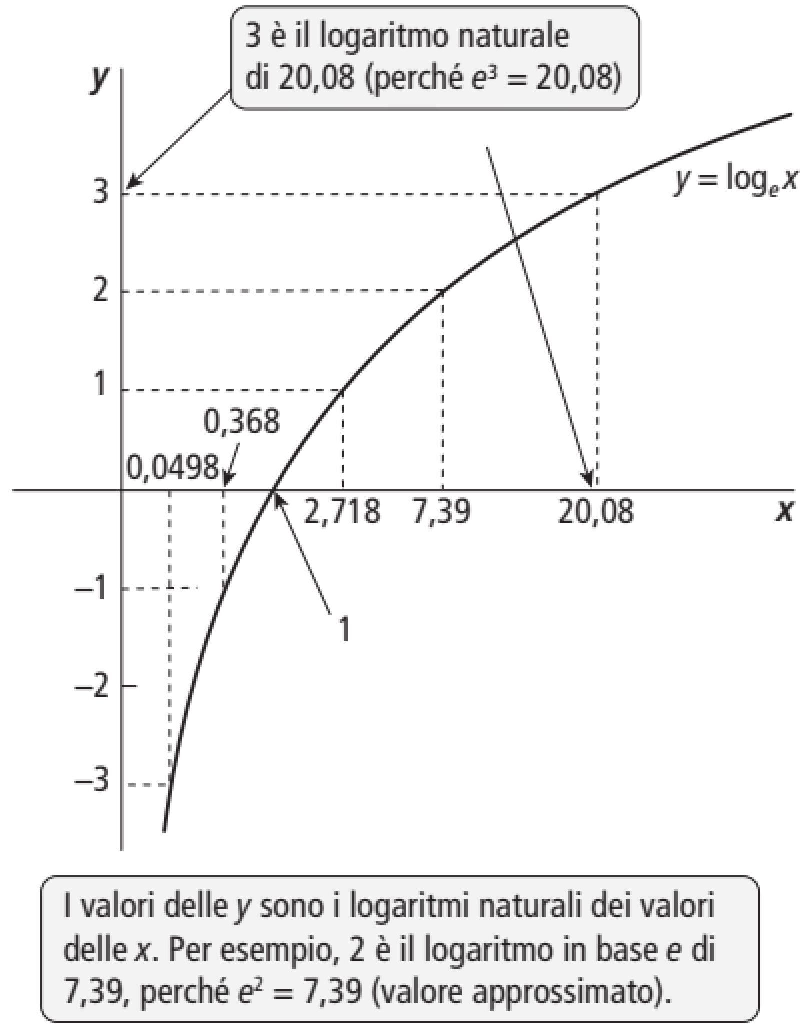


Figura 12.8 Grafico di $y = \log_e x$ (asse x non in scala)



Logaritmi naturali con la calcolatrice

- Per calcolare $\log_e 100$, premere ln/100/=, ottenendo 4.6052.
- Per invertire il calcolo, premere SHIFT o INV, seguito da ln/4.6052/=, ottenendo 100.

  (Nota: in effetti si sta calcolando $e^{4,6052}$)

Nota: $\log_e x$ viene scritto, di solito, come $\ln x$

Regole per manipolare i logaritmi naturali (Regola 12.4)

Sono le stesse regole valide per i logaritmi decimali, ma comunque le ripetiamo (slide successiva.)

1. Se $A = B$, allora $\ln A = \ln B$

2. $\ln(AB) = \ln A + \ln B$ **REGOLA IMPORTANTE**

3. Dalla **2**, se $A = B$, $\ln(A^2) = \ln A + \ln A = 2(\ln A)$

Generalizzando, $\ln(A^n) = n(\ln A)$

4. $\ln(\frac{A}{B}) = \ln A - \ln B$ (inverso della **2**)

5. Dalla **4**, se $A = B$, $\ln(\frac{A}{A}) = \ln A - \ln A = 0$; perciò $\ln(1) = 0$

6. ln(e) = 1 (perché $e^1 = e$)

Applicazioni della funzione esponenziale naturale (1)

Ripasso:

1. Formula di crescita continua $y = ae^{rx}$

2. Formula di crescita discreta $y = a(1+r)^x$

Possiamo usare una delle due formule per descrivere una variabile economica che cresce nel tempo.

In economia teorica si preferisce $y = ae^{rx}$; in economia applicata si preferisce $y = a(1+r)^x$. Non c'è però una regola ferrea.

Si ottengono risultati leggermente differenti ma la differenza è trascurabile, per la maggior parte degli scopi.

Applicazioni della funzione esponenziale naturale (2)

Esempio: PIL iniziale = 100; successivamente cresce al 4% annuo. Quanto vale dopo 5 anni?

1. Supponendo la crescita continua:

$y = ae^{rx}$ con a = 100; r = 0,04; x = 5. Allora:

$y = 100e^{0{,}04\times 5} = 100e^{0{,}2} = 122{,}14$

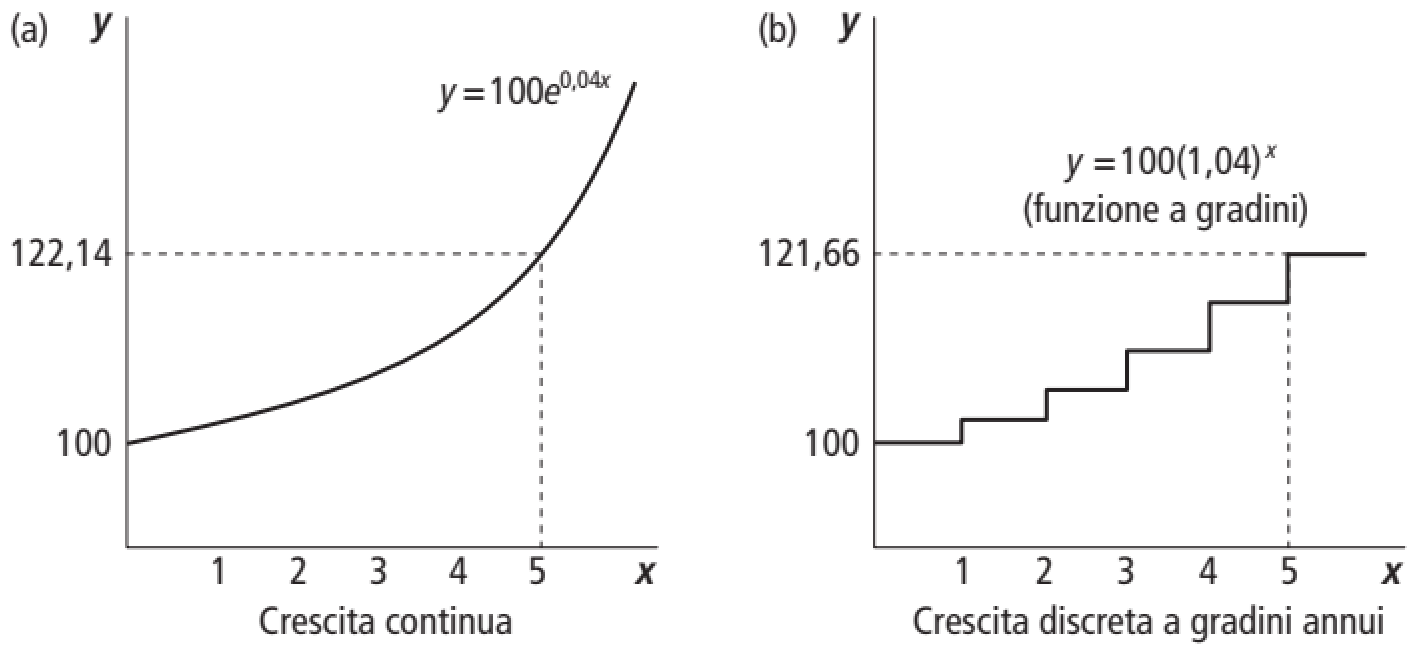
(Calcolatrice: SHIFT/ln/0.2/=)

2. Supponendo la crescita discreta, per salti annuali:

$y = a(1+r)^x$ con a = 100 ; r = 0,04; x = 5. Allora:

$y = 100(1+0{,}04)^5 = 121{,}66$ (fig. 12.9)

Figura 12.9 Crescita complessiva percentuale del PIL dopo 5 anni (asse *y* non in scala)



Ancora su tasso di crescita/tasso di interesse effettivi

Abbiamo visto nel Capitolo 10, Regola 10.6, che quando l'interesse viene composto, o la crescita avviene, più volte l'anno il tasso di crescita **effettivo** è maggiore di quello **nominale**.

Regola 12.5: Quando la crescita è continua, il tasso effettivo è $e^r - 1$, dove *r* è il tasso nominale.

Per esempio, con un tasso nominale del 4% si ha $e^r - 1 = e^{0,04} - 1 = 0{,}0408$, o 4,08%

Ciò significa che la crescita continua al tasso nominale del 4% annuo è equivalente a una crescita per salti annuali al 4,08% annuo.

Attualizzazione continua

Ripasso: Il VA di un singolo pagamento di € *a* con scadenza fra *x* anni da oggi, scontato una volta all'anno al tasso del 100*r*%, è:

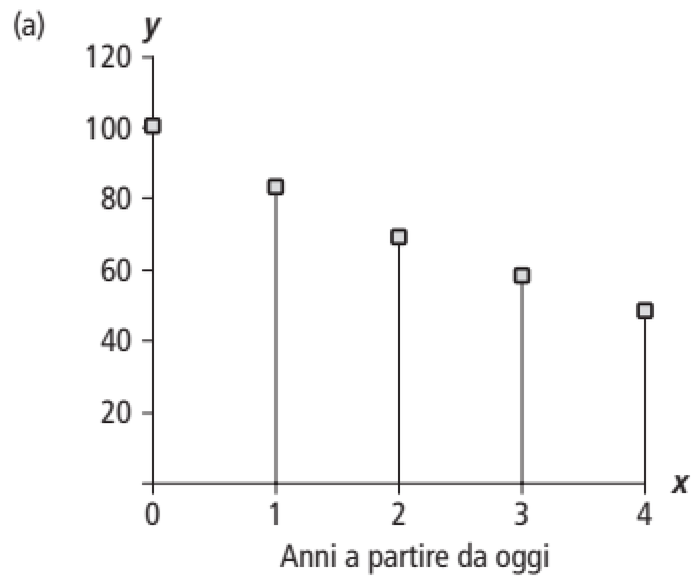
$y = \frac{a}{(1+r)^x}$ o $y = a(1+r)^{-x}$ (Regola 10.7)

Se l'attualizzazione è continua, VA diventa:

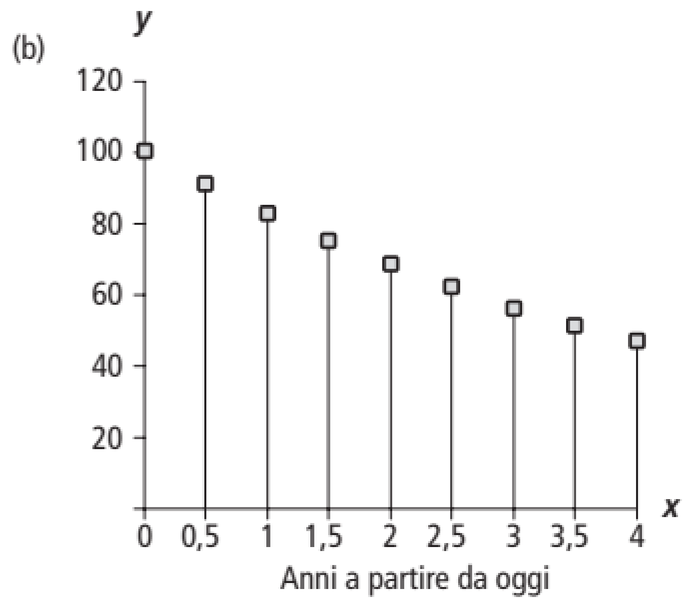
$y = \frac{a}{e^{rx}}$ o $y = ae^{-rx}$ (Regola 12.7)

Come con le precedenti formule di crescita, si può usare una formula o l'altra per calcolare un VA. La differenza è in genere trascurabile (fig. 12.10).

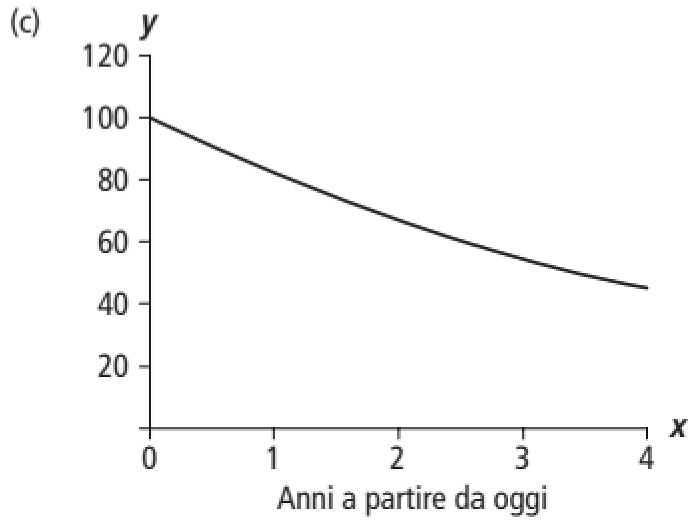
Figura 12.10 Valore attuale di un singolo pagamento di 100 € in funzione della scadenza, quando r = 0,2. (a) Scadenze annuali con sconto annuale; (b) scadenze semestrali con sconto semestrale; (c) scadenze continue con sconto continuo



$$y = \frac{a}{(1+r)^x} \text{ con } a = 100, r = 0{,}2, \text{ e } x = 1, 2, 3, , , ,$$



$$y = \frac{a}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nx}}$$ con $n = 2$, $a = 100$, $r = 0{,}2$ e $x = 0{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 2{,}5, \ldots$



$y = \frac{a}{e^{rx}}$ con $a = 100$, $r = 0{,}2$ e x è una variabile continua

Grafici in scala semi-logaritmica

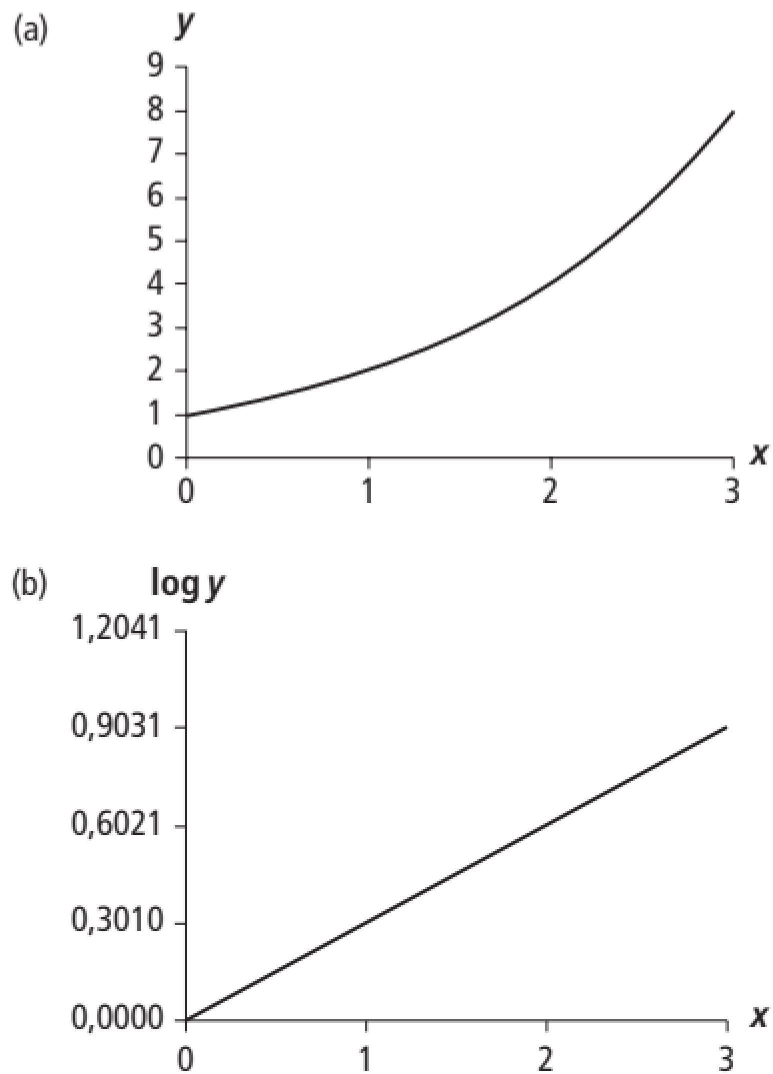
CONSIDERAZIONE ESSENZIALE: se una variabile *y* cresce a un tasso proporzionale costante, il suo logaritmo cresce a un tasso assoluto costante.

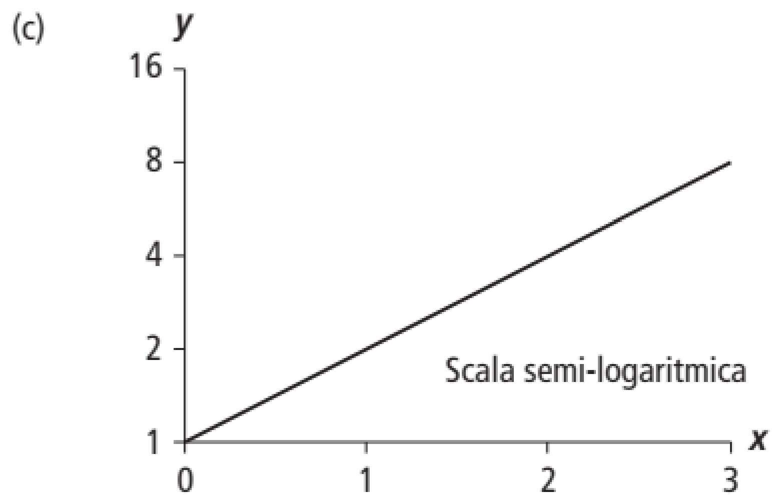
Esempio: *y* cresce al 100% annuo, per salti annuali:

x (anni)	0	1	2	3
y	1	2	4	8
log y	0	0,30103	0,60206	0,90309
ln y	0	0,69315	1,38629	2,07944

Il grafico di *y* in funzione del tempo risulta non lineare e ripido, mentre il grafico di log *y* o di ln *y* è lineare (fig. 12.11).

Figura 12.11 Una variabile economica, *y*, che cresce a un tasso costante.





In (a), y sembra crescere abbastanza rapidamente nel tempo ma non siamo in grado di dire se il tasso di crescita è costante, crescente o decrescente;
in (b), dove sull'asse y sono riportati i log y, il fatto che il grafico sia lineare ci dice che il tasso di crescita di y è costante; la figura (c) è identica alla (b), ma al posto dei log y sono riportati i valori di y: ciò consente di ricavare più informazioni dal grafico.