Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

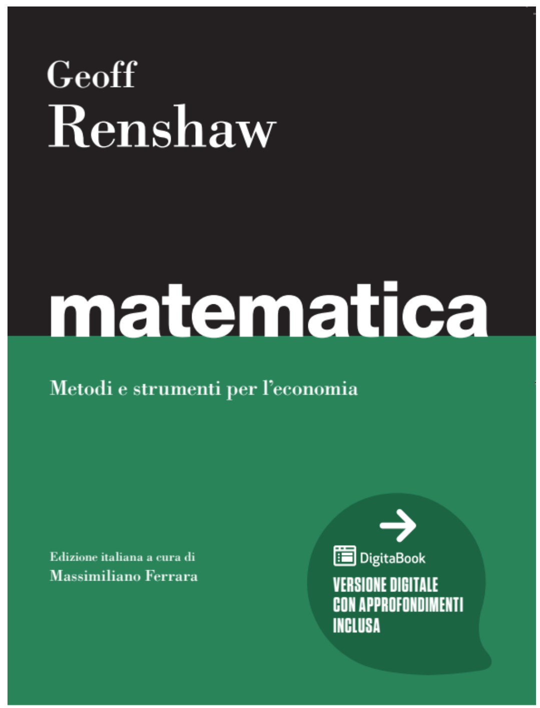
A.A. 2023/2024

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l’economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 15 – Algebra delle matrici



Egea

Definizioni e notazioni

Matrice: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ è di ordine 2×3 (2 righe, 3 colonne)

a_{11}, a_{12}, .. elementi (il primo pedice indica la riga, il secondo la colonna).

Matrice quadrata: n. di righe = n. di colonne

Matrice nulla: costituita da tutti zero

Matrice identità: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vettore riga di ordine 1×4: $\mathbf{a} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$

Vettore colonna di ordine 3×1: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$

Operazioni su matrici e vettori (1)

$$\mathbf{1.\ A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Trasposta: $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$

Ossia le colonne diventano righe e viceversa.

A' viene anche scritta $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

Operazioni su matrici e vettori (2)

2. Addizione/sottrazione di 2 matrici: si addizionano/sottraggono gli elementi corrispondenti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

L'operazione è possibile solo con matrici dello stesso ordine. Dunque:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$ è impossibile

Operazioni su matrici e vettori (3)

3. Moltiplicazione: **A** × **B** = **C** significa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

L'elemento c_{11} di **C** si trova moltiplicando ciascun elemento della prima riga di **A** per ciascun elemento della prima colonna di **B** e poi sommando i risultati.

L'elemento c_{12} di **C** si trova moltiplicando ciascun elemento della prima riga di **A** per ciascun elemento della seconda colonna di **B** e poi sommando i risultati.

E via dicendo.

Operazioni su matrici e vettori (4)

A × **B** è possibile solo se il numero di elementi delle righe di **A** è uguale al numero di elementi delle colonne di **B**. In tal caso **A** e **B** sono conformabili.

Moltiplicazione a destra o a sinistra:

In **A** × **B**, **B** moltiplica a destra **A**. Si scrive **AB**

In **B** × **A**, **B** moltiplica a sinistra **A**. Si scrive **BA**

In generale **A** × **B** ≠ **B** × **A**.

Moltiplicazione di vettori

Moltiplicazione di vettori: se **a** è un vettore riga e **b** un vettore colonna:

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

(il risultato è un numero, detto scalare); invece

$$\mathbf{ba} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{11}a_{13} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{21}a_{13} \\ b_{31}a_{11} & b_{31}a_{12} & b_{31}a_{13} \end{bmatrix}$$

(il risultato è una matrice 3 × 3)

Determinanti (1)

Moltiplicazione di una matrice per uno scalare (numero fisso):

$$k\mathbf{A} = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

La moltiplicazione per *k* scala ogni elemento di un fattore *k*.

Determinante di una matrice quadrata

Matrice 2×2: se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, il determinante di **A**, scritto det **A**

o $|\mathbf{A}|$, è uguale a $ad - cb$.

Determinanti (2)

Matrice 3×3: se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

il determinante è: $|\mathbf{A}| = a_{11}|\mathbf{M_{11}}| - a_{12}|\mathbf{M_{12}}| + a_{12}|\mathbf{M_{13}}|$

dove $|\mathbf{M_{11}}|$ è il determinante della sotto-matrice ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna di **A**; ossia:

$$|\mathbf{M}_{11}| = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$|\mathbf{M}_{12}|$ è il determinante della sotto-matrice ottenuta cancellando la prima riga e la seconda colonna di **A**, ossia:

$$|\mathbf{M}_{12}| = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

e così via.

Determinanti (3)

Nota che i segni di $|\mathbf{M_{11}}|$, $|\mathbf{M_{12}}|$ ecc. sono + se i pedici hanno per somma un numero pari e − se hanno per somma un numero dispari. Si chiamano minori con segno, o cofattori.

Per calcolare i determinanti di matrici di ordine maggiore conviene usare Microsoft Excel o programmi simili.

Il determinante è definito solo per matrici quadrate.

Inversa di una matrice quadrata (1)

Nell'algebra ordinaria diciamo che y e y^{-1} sono una l'inversa dell'altra perché $y^{-1}y = 1$. Analogamente, in algebra matriciale $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{A}$ sono inverse perché $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (**I** = matrice identità).

Per trovare l'inversa di $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

1. Calcoliamo il determinante $|\mathbf{A}|$ come spiegato poc'anzi. Se è uguale a zero, l'inversa non esiste.

Inversa di una matrice quadrata (2)

2. Troviamo tutti i minori con segno, $|\mathbf{M_{11}}|$, $|\mathbf{M}_{12}|$ ecc., come spiegato.

Dopodiché costruiamo con essi la matrice **C**; la sua trasposta **C'** è:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} |\mathbf{M}_{11}| & -|\mathbf{M}_{21}| & |\mathbf{M}_{31}| \\ -|\mathbf{M}_{12}| & |\mathbf{M}_{22}| & -|\mathbf{M}_{32}| \\ |\mathbf{M}_{13}| & -|\mathbf{M}_{23}| & |\mathbf{M}_{33}| \end{bmatrix}$$

3. A questo punto l'inversa di **A** è:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C}' = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} |\mathbf{M}_{11}| & -|\mathbf{M}_{21}| & |\mathbf{M}_{31}| \\ -|\mathbf{M}_{12}| & |\mathbf{M}_{22}| & -|\mathbf{M}_{32}| \\ |\mathbf{M}_{13}| & -|\mathbf{M}_{23}| & |\mathbf{M}_{33}| \end{bmatrix}$$

Se eseguiamo il calcolo di $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ troveremo che è uguale a **I**.

Applicazione dell’algebra matriciale

L’algebra matriciale è utile come notazione compatta per i sistemi di equazioni lineari.

Esempio: dato il sistema costituito dalle tre equazioni:

$$4x + y - 5z = 8$$

$$-2x + 3y + z = 12$$

$$3x - y + 4z = 5 \qquad \text{(Esempio 15.8)}$$

lo possiamo scrivere come **Ax** = **b**, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Possiamo trovare le soluzioni per *x*, *y* e *z* determinando il vettore **x**.

Data **Ax** = **b**, se moltiplichiamo ambo i membri a sinistra per $\mathbf{A}^{-1}$ otteniamo:

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Poiché $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x}$ e $\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, abbiamo $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Usando il metodo spiegato in precedenza:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C}' = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{98}\begin{bmatrix} 13 & 1 & 16 \\ 11 & 31 & 6 \\ -7 & 7 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ossia, $x = 2$, $y = 5$, $z = 1$ (verifica i calcoli)

Un'applicazione alla macroeconomia

Supponiamo di avere il modello macroeconomico:

$Y = C + I + G + X - M$ (condizione di equilibrio)

$C = a(Y - T) + b$ (funzione di consumo)

$T = tY$ (gettito fiscale, dove t = aliquota, T = gettito)

Le incognite sono Y, C e T.

Le variabili esogene sono I, G e X−M.

I parametri sono a e b, la pendenza e l'intercetta della funzione di consumo; e l'aliquota, t. (Tuttavia, per ragioni di convenienza consideriamo b come variabile esogena.)

Per risolvere, per prima cosa riscriviamo le equazioni come segue:

$$Y - C = I + G + X - M$$

$$-aY + C + aT = b$$

$$-tY + T = 0$$

Possiamo ora scriverle in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + G + X - M \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo cioè **Ax** = **b**, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & 1 & a \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} ; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T + G + X \ - M \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota che **A** è una matrice di parametri (la propensione marginale al consumo, *a*, e l'aliquota fiscale, *t*), **x** è un vettore di incognite (*Y*, *C*, *T*) e **b** è un vettore di variabili esogene (*I*, *G*, *X*−*M*, *b*). È uno schema molto comune nei modelli economici.

Data **Ax** = **b**, la soluzione rispetto a **x**, il vettore colonna delle incognite, è $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Usando il metodo già descritto, troviamo che $\mathbf{A}^{-1}$ è:

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1-a(1-t)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ a(1-t) & 1 & -a \\ t & t & 1-a \end{bmatrix}$ e perciò $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ è:

$$\begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a(1-t)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ a(1-t) & 1 & -a \\ t & t & 1-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I+G+X-M \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora calcolare rapidamente *Y*, *C* o *T* per ogni valore dei parametri e delle variabili esogene.

Analisi input-output

Supponiamo che in un'economia vi siano tre industrie, ciascuna delle quali vende parte del proprio output alle altre due. Possiamo costruire una matrice dei coefficienti di input, **A**, in cui a_{12} è il valore delle vendite dell'industria 1 all'industria 2, per consentire a questa di produrre una unità; il termine generale a_{ij} è definito analogamente. Dunque:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se scriviamo i valori degli output totali di ciascuna industria come x_1, x_2 e x_3 e le vendite ai consumatori finali come c_1, c_2 e c_3, allora per l'industria 1 deve valere la seguente identità:

$$x_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + c_1$$

Che possiamo riscrivere come:

$$(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \equiv c_1$$

Le corrispondenti equazioni per le industrie 2 e 3 sono:

$$-a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - a_{23}x_3 \equiv c_2$$

e $$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (1 - a_{33})x_3 \equiv c_3$$

Possiamo scrivere queste ultime tre equazioni in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad \text{ossia:} \qquad (\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

dove $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **A** è già stata definita; **x** è un vettore di output totali (lordi) delle 3 industrie e **c** è un vettore che descrive i consumi finali dei loro output.

La matrice $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ è nota come matrice di Leontief.

Data $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{c}$, i pianificatori economici possono voler conoscere gli output totali o lordi delle 3 industrie (gli elementi di **x**) che soddisfano un dato vettore di domande finali (gli elementi di **c**). Per far ciò, possono calcolare l'inversa della matrice di Leontief, $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}$.

Si ha allora $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$

Da cui $\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$

Questa equazione fornisce **x**, il vettore delle produzioni lorde, per un dato vettore di output finali **c**.