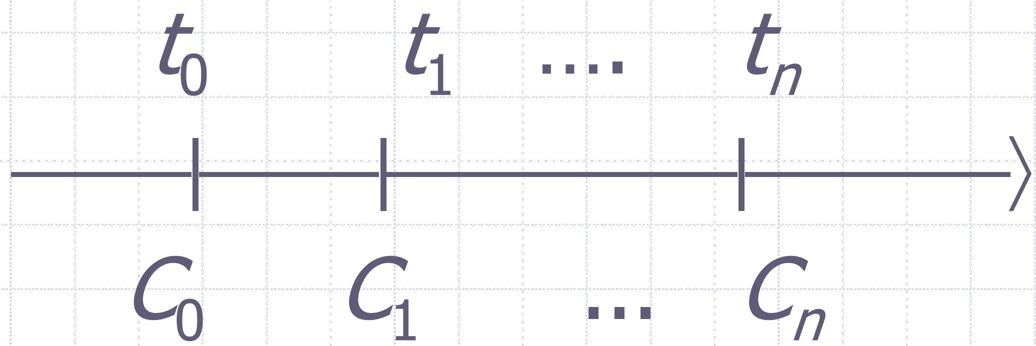
Matematica Finanziaria

Lezione 8

Contenuti della lezione

- *Operazioni finanziarie, criterio del tempo di recupero.*
- *Criteri del REA, TIR*

Operazione finanziaria



Flusso di cassa_(*cash flow*) generato da un'operazione finanziaria

All'epoca t_s si genera un flusso finanziario C_s, che può essere $C_s > 0$ se si tratta di un ricavo, $C_s < 0$ se si tratta di un costo.

Investimenti e finanziamenti

Il più elementare progetto (operazione semplice) è un costo seguito da un ricavo. In tal caso, l'operatore impiega un capitale iniziale (sostiene un costo) allo scopo di conseguire un capitale futuro (acquisto di titolo privo di cedole, prestito con rimborso in un'unica soluzione).

Al contrario, un ricavo iniziale seguito da un costo finale, si configura come un'operazione di *finanziamento*. E' il caso, ad esempio di un operatore che contrae un prestito per poi procedere, in un'unica soluzione, al suo rimborso.

Classificazione degli investimenti_1

- *investimento in senso stretto*, se i costi o uscite monetarie precedono temporalmente i ricavi o entrate monetarie.
- *finanziamento in senso stretto*, se i ricavi o entrate monetarie precedono nel tempo i costi o uscite monetarie

Classificazione degli investimenti_2

Siano z_c e z_r le scadenze medie, rispettivamente, dei costi e dei ricavi

- *investimento in senso generale*: un'operazione per la quale $z_c < z_r$ per ogni $i \geq 0$;
- *finanziamento in senso generale*: un'operazione per la quale $z_c > z_r$ per ogni $i \geq 0$;

Classificazione degli investimenti_3

- *investimento in senso lato*: un'operazione per cui la scadenza media aritmetica dei costi precede l'epoca del primo ricavo;
- *finanziamento in senso lato*: un'operazione per cui la scadenza media aritmetica dei ricavi precede l'epoca del primo costo.

Classificazione degli investimenti_4

Definiamo per ogni epoca di scadenza *t*, l'ammontare che definisce il *saldo contabile* tra costi e ricavi in *t*.

$$S(t) = \sum_{h \leq t} C_h$$

- *investimento puro*: un'operazione per cui $S(t)$ cambia segno una sola volta, passando dal negativo al positivo;
- *finanziamento puro*: un'operazione per cui $S(t)$ cambia segno una sola volta, passando dal positivo al negativo.

Generalità sui criteri di scelta tra progetti_1

- La scelta tra progetti *P* consiste nel definire un criterio di scelta che associ ad ogni *P* un numero $I(P) \in \Re$, detto *indice di preferenza*, o *indice di utilità*.
- Affinché un criterio di scelta possa essere applicato correttamente è necessario che i progetti che vengono posti a confronto abbiano il requisito della *completezza*, ossia i progetti devono avere la medesima struttura rispetto al capitale e all'arco temporale (vedi libro di testo)

Generalità sui criteri di scelta tra progetti_2

- Se $I(A) > I(B)$, vorrà dire che il progetto A è preferito al progetto B e scriveremo $A \succ B$, mentre $I(B) > I(A)$ indica che il progetto B è preferito al progetto A, ossia $B \succ A$.
- Infine $I(A) = I(B)$ vuol dire che i due progetti sono equivalenti ($A \approx B$).

Il criterio del pay-back o del tempo di recupero del capitale_1

L'indice di preferenza del pay-back, detto anche *periodo di pareggio finanziario* o *tempo di recupero del capitale*, indica il tempo necessario affinché si possa recuperare integralmente il capitale impiegato.

Il criterio del pay-back o del tempo di recupero del capitale_2

- Per una data operazione finanziaria, si definisce *tempo di recupero* del capitale la scadenza più vicina tra quelle per le quali il totale dei ricavi consente di recuperare i costi sostenuti, cioè eguagliarli o superarli; in altre parole, il tempo di recupero t_p è la prima scadenza alla quale si realizza un'inversione di segno nei saldi di cassa S_k del progetto stesso.

$$t_p = \{min\ t_k \mid C_0 \cdot S_k \leq 0,\ k = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

Il criterio del pay-back o del tempo di recupero del capitale_3

Avendo posto

$$I(P) = \begin{cases} -t_P & \text{se } P \text{ è un investimento} \\ t_P & \text{se } P \text{ è un finanziamento} \end{cases}$$

quindi per due investimenti A e B, sarà

$$A \succ B \text{ se e solo se } t_A < t_B$$

e per due finanziamenti A e B, sarà

$$A \succ B \text{ se e solo se } t_A > t_B$$

Il criterio del pay-back o del tempo di recupero del capitale_4

- tra più alternative di investimento si preferisce quella con tempo di recupero minore, mentre tra più alternative di finanziamento si preferisce quella con tempo di recupero maggiore.
- due alternative con il medesimo tempo di recupero sono ritenute indifferenti (ma non necessariamente identiche).

Il criterio del pay-back o del tempo di recupero del capitale_5

- Si noti che nella definizione di tempo di recupero i saldi di cassa sono moltiplicati per C_0 in modo da usare la stessa formula sia per gli investimenti ($C_0<0$) che per i finanziamenti ($C_0>0$).
- L'indice di preferenza associato ad ogni progetto finanziario calcolato secondo il metodo del pay-back, conduce all'indicazione di una *dimensione temporale*, invece che di un valore economico reddituale, tipico di criteri quali T.I.R. e R.E.A. Esso esprime il grado di liquidità di un progetto.

Limiti del criterio del pay-back

- Non tiene conto della distribuzione temporale dei costi e dei ricavi entro t_p, e trascura i ricavi e/o i costi successivi a t_p.
- Considera indifferenti due operazioni con uguale tempo di recupero sebbene una di esse termini in t_p, mentre l'altra faccia registrare ulteriori entrate o uscite successive a t_p. (queste ultime infatti non vengono considerate).

Esempio

Quale dei due progetti è più conveniente?

$$C_A = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}, C_B = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 400 \\ 800 \end{bmatrix} \quad t_A = t_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$A \succ B$ *infatti* $t_A=3$, $t_B=4$

Il criterio del risultato economico attualizzato (R.E.A.)_1

Fissato un tasso di valutazione *i*, si dice *Risultato Economico Attualizzato* (*R.E.A.*) di un'operazione finanziaria il valore attuale dei suoi flussi di cassa.

Indicando con C_k gli importi dei flussi di cassa derivanti dall'operazione finanziaria P e con t_k le relative scadenze (k = 0, 1, 2, ..., n), sarà:

$$V(i) = \sum_{k=0}^{n} C_k \, g(t_k)$$

dove $g(t_k)$ è il fattore di sconto secondo una prescelta legge di attualizzazione.

Il criterio del risultato economico attualizzato (R.E.A.)_proprietà

$$\text{per } i = 0, V(0) = \sum_{k=0}^{n} C_k \qquad\qquad \lim_{i \to +\infty} V(i) = C_0$$

se il tasso di valutazione è nullo, il R.E.A. è la somma delle poste

se il tasso di valutazione tende a + ∞ il R.E.A. tende al valore della prima posta

Il criterio del risultato economico attualizzato (R.E.A.)_3

$I(P) = V(i)$

sia che P sia un investimento che un finanziamento

Tra più alternative, sia di investimento che di finanziamento, si preferisce quella che presenta un R.E.A. maggiore; due alternative con il medesimo R.E.A. sono ritenute indifferenti (ma non necessariamente identiche).

Il criterio del risultato economico attualizzato (R.E.A.)_4

Il R.E.A è un operatore lineare, ossia

$$R.E.A._{A+B} = R.E.A._{A} + R.E.A._{B}$$

e

$$R.E.A._{\alpha A} = \alpha\, R.E.A._{A}$$

con numero reale qualunque.

(il progetto ($A + B$) è un'operazione finanziaria il cui vettore dei capitali è dato dalla somma dei capitali dei singoli progetti A e B alle rispettive scadenze comuni; αA è un progetto con stesse scadenze di A e i cui capitali sono i capitali di A moltiplicati per α)

Esempio

$$C_A = \begin{bmatrix} -1000 \\ 300 \\ 500 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}, t_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad C_B = \begin{bmatrix} -1.000 \\ 200 \\ 300 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}, t_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Con legge esponenziale al tasso periodale del 7% si ha

$V_A(0,07) = 267,141$; $V_B(0,07) = 75,2845$

quindi $A \succ B$

Il criterio del risultato economico attualizzato (R.E.A.)_5

Per il calcolo del R.E.A. si utilizza in genere il regime composto in convenzione esponenziale quindi

$$V(i) = \sum_{k=0}^{n} C_k (1+i)^{-k}$$

Limiti del criterio del R.E.A.

Il R.E.A. fornisce un *criterio soggettivo*, in quanto dipendente dalla scelta del tasso *i* e utilizzando tassi diversi si giunge a risultati diversi. Pertanto la scelta del tasso è un problema cruciale per l'applicabilità del criterio.

*Il criterio del tasso interno di rendimento (T.I.R)*_1

Data un'operazione finanziaria si dice *Tasso Interno di Rendimento* (T.I.R.) dell'operazione stessa quel tasso di valutazione i^* ($i^* > -1$) in corrispondenza del quale il valore attuale dei suoi flussi di cassa si annulla, ossia è il tasso che rende equa l'operazione.

Da $$V(i) = \sum_{k=0}^{n} C_k \, g(t_k)$$ segue $$V(i^*) = 0$$

dove $g(t_k)$ è il fattore di sconto secondo una prescelta legge di attualizzazione.

Il criterio del tasso interno di rendimento (T.I.R)_2

Associando ad ogni progetto il corrispondente indice di preferenza, si ha:

$$I(P)=\begin{cases} i^{*} & \text{se } P \text{ è un investimento} \\ -i^{*} & \text{se } P \text{ è un finanziamento} \end{cases}$$

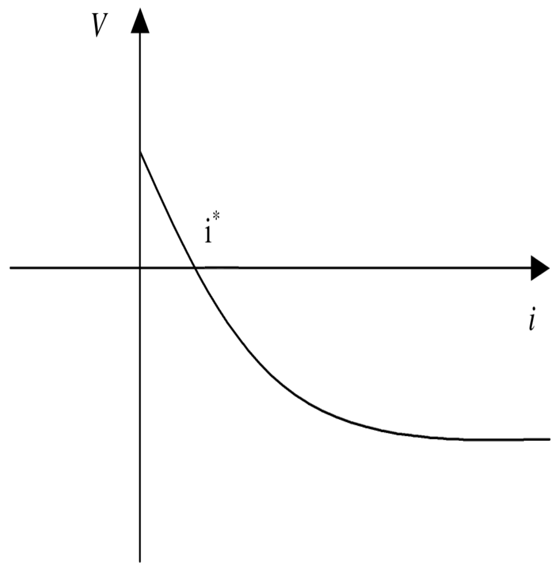
- tra più alternative d'investimento si preferisce quella che presenta un T.I.R. maggiore; tra più alternative di finanziamento si preferisce quella con T.I.R. minore; in quest'ultimo caso, si parla più propriamente di T.I.C. (tasso interno di costo);
- se due alternative hanno il medesimo T.I.R. esse sono ritenute indifferenti (ma non necessariamente identiche).

Il criterio del tasso interno di rendimento (T.I.R) Proprietà

- $T.I.R_{-A} = T.I.R_A$
- $T.I.R_{\alpha A} = T.I.R_A$
  $\forall \alpha \neq 0.$

Il criterio del tasso interno di rendimento (*T.I.R*)_4

- Riportiamo il grafico, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani (*i*, *V*), del R.E.A. di un investimento puro.
- Il T.I.R. relativo al progetto è dato dall'ascissa del punto in cui il grafico della funzione *V*(*i*) interseca l'asse delle ascisse



Esistenza ed unicità del T.I.R

- La determinazione del TIR è legata alla soluzione dell'equazione $V(i) = 0$.
- La risoluzione di tale equazione può condurre all'individuazione di nessuna radice, una radice, più radici.
- Di queste non tutte possiedono un significato finanziario, pertanto sarà compito dell'utilizzatore verificare l'accettabilità dei risultati, in particolare la loro compatibilità con le reali situazioni di mercato.

*Il criterio del tasso interno di rendimento (T.I.R)*_6

Qualora si operi nel regime dell'interesse composto, il TIR si trova risolvendo l'equazione (di grado *n*) in *i*

$$V(i^*) = \sum_{k=0}^{n} C_k (1+i^*)^{-k} = 0$$

Esempio

Data l'operazione finanziaria

$$\begin{array}{cccc} -1000 & 620 & 560 & \\ \vdash & \vdash & \vdash & \longrightarrow \\ 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

$V(i^*) = -1000 + 620\,(1 + i^*)^{-1} +$
$560\,(1 + i^*)^{-2} = 0$ da cui si ottiene

$i^*_1 = -150\%$ non accettabile, $i^*_2 = 12\%$ <u>accettabile</u>

L'esistenza di più radici è un elemento di disturbo in quanto non rende sempre applicabile il criterio del T.I.R. per la scelta tra operazioni finanziarie alternative. Difatti il T.I.R. può non esistere o non essere unico.

Esempi

$$C_A = \begin{bmatrix} -100 \\ 120 \\ -40 \end{bmatrix}, t_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il TIR non esiste

$$C_A = \begin{bmatrix} -48 \\ 140 \\ -100 \end{bmatrix}, t_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Il TIR non è unico

Condizioni per l'esistenza del T.I.R

Teorema di Levi

Dato un investimento che dia luogo ad uscite U_s alle scadenze t_s (s = 1, 2, ..., m), numerate in ordine crescente, e alle entrate E_k alle scadenze τ_k (k = 1, 2, ..., n), numerate in ordine crescente, e tale che la somma delle entrate superi quella delle uscite, cioè

$$\sum_{k=1}^{n} E_k > \sum_{s=1}^{m} U_s$$

condizione sufficiente di esistenza ed unicità del T.I.R. è che la scadenza media aritmetica delle uscite preceda la scadenza della prima entrata, ossia che l'investimento sia in senso lato

Analogo teorema vale per un finanziamento

Condizioni per l'esistenza del T.I.R

Teorema di Norstrom

Se $S(t)$, il saldo in t di un'operazione finanziaria, è tale che $S(0) < 0$ e se S cambia segno una sola volta, (ossia è un investimento puro) allora esiste un unico TIR positivo.

Analogo teorema vale per un finanziamento

Esempi

- L'investimento

–2000	2600	–1000	3000	600
0	1	2	3	4

soddisfa le ipotesi del Teorema di Levi quindi ha un unico TIR.

- L'investimento

$$C_A = \begin{bmatrix} -2.000 \\ 2.600 \\ 1.000 \\ 3.000 \\ -400 \\ 6.000 \end{bmatrix}, \; t_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di Norstrom (ma non di Levi) e quindi ha un unico TIR.