# Ingegneria Fluviale ed Impianti Idroelettrici

**Obiettivi formativi**

Il corso di Ingegneria Fluviale e Impianti Idroelettrici approfondisce le conoscenze di base incontrate nel corso di Idraulica, ampliandone la visione teorico-interpretativa per arrivare a considerazioni essenziali per la figura dell'ingegnere. I temi principali del corso sono le acque superficiali (Correnti a superficie libera) e il moto vario nelle correnti in pressione (Colpo d'ariete). Data l'importanza della sperimentazione di laboratorio nei problemi idraulici, un altro argomento centrale è la teoria della modellazione; sono previste delle lezioni ed esercitazioni relative alla modellazione fisica e numerica di fenomeni idraulici (Similitudine e Modelli). Nel corso si affronterà il dimensionamento idraulico delle briglie aperte o selettive e verranno descritti e analizzati gli impianti Idroelettrici ad alta caduta e piccola portata. Il corso prevede, oltre alle ore di lezione, alcune ore di esercitazione per l'applicazione delle nozioni teoriche a problemi reali che possono interessare l'ingegnere civile.
La modalità di verifica finale prevede il sostenimento di una prova orale finalizzato ad accertare il livello di conoscenza e di comprensione raggiunto dallo studente dopo aver studiato la disciplina nonché di applicare le conoscenze acquisite e di individuare autonomamente soluzioni a problemi idraulici.

L'esame si esplica mediante una discussione di circa trenta minuti incentrata su almeno tre domande relative a diversi argomenti indicati nel programma della disciplina ed illustrati nel corso delle lezioni. Più specificatamente le domande saranno differenziate per grandi argomenti: idrostatica, idrodinamica, il moto vario nelle correnti in pressione, correnti a superficie libera.

## Programma dettagliato

**Proprietà e statica dei fluidi (1 credito)**

Definizione di liquido. Grandezze dell'idraulica. Densità e peso specifico. Comprimibilità. Viscosità. Regimi di movimento. Sforzi interni nei liquidi in quiete. Equazione indefinita dell'idrostatica. Carico piezometrico. Strumenti di misura delle pressioni. Spinta su superfici piane. Equazione globale dell'equilibrio idrostatico. Spinta su superfici curve. Equilibrio dei corpi immersi. Stabilità dei corpi galleggianti.

**Liquidi perfetti (1 credito)**

Velocità e accelerazione. Elementi caratteristici del moto: traiettorie, linee di corrente. Tipi di movimento. Equazione di Eulero. Proiezione dell'equazione di Eulero lungo la tangente, la normale e la binormale di un punto di una traiettoria. Distribuzione della pressione nel piano normale. Correnti lineari. Il teorema di Bernoulli: interpretazione geometrica ed energetica del teorema di Bernoulli; applicazione del teorema di Bernoulli a processi di efflusso. Potenza di una corrente. Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente. Equazioni del moto vario per liquido perfetto: integrazione lungo una traiettoria e lungo una linea di corrente. Studio dell'avviamento del moto in una condotta. Studio delle oscillazioni di un pozzo piezometrico. Equazioni globali di equilibrio in condizioni dinamiche. Azioni dinamiche sulle turbine Pelton. Stramazzi: stramazzo Bazin; diga tracimante; stramazzo in parete grossa.

**Modelli idraulici (0.5 crediti)**

Analisi dimensionale: teorema Buckingham e sue applicazioni. Cenni sui modelli idraulici. Similitudine di Reynolds. Similitudine di Froude.

**Fluidi reali (1 credito)**

Equazione di Navier-Stokes. Equazione globale di equilibrio per un liquido reale. Applicazione dell'equazione di Navier al moto laminare: moto tra due piastre; moto in condotta circolare; moto in sezione rettangolare larga. Il moto turbolento: esperienza di Reynolds; equazione di equilibrio globale per il moto turbolento; genesi delle tensioni turbolente; distribuzione della velocità nella sezione circolare; indice di resistenza e sue espressioni per il tubo liscio e il tubo scabro; diagrammi di velocità in funzione dei parametri caratteristici del moto turbolento; formula di Colebrook; diagramma di Moody; problemi di progetto e di verifica risolti con il diagramma di Moody e con curve ausiliarie; dipendenza della perdita di carico per unità di lunghezza di tubazione dal diametro e dalla portata per i diversi tipi di moto; formule pratiche per il moto turbolento.

**Moto vario nelle correnti in pressione (1 credito)**

Impianti Idroelettrici. Il colpo d'ariete: descrizione del fenomeno; equazione del moto; equazione di continuità; integrali generali del colpo d'ariete; equazioni concatenate; determinazione del sovraccarico all'otturatore e in una generica sezione; formula di Allievi-Michaud.

**Correnti a pelo libero (1,5 crediti)**
Generalità. Il moto uniforme; caratteristiche energetiche della corrente in una sezione; alvei a debole e forte pendenza; carattere cinematico dei due tipi di movimento; correnti in moto permanente; profili del pelo libero; risalto idraulico. Esempi Applicativi

**Testi consigliati**

*D. Citrini e G. Noseda,* Idraulica, Casa Editrice Ambrosiana Milano.

*Marchi - Rubatta.* Meccanica dei Fluidi, Ed. UTET.

*FERRO V.*, La sistemazione dei bacini idrografici. McGraw-Hill..

LEZIONE N° 1



## UNITÀ di MISURA



| | SISTEMA INTERNAZIONALE SI | | | SISTEMA TECNICO ST | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GRANDEZZE | [M] | [L] | [T] | [F] | [L] | [T] | DIMENSIONE |
| FONDAMENTALI | Kg MASSA | m | s | Kg FORZA | m | s | UNITÀ di MISURA |

CINEMATICHE ← GRANDEZZE → GEOMETRICHE

GRANDEZZE → DINAMICHE

**CINEMATICHE**: SONO UGUALI SIA NEL SI CHE NEL ST XKÈ DIPENDONO SOLO DALLA LUNGHEZZA E DAL TEMPO

**DINAMICHE**: SONO DIVERSE NEL SI E IN QUELLO ST XKÈ DIPENDONO DALLA MASSA E DALLA FORZA

**GEOMETRICHE**: SONO UGUALI SIA NEL SI CHE NEL ST XKÈ DIPENDONO SOLO DA [L] E DA [T]

- TEMPO $t$ ; $[T]$ ; s
- VELOCITÀ $v, V$ ; $[L][T]^{-1}$ ; m/s
- ACCELERAZIONE $a, g, A$ ; $[L][T]^{-2}$ $m/s^2$
- PORTATA $Q$ ; $m^3/s$
- VISCOSITÀ CINEMATICA $\nu$ ; $m^2/s$

- LUNGHEZZA $L$ ; $[L]$ m
- AREA $A$ ; $[L]^2$ $m^2$
- VOLUME $W$ ; $[L^3]$ $m^3$

### GRANDEZZE DINAMICHE NEL SI

- MASSA $m$ ; $[M]$ ; Kg MASSA
- FORZA $F$ ; $[M][L][T^{-2}]$ ; $Kg\,m/s^2 = N$
- PESO SPECIFICO $\gamma$ ; $[ML^{-2}T^{-2}]$ ; $N/m^3$
- DENSITÀ $\rho$ ; $[ML^{-3}]$ ; $Kg/m^3$
- VISCOSITÀ DINAMICA $\mu$ ; $[ML^{-1}T^{-1}]$ $N\,s/m^2$
- PRESSIONE $P$ ; $[ML^{-1}T^{-2}]$ $N/m^2$
- MODULO DI ELASTICITÀ A COMPRESSIONE CUBICA $\varepsilon$ ; $[ML^{-1}T^{-2}]$ $N/m^2$
- TENSIONE SUPERFICIALE $S$ $[MT^{-2}]$ $N/m$

### GRANDEZZE DINAMICHE NEL ST

- FORZA $F$ ; $Kg_{FORZA}$
- MASSA $m$ ; $Kg \cdot s^2/m$
- PESO SPECIFICO $\gamma$ ; $Kg/m^3$
- DENSITÀ $\rho$ , $Kg \cdot s^2/m^4 \rightarrow \frac{MASSA}{VOLUME}$
- VISCOSITÀ DINAMICA $\mu$ ; $Kg\,s/m^2$ ; $\mu = \frac{M}{LT} = \frac{Kg\,s^2}{m\,m\,s}$
- PRESSIONE $P$ ; $Kg/m^2$ xchè

$$P = \frac{M}{LT^2} = \frac{Kg\,\cancel{s^2}}{m\,m\,\cancel{s^2}} = \frac{Kg}{m^2}$$

$$\begin{cases} Kg_F = Kg_{m} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \\ 1\,Kg_F = 9{,}81\,N \\ F = m \cdot a \\ P = m \cdot g \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = \rho \cdot g \Rightarrow \rho = \frac{\gamma}{g}}$$

**PESO SPECIFICO $\gamma$**: RAPPRESENTA IL PESO NELL'UNITÀ DI VOLUME

SI: $\gamma_{H_2O} = \frac{P}{W} = \frac{m\cdot\vec{g}}{W} = \rho\cdot g = 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 9806\ N/m^3$ → N

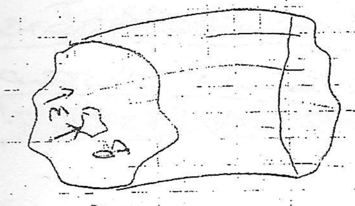
ST: $\gamma_{H_2O} = \frac{P}{W} = \frac{m\cdot\vec{g}}{W} = \rho\cdot g = \frac{1000}{9{,}81}\ kg\,s^2/m^4 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 1000\ kg/m^3$ → 102

$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1000}{9{,}81} = 102\ \frac{kg\,s^2}{m^4}$

$\gamma_{Hg}$ → SI = $133.300\ N/m^3$
→ ST = $133.300/9{,}81\ Kg/m^3$

**PORTATA Q**: CONSIDERANDO UNA CORRENTE E UNA GENERICA LINEA CHIUSA, DELLE LINEE DI CORRENTE (linee dove in ogni punto il vettore velocità è tangente a queste ultime) E individuando un elementino di superficie infinitesimo $dA$ e consideriamo il versore $\vec{n}$ con $\vec{n} \perp dA$

TUBO DI FLUSSO




$\vec{n} \perp dA$

$Q = V\cdot A$

$dQ = v\,dA$

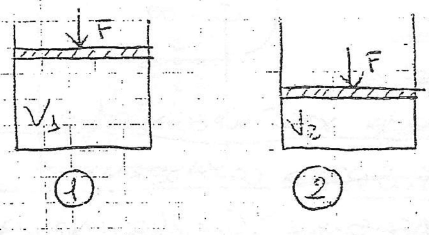
$Q = \int_A v\,dA$

$v$ = velocità singola particella

$V$ = velocità media

velocità media $V = \frac{Q}{A}$

**Modulo di elasticità a compressione cubica $\varepsilon$**: è un modulo che tiene conto della comprimibilità dei fluidi. Considerando un recipiente (1) con dell'$H_2O$ chiuso ed esercitiamo una forza F (x cui la pressione si incrementa). Si passerà quindi alla situazione (2) e il liquido avrà un volume $V_2 \neq V_1$.




$\Delta V = V_2 - V_1$ per cui $\Delta V = -\frac{V_1\,\Delta P}{\varepsilon}$

La variazione di volume è proporzionale alla variazione di pressione dovuta alla forza, al volume iniziale ed inversamente proporzionale a $\varepsilon$, il segno negativo x compensare xkè $V_2 < V_1$

$\varepsilon = -\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_1}}$ *

$\varepsilon_{H_2O} = 2\cdot 10^9\ N/m^2$ → SI

$\varepsilon_{H_2O} = 2\cdot 10^8\ Kg/m^2$ → ST

Da qui si vede che ha le dimensioni di una pressione.

La massa d'$H_2O$ dentro il recipiente è stata compressa e quindi il volume è variato ma la massa è sempre la stessa, ovvero la massa è un invariante:

$m = \rho V = cost$ quindi la sua variazione è $= 0$

$$dm = d\rho V + \rho dV = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$ sostituendo *

$$\varepsilon = +\rho \frac{dp}{d\rho}$$

Se vi ricordate, in idraulica I consideravate il fluido incomprimibile, x vedere se il fluido è incomprimibile bisogna introdurre una grandezza:

Celerità C: rappresenta la velocità con cui si propagano le onde sonore all'interno di una massa fluida.

$C = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} \cong 1400$ m/s → rappresenta quindi la velocità con cui si propagano le + piccole variazioni di pressione all'interno della massa fluida

$$\varepsilon = \rho \frac{dp}{d\rho} = C^2 \rho$$

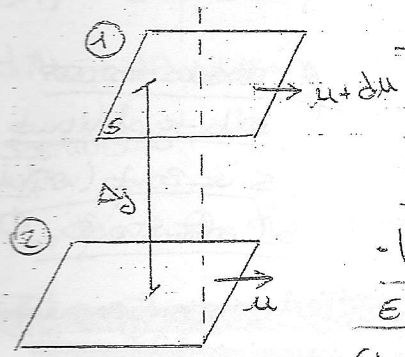
Dire che il fluido è incomprimibile vuol dire che la densità non varia ovvero la variazione di $\rho$ è $=0$ e quindi $\varepsilon = \infty$ e anche $C = \infty$; quindi dire che il fluido è incomprimibile significa che la variazione di pressione in un punto si risente istantaneamente in tutti i punti della massa fluida xké viaggia ad una velocità $C = \infty$. Se la massa è piccola ~~possiamo ancora considerare il~~ fluido incomprimibile perché la velocità di propagazione $C = 1400$ m/s, quindi rispetto alla massa è una velocità molto alta.

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = cost \\ d\rho = 0 \\ \varepsilon = \infty \\ C = \infty \end{cases} \rightarrow \text{fluido incomprimibile}$$

È possibile legare, inoltre, l'incomprimibilità alla causa perturbatrice ad esempio a come avviene la variazione di pressione: se la variazione è graduale si può considerare il fluido incomprimibile xké la variazione di pressione ha il tempo di propagarsi in tutta la massa fluida. (nelle lunghe condotte non si può considerare $\rho = cost$).

Fluido in quiete: sforzi normali
" in movimento: " " e tangenziali.

VISCOSITÀ DINAMICA $\mu$: nel caso di fluido in quiete ci saranno solo le componenti normali degli sforzi, se il fluido è in movimento ci saranno non solo sforzi normali ma anche tangenziali; consideriamo due lamine d'$H_2O$: la lamina d'$H_2O$ in movimento eserciterà un'azione sul tubo e il tubo una sulla lamina in movimento.




- La velocità di 1 > velocità di 2 quindi 1 trascina 2 e 2 frena 1 a causa della viscosità dinamica $\mu$.

(le velocità sono diverse xké i punti sono diversi; solo la velocità media è uguale).

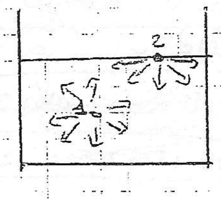
Nascerà una forza (o di trascinamento o resistente):

$$T = S\mu \frac{\Delta u}{\Delta y}$$ S = superficie lamine

Lo sforzo tangenziale $\tau = \frac{T}{A} = \mu \frac{du}{dy}$

- La viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 10^{-6}\ m^2/s$ x l'$H_2O$.

Tensione superficiale S: rappresenta le forze di coesione tra le molecole superficiali di una massa fluida. Consideriamo un recipiente contenente liquido:




La particella 1 è in equilibrio xké tutte le forze sono bilanciate ($=0$) dalla presenza di altre particelle che la circondano, la particella 2 invece ha una risultante verso il basso xké sopra c'è aria.

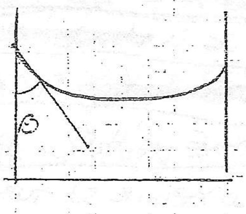
S ha le dimensioni N/m. Se prendiamo una bolla di sapone e vogliamo misurare S, iniziamo a gonfiarla, prima ha un'area $A_1$ e poi avrà $A_2$; x gonfiarla dobbiamo compiere un lavoro x cui:

$$S = \frac{L}{\Delta A} = \frac{N \cdot m}{m^2} = N/m$$ L = lavoro x portare da $A_1$ a $A_2$.

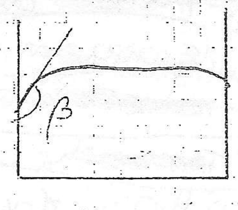
La forza di coesione nell'$H_2O$ è piccola; è grande la forza di adesione - viceversa nel mercurio.

- Forza di adesione = forza tra le particelle e ciò che le contiene.

**FORZE DI COESIONE** = forze tra le particelle di liquido



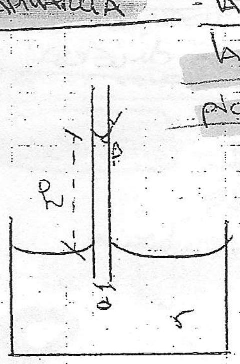

$H_2O$
$\beta < 90°$




$Hg$
$\beta > 90°$

β = angolo formato dalla tg al liquido e il bordo (verticale) del contenitore.

**CAPILLARITÀ** = la capillarità è legata alla tensione superficiale. Essa rappresenta la risalita dell'$H_2O$ attraverso un tubicino; tanto + il tubicino è piccolo + alta sarà l'altezza di risalita.




$$h = \frac{4 \cdot S \cos\beta}{\gamma\, d}$$

S = tensione superficiale.
d = diametro tubicino

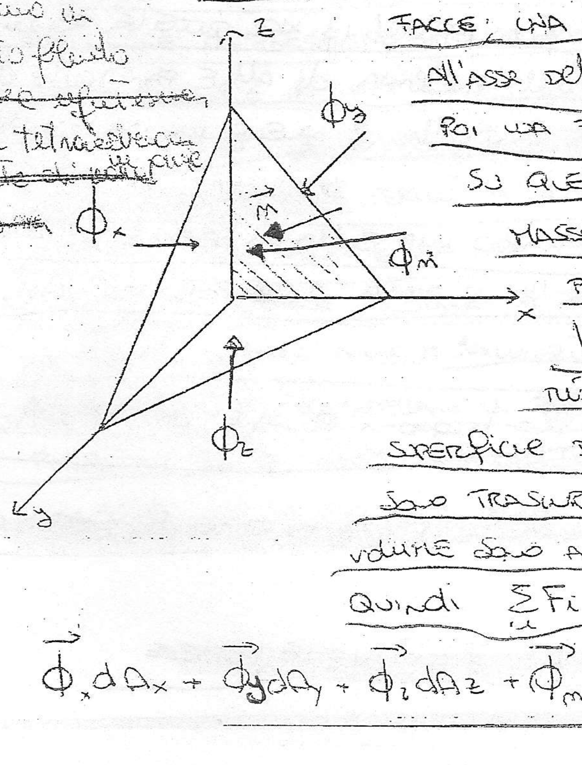
## TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY O TETRAEDRO DEGLI SFORZI

Consideriamo una massa fluida e un elementino di superficie, su questo elementino agiranno delle forze infinitesime che daranno origine ad uno sforzo di pressione:

$$\vec{\Phi} = \frac{d\vec{F}}{dA} \; *$$

← lo sforzo è un vettore; x definirlo consideriamo in una massa fluida un tetraedro (elementare) infinitesimo per cui avremo 4 facce: una faccia yz ⊥ all'asse delle x, una yx ⊥ all'asse delle z e una xz ⊥ all'asse delle y e poi una faccia di normale $\vec{m}$ che interseca i 3 assi.

Prendiamo un volumetto fluido di ~~massa infinitesima~~ avente tetraedrica ~~[illegible]~~ una forma ~~[illegible]~~




Su questo elementino agiranno delle forze di massa e forze di superficie e, valendo il 2° principio della dinamica F = m·a, ed essendo la massa fluida in quiete (a = 0), la risultante delle forze di massa e di quelle di superficie devono essere = 0; inoltre forze di massa sono trascurabili ($\rho g\, dw$) xké essendo infinitesimo il volume sono ancor + infinitesime del 3° ordine.

Quindi $\sum_i F_i = 0$ e da * si ha (per componenti):

$$\vec{\Phi}_x\, dA_x + \vec{\Phi}_y\, dA_y + \vec{\Phi}_z\, dA_z + \vec{\Phi}_m\, dA_m = 0$$

$dA_x = - dA_m \cos \hat{mx}$ il segno - xkè $\hat{mx}$ ottuso

$dA_y = - dA_m \cos \hat{my}$

$dA_z = - dA_m \cos \hat{mz}$ con $\hat{m} \perp dA$

SOSTITUISCO:

$$\vec{\Phi}_m \cancel{dA_m} = \vec{\Phi}_x \cancel{dA_m} \cos \hat{mx} + \vec{\Phi}_y \cancel{dA_m} \cos \hat{my} + \vec{\Phi}_z \cancel{dA_m} \cos \hat{mz}$$

$$\vec{\Phi}_m = \vec{\Phi}_x \cos \hat{mx} + \vec{\Phi}_y \cos \hat{my} + \vec{\Phi}_z \cos \hat{mz} \quad (1)$$

PROIETTO LA (1) LUNGO I 3 ASSI:

$\phi_{xx}$ = lo sforzo agisce sul piano $\perp$ all'asse delle x e viene proiettato sull'asse x.

???

$$\vec{\Phi}_{mx} = \phi_{xx} \cos \hat{mx} + \phi_{yx} \cos \hat{my} + \phi_{zx} \cos \hat{mz}$$

$$\vec{\Phi}_{my} = \phi_{xy} \cos \hat{mx} + \phi_{yy} \cos \hat{my} + \phi_{zy} \cos \hat{mz}$$

$$\vec{\Phi}_{mz} = \phi_{xz} \cos \hat{mx} + \phi_{yz} \cos \hat{my} + \phi_{zz} \cos \hat{mz}$$

ABBIAMO 9 COMPONENTI DEL VETTORE DEGLI SFORZI; TUTTAVIA LE COMPONENTI SI RIDUCONO A 6 XKÈ:

$$\left.\begin{aligned} \phi_{yx} &= \phi_{xy} \\ \phi_{zx} &= \phi_{xz} \\ \phi_{zy} &= \phi_{yz} \end{aligned}\right\} \text{COMPONENTI TANGENZIALI}$$

PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ DELLE AZIONI TANG

ESSENDO IL FLUIDO IN QUIETE AVREMO SOLO SFORZI NORMALI ($\phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}$) X
cioè non c'è componente tangenziale degli sforzi
CUI:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_{mx} = \phi_{xx} \cos \hat{mx} \\ \vec{\Phi}_{my} = \phi_{yy} \cos \hat{my} \\ \vec{\Phi}_{mz} = \phi_{zz} \cos \hat{mz} \end{cases} \quad \text{MA} \quad \begin{cases} \vec{\Phi}_{mx} = \phi_m \cos \hat{mx} \\ \vec{\Phi}_{my} = \phi_m \cos \hat{my} \\ \vec{\Phi}_{mz} = \phi_m \cos \hat{mz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{xx} \cancel{\cos \hat{mx}} = \phi_m \cancel{\cos \hat{mx}} \\ \phi_{yy} \cancel{\cos \hat{my}} = \phi_m \cancel{\cos \hat{my}} \\ \phi_{zz} \cancel{\cos \hat{mz}} = \phi_m \cancel{\cos \hat{mz}} \end{cases}$$

OVVERO

$$\phi_m = \phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = P$$

P = SFORZO DI PRESSIONE

RIASSUMENDO: ABBIAMO UNO SFORZO CHE AGISCE SU FACCE DIFFERENTI, DIVERSAMENTE INCLINATE; ESSENDO L'ELEMENTO CONSIDERATO INFINITESIMO È POSSIBILE ASSIMILARLO AD UN PUNTO E QUINDI

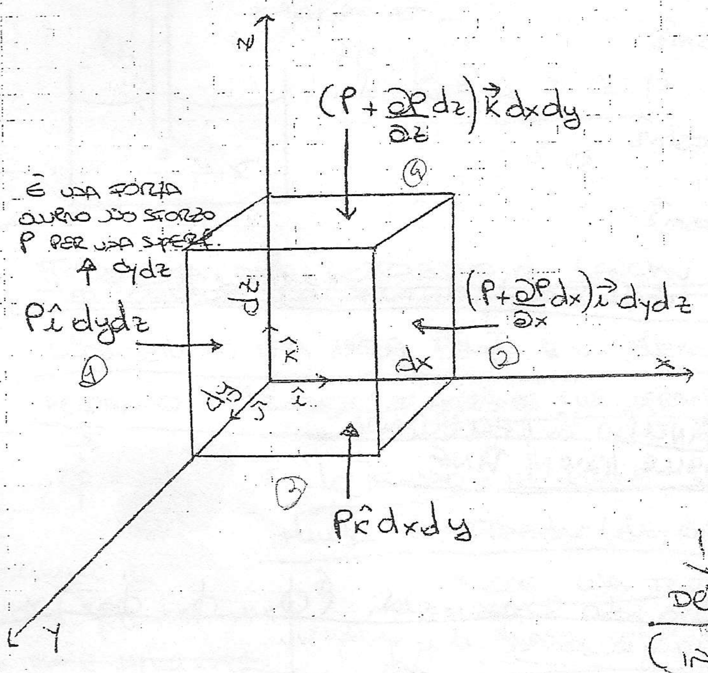
P rappresenta l'intensità dello sforzo (il modulo dello sforzo) $\vec{\Phi} = P \cdot \vec{n}$

nel caso di fluido in quiete (non esistono sforzi tangenziali ma solo normali) P avrà la stessa direzione di $\vec{n}$ ovvero sarà sempre ortogonale alla superficie.

NB: lo sforzo è solo funzione del punto considerato non dipende dalla giacitura del piano e P rappresenta il modulo dello sforzo, ovvero quanto quest'ultimo è grande.

## Lezione n° 2 — 08/03/2011

## Legge di Stevino




Per determinare il valore della pressione all'interno della massa fluida considero un volumetto elementare in quiete! Su questo corpo agiscono forze di massa e forze di superficie, e la cui somma (x il 2° princ. della dinamica) è uguale a zero:

$F = m \cdot a = 0$ x ké $a = 0$

Indicando con $\vec{R}$ = la risultante delle forze di massa x unità di massa (in pratica avrà le dimensioni di una accelerazione) le cui componenti rispetto agli assi sono:

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

la massa risultante è pari alla densità per il volume e quindi:

$$\boxed{M = \rho \vec{R}\, \underbrace{dxdydz}_{W}}$$

al volumetto agiscono anche forze di superficie ovvero tutte le forze che l'ambiente esterno esercita sul volumetto (quelle in nero nel disegno). Essendo in quiete la somma di forze di massa e di superficie devono essere uguali a zero:

$$\sum_i F_i = 0$$

PROIETTO LUNGO x E PONGO = 0

$$\underbrace{\rho X\,dx\cancel{dy}\cancel{dz}}_{M} + \overbrace{P\,\cancel{dy}\cancel{dz}}^{①} - \overbrace{P\,\cancel{dy}\cancel{dz} - \frac{\partial P}{\partial x}dx\cancel{dy}\cancel{dz}}^{②} = 0$$

PROIETTANDO LUNGO GLI ALTRI ASSI HO:

$$\begin{cases} \rho X = \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \rho Y = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \rho Z = \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \text{moltiplico} \times dx \rightarrow \\ \rightarrow \text{moltiplico} \times dy \rightarrow \\ \rightarrow \text{moltiplico} \times dz \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \rho X dx = \dfrac{\partial P}{\partial x}dx \\ \rho Y dy = \dfrac{\partial P}{\partial y}dy \\ \rho Z dz = \dfrac{\partial P}{\partial z}dz \end{cases}$$

SOMMIAMO MEMBRO A MEMBRO

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz^{*}$$

* $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy + \dfrac{\partial P}{\partial z}dz}$ È UN DIFFERENZIALE ESATTO DELLA PRESSIONE P, OVVERO È PARI A dP. MA SE IL SECONDO MEMBRO DELL'EQUAZIONE È UN DIFFERENZIALE ESATTO, LO DEVE ESSERE ANCHE IL PRIMO MEMBRO E ~~QUINDI DEVE ESISTERE LA PRIMITIVA PER CUI~~ $\boxed{Xdx + Ydy + Zdz} = du$

E QUINDI POSSO SCRIVERE

$$\rho\,du = dP \quad ① \qquad \text{con} \quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ Y = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ Z = \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

$\downarrow$

EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DEI FLUIDI

LA ① LA POSSO SCRIVERE ANCHE:

$$du = \frac{dP}{\rho}$$

PORTO TUTTO AL I MEMBRO E PORTO $\rho$ ALL'INTERNO DELLA DERIVATA XKÈ $\rho = \text{cost}$ OVVERO CONSIDERO IL FLUIDO INCOMPRIMIBILE

$$d\left(u - \frac{P}{\rho}\right) = 0$$

NEL CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE il potenziale $u = -gz$

$$d\left(-gz - \frac{P}{\rho}\right) = 0$$

divido $\times g$ con $\rho g = \gamma$

$d\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) = 0$ SE LA DERIVATA DELLA QUANTITÀ TRA PARENTESI È NULLA ALLORA LA QUANTITÀ TRA PARENTESI È COSTANTE!

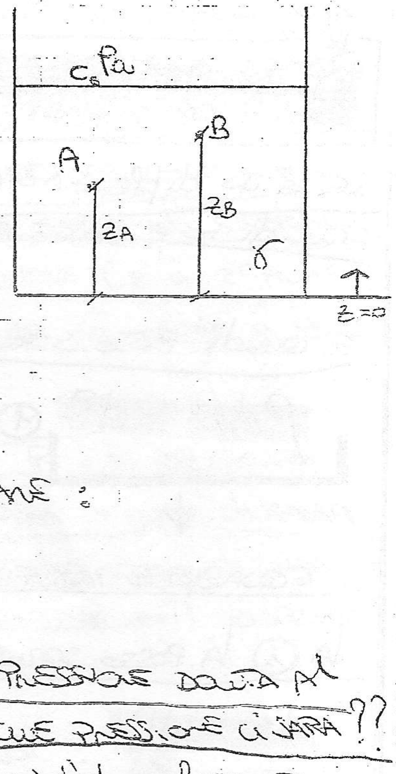
$$\boxed{z + \frac{P}{\gamma} = cost} \rightarrow \text{LEGGE DI STEVINO}$$

$z$ = QUOTA GEODETICA

$\frac{P}{\gamma}$ = ALTEZZA PIEZOMETRICA

$z + \frac{P}{\gamma} = h$ = CARICO PIEZOMETRICO

LA LEGGE DI STEVINO CI DICE CHE IL CARICO PIEZOMETRICO ALL'INTERNO DI UNA MASSA FLUIDA OMOGENEA SI MANTIENE COSTANTE IN TUTTI I PUNTI DELLA MASSA STESSA.




CONSIDERIAMO UN RECIPIENTE APERTO E CONSIDERIAMO 2 PUNTI A E B E FISSIAMO $z=0$ SUL FONDO (IL SISTEMA DI RIFERIMENTO LO POSSO SCEGLIERE DOVE VOGLIO).
ANCHE SE I PUNTI A E B HANNO QUOTE DIVERSE ($z_A$ e $z_B$) E PRESSIONI DIVERSE ($P_A$ e $P_B$) SI VERIFICA CHE:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

QUINDI SE AD ESEMPIO CONOSCO LA $P_B$ POSSO RICAVARE:

$$P_A = (z_B - z_A)\gamma + P_B$$

LA PARTICELLA A SARÀ SOGGETTA AD UNA DETERMINATA PRESSIONE DOVUTA AL PESO DEL LIQUIDO CHE SI TROVA AL DI SOPRA; IN C CHE PRESSIONE CI SARÀ??
ANCHE C AVRÀ UNA PRESSIONE XKÈ È A CONTATTO CON L'ATMOSFERA E $1\ m^3$ DI ARIA PESA ALL'INCIRCA 1 kg E L'ARIA C'È FINO A 10.000 METRI DI ALTEZZA x CUI ~~SE FACCIAMO 10000 x 1~~ m ABBIAMO ALL'INCIRCA $10.000\ kg/m^2$ CHE È PARI ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA CHE SI PUÒ ESPRIMERE:

$$P_a = 101.250\ N/m^2$$

$1\ bar = 10^5\ Pa = 10^5\ N/m^2$

$1\ atm = 1\ kg/cm^2 \cong 1\ bar$

PER ESPRIMERLA IN m COLONNA d'$H_2O$ O IN COLONNA di Hg BASTA dividere 101.250 RISPETTIVAMENTE PER 9806 O 133300.

SE divido la $\frac{P_a}{\gamma}$ HO 10,33 m di COLONNA d'$H_2O$ OVVERO $\forall$ 10,33 m di colonna d'$H_2O$ LA PRESSIONE AUMENTA di 1 atm OVVERO 1 kg/cm$^2$

SUL PUNTO A QUINDI AGIREBBE LA PRESSIONE DELL'$H_2O$ CHE STA SOPRA PIÙ LA PRESSIONE ATMOSFERICA, DOVREMO PARLARE QUINDI DI PRESSIONE ASSOLUTA E PRESSIONE RELATIVA

$$P^* = P_a + P$$

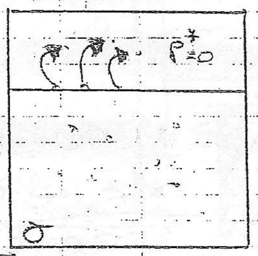
$$P = P^* - P_a$$

$P^*$ = PRESSIONE ASSOLUTA

$P_a$ = PRESSIONE ATMOSFERICA

$P$ = PRESSIONE RELATIVA (DELL'$H_2O$)

DOMANDA: QUAL È IL MINIMO VALORE CHE P PUÒ RAGGIUNGERE?




CONSIDERIAMO UN RECIPIENTE CHIUSO CONTENENTE $H_2O$. AL MOMENTO IN CUI CHIUDO IL RECIPIENTE, NELLA PARTE DOVE C'È L'ARIA HO LA PRESSIONE ATMOSFERICA; SUPPONIAMO DI CREARE IL VUOTO, OVVERO ASPIRIAMO TUTTA L'ARIA: LA PRESSIONE ASSOLUTA È NULLA! OGNI PARTICELLA CHE SI TROVA ALL'INTERNO DELLA MASSA d'$H_2O$ POSSIEDE ENERGIA CINETICA CHE dipende dalla TEMPERATURA, IN PARTICOLARE AUMENTANDO LA TEMPERATURA AUMENTA L'ENERGIA CINETICA E QUINDI ALCUNE PARTICELLE RIESCONO A STACCARSI DALLE ALTRE E SI PORTANO ALLO STATO di VAPORE. (OVVIAMENTE DOPO CHE LA PARTICELLA SI È STACCATA HA SOTTRATTO ALLA MASSA FLUIDA $E_{cin}$ E QUINDI SI SARÀ ABBASSATA LA TEMPERATURA)

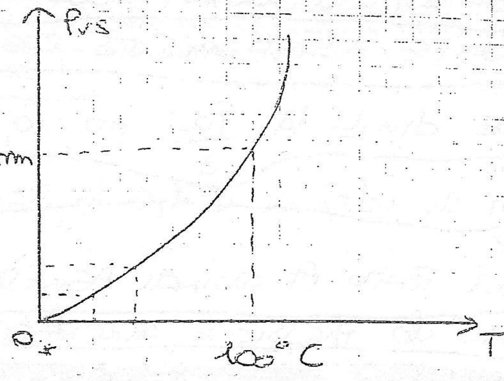
AL MOMENTO IN CUI LE PARTICELLE d'$H_2O$ SARANNO DIVENTATE VAPORE NON AVREMO PIÙ $P^*=0$ MA UNA PRESSIONE DIVERSA $P_V$ CHE È LA PRESSIONE di VAPORE; AD UN CERTO PUNTO DOPO UN TEMPO MOLTO GRANDE SI RAGGIUNGERÀ UN EQUILIBRIO (DINAMICO) TRA LE PARTICELLE CHE PASSANO DALLO STATO liquido allo STATO di VAPORE E quelle CHE PASSANO DALLO STATO di VAPORE allo STATO liquido: IL VAPORE SI È SATURATO!

AVREMO QUINDI UNA

$P_{VS}(T)$ = PRESSIONE di VAPORE SATURO (è funzione $f(x)$ della TEMP dell'$H_2O$)

C'È UNA LEGGE CHE CI DICE CHE

$$P_{VS}(T_{H_2O}) = 611 \exp\left(\frac{17,27\ T}{237,3+T}\right)$$




SE SOSTITUIAMO 100°C HO

$P_{VS} = 101\,250\ N/m^2$ OVVERO ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA

DAL GRAFICO NOTIAMO CHE + LA TEMPERATURA CRESCE E + LA PRESSIONE AUMENTA VICEVERSA SE LA PRESSIONE È + BASSA LA TEMPERATURA di EBOLLIZIONE È + BASSA (IN MONTAGNA l'$H_2O$ BOLLE PRIMA)

TUTTA QUESTA SPIEGAZIONE X DIRE CHE LA PRESSIONE ASSOLUTA NON PUÒ SCENDERE AL di SOTTO DELLO ZERO; ~~ADDIRITTURA È GIÀ MOLTO difficile FARLA AVVICINARE ALLO ZERO~~ INFATTI:

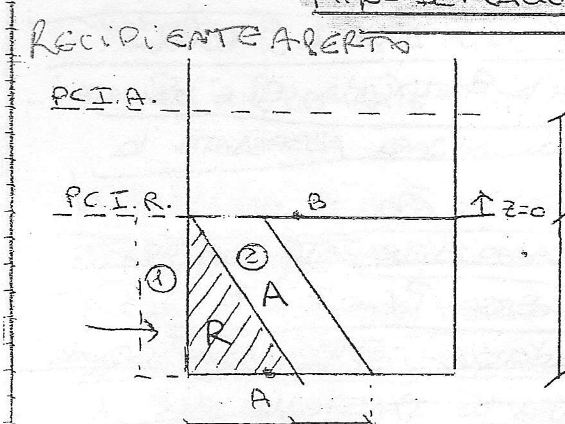
$$\boxed{p^* \in \,]0, +\infty[}$$

PER $p^* \cong 0 \Rightarrow P = P_{VS}$ → x $p^*=0$ l'$H_2O$ E LA PRESSIONE SUBITO SALE * Subito sale

RISPOSTA: LA PRESSIONE RELATIVA È AL MINIMO PARI ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA! XKÈ NON POSSIAMO AVERE $P^* < 0$ XKÈ X $P^* = 0$ l'$H_2O$ INIZIA AD EVAPORARE. SI POSSONO AVERE PRESSIONI RELATIVE NEGATIVE IL CUI MINIMO È PARI A $-P_a$.

## PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO E RELATIVO

RECIPIENTE APERTO




$$p_A = \gamma(z_B - z_A) + p_B$$

PRESSIONE RELATIVA A CONTATTO CON L'ATMOSF. $p_B = 0$

ESSENDO B SULLA SUPERFICIE HO:

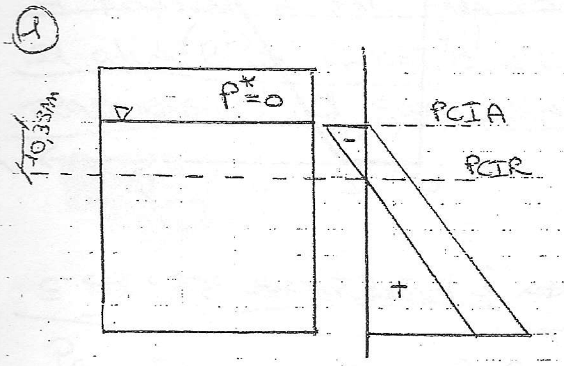
$$\frac{p_A}{\gamma} + \underset{-h}{z_A} = \cancel{\frac{p_B}{\gamma}}^{\,0} + \cancel{z_B}^{\,0}$$

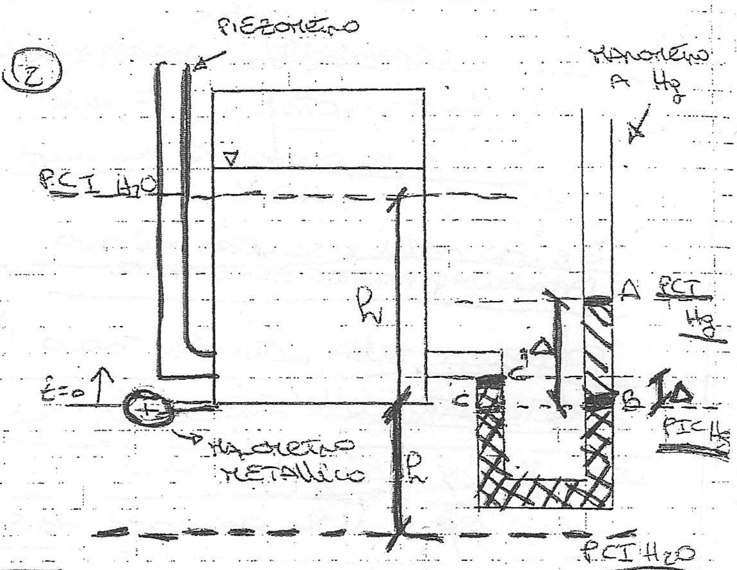
$p_A = h \cdot \gamma$ DOVE CON h SI INDICA l'AFFONDAMENTO DEL PUNTO DAL PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI RELATIVO; IL PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO È + ALTO di quello relativo di 10,33 m xkè $\frac{p^*}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{p}{\gamma}$ (se il liquido è $H_2O$, se è Hg di 76 cm)

Notiamo quindi che le pressioni variano linearmente con l'affondamento e quindi il diagramma delle pressioni (relativo) è di forma triangolare, essendo nullo sul P.C.I. e pari a $\gamma h$ sul fondo. x ottenere il diagramma delle pressioni assolute basta riportare sulla superficie e sul fondo un segmento pari alla pressione atmosferica.

A noi comunque ci interessa quello relativo xké a sx del recipiente (ad esempio) c'è aria quindi il diagramma ① è rettangolo di base Pa che quindi si semplifica con ② a dx di base Pa.

SE IL RECIPIENTE È CHIUSO:




Consideriamo la figura ② in cui il livello del mercurio è indicato con la penna blu: sappiamo che le pressioni sono positive xké l'$H_2O$ spinge + dell'aria. Applicando Stevino:

$P_B = \gamma_m \cdot \Delta$ $\qquad$ $\Delta$ = affond. di B dal PCI Hg

$\cancel{z_B} + \frac{P_B}{\gamma_m} = \cancel{z_C} + \frac{P_C}{\gamma_m}$ $\qquad$ Siccome $z_C = z_B \Rightarrow P_C = P_B$ xké $z_C = 0$

ma $P_C = \gamma \cdot h$ $\qquad$ con $h$ = affondamento dal PCI $H_2O$;

uguagliando si ha:

$$\gamma_m \Delta = \gamma h \Rightarrow \boxed{h = \frac{\gamma_m \Delta}{\gamma}}$$

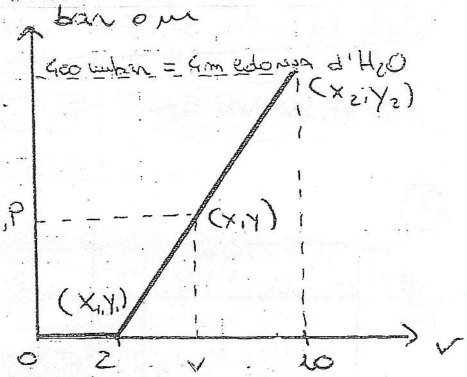
Consideriamo sempre la stessa figura in cui il livello del Hg è indicato con la penna rossa: avrò delle pressioni negative xké l'aria spinge di più dell'$H_2O$ nel serbatoio. Applichiamo Stevino:

$P_B = 0$

$P_C = -\gamma_m \Delta$ MA $P_C = \gamma h$ QUINDI TROVO:

$$\boxed{h = -\frac{\gamma_m \Delta}{\gamma}}$$

[ PARENTESI SUI TRASDUTTORI DI PRESSIONE: STRUMENTI CHE MISURANO LA PRESSIONE E CI INDICANO ATTRAVERSO $\frac{P}{\gamma} = h$ LA QUOTA DEL LIQUIDO NEL SERBATOIO. VENGONO ALIMENTATI AD UNA CERTA TENSIONE E RESTITUISCONO A SECONDA DELLA PRESSIONE UN DETERMINATO VOLTAGGIO SECONDO UNA LEGGE LINEARE =>




mbar

0 - 400 millibar (0,4 bar)

↓ ↓

2V 10V

2 e non 0 Volt x sicurezza xké 0 volt l'apparecchio potrebbe essere spento.

EQUAZIONE DELLA RETTA E TROVO L'ALTEZZA O LA PRESSIONE DATO UN DETERMINATO VOLTAGGIO.

$$\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x}$$

$$\frac{4 - 0}{4 - y} = \frac{10 - 2}{10 - x} \Rightarrow \frac{4}{4 - y} = \frac{8}{10 - x} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{4 - y}{10 - x}$$

$0{,}5(10 - x) = (4 - y)$

$5 - 0{,}5x = 4 - y$

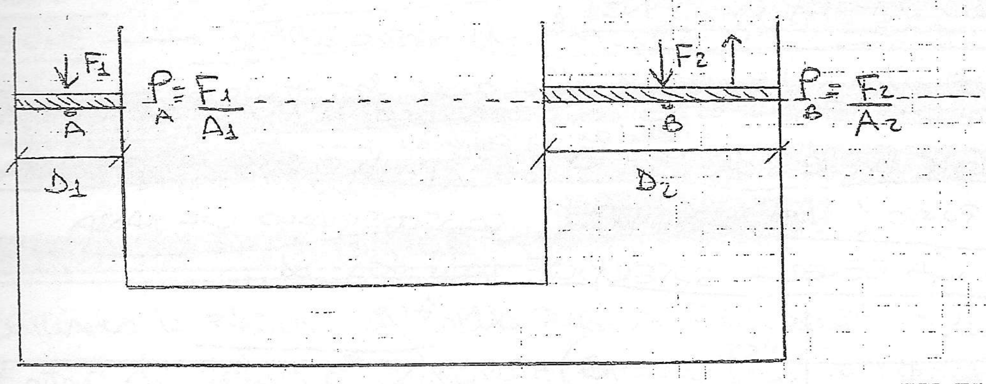
$1 - 0{,}5x = -y \Rightarrow$ con $x = h$ e $y = V$ HO:

$$\boxed{h = 0{,}5\,V - 1}$$

SE SI SOSTITUISCE NELLA LEGGE SOPRA $V = 2$ HO $h = 0$ E CON $V = 10$ $h = 4$.

FINE PARENTESI TRASDUTTORI ]

## Applicazione torchio idraulico




La pressione è pari alla forza sulla superficie, immaginiamo di applicare sul cilindro di diametro $D_1$ una forza $F_1$. I pistoni hanno peso trascurabile. Nel primo cilindro avrò una pressione in A:

$$P_A = \frac{F_1}{A_1}$$

e nel secondo cilindro?

$$P_B = \frac{F_2}{A_2}$$

Ma A e B sono alla stessa quota perché prima di chiudere con i pistoni il liquido si è disposto alla stessa altezza segnando il piano dei carichi idrostatici, quindi:

$$P_A = P_B$$ ovvero:

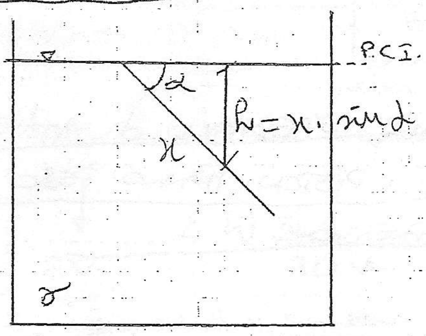
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \boxed{F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}}$$

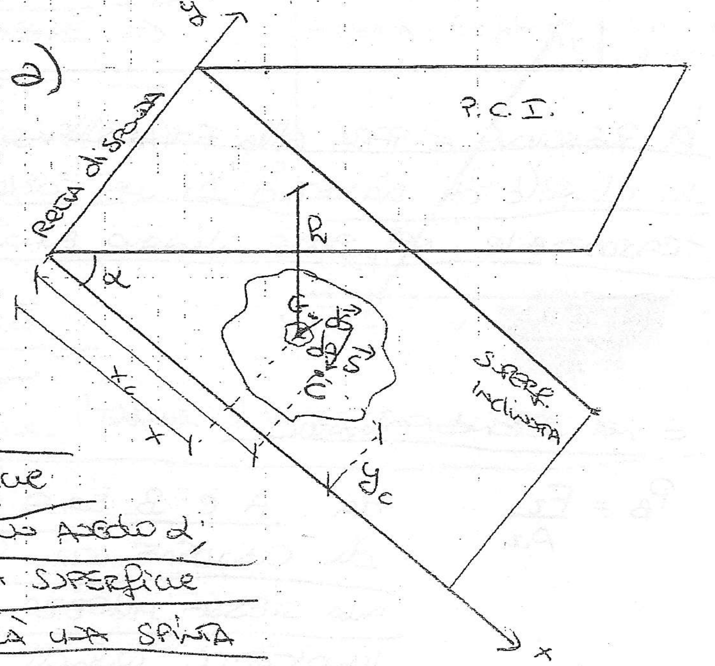
La forza che bisogna esercitare sul pistone di diametro $D_2$ o anche quella che il liquido esercita sul pistone (dal basso verso l'alto) è molto maggiore di quella che ho esercitato nel pistone di diametro $d_1$. Questo è il principio di funzionamento del torchio idraulico e dei freni delle automobili.
Esso funziona o come moltiplicatore di forze se ragioniamo da sx verso dx, o come riduttore da dx verso sx.

LEZIONE N° 3 10/03/2011

## SPINTE SU SUPERFICI PIANE

SPINTA — La spinta è una forza e se noi conosciamo la pressione, la possiamo calcolare come la pressione per un'area; ma la pressione calcolata in quale punto? nel baricentro! Consideriamo una massa d'acqua e una generica superficie inclinata $\alpha$.




Vogliamo calcolare la spinta che il liquido esercita sulla superficie contenuta nel piano inclinato di un angolo $\alpha$; x fare questo consideriamo una superficie infinitesima dA sulla quale agirà una spinta infinitesima dS pari a:

$$d\vec{S} = p \cdot \vec{n}\, dA$$

La somma di tutte le spinte infinitesime darà la spinta risultante:

$$\vec{S} = \int_A p \cdot \vec{n}\, dA = \int_A \gamma h \vec{n}\, dA = \int_A \gamma x \sin\alpha\, dA = \gamma \sin\alpha \int_A x\, dA$$

$\int_A x\, dA$ → momento statico della sezione

ma $\boxed{\int_A x\, dA = X_G \cdot A}$ dove con $X_G$ = distanza del baricentro dalla retta di sponda

quindi: $\vec{S} = \gamma \sin\alpha\, X_G\, A$ ma $\sin\alpha\, X_G = h_G$ = distanza del punto G dal P.C.I.

$$\boxed{\vec{S} = \gamma h_G \cdot A \vec{n} = p_G A \vec{n}}$$

*

LA SPINTA È UN VETTORE CARATTERIZZATO DA 4 FATTORI:

SPINTA

- MODULO ⟶ $P_G \cdot A$ (INTENSITÀ)
- DIREZIONE ⟶ SEMPRE ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE (DIREZIONE DI $\vec{m}$)
- VERSO ⟶ DIPENDE DAL SEGNO DELLA PRESSIONE (O DALLA POSIZIONE DEL P.C.I.)
- PUNTO DI APPLICAZIONE ⟶ CENTRO DI SPINTA!

## CENTRO DI SPINTA SUPERFICIE PIANA (C)

CONSIDERIAMO LA FIGURA 2) DELLA PAGINA PRECEDENTE. X IL CALCOLO DEL CENTRO DI SPINTA È SUFFICIENTE IMPORRE CHE IL MOMENTO DELLA SPINTA RISULTANTE È PARI ALLA SOMMA DEI MOMENTI INFINITESIMI:

MOMENTO DI S X IL BRACCIO $X_C$

$$\widetilde{S X_C} = \underbrace{\int_A dS \cdot x}_{\text{MOMENTI INFINITESIMI DI BRACCIO GENERICO } x} = \int_A P \cdot x \, dA = \int_A \gamma h \, x \cdot dA = \int_A \gamma x \cdot x \operatorname{sen}\alpha \, dA$$

con $h = x \operatorname{sen}\alpha$

$$S x_C = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int_A x^2 dA \rightarrow \text{MOMENTO D'INERZIA } I_x \text{ RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA}$$

$$S x_C = \gamma \operatorname{sen}\alpha \, I_x \qquad \text{MA} \quad S x_C = \overbrace{\gamma h_G A}^{S} \cdot x_C$$

*

UGUAGLIANDO HO:

$$\cancel{\gamma} \operatorname{sen}\alpha \, I_x = \cancel{\gamma} h_G A \cdot x_C \qquad \text{MA } h_G = x_G \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cancel{\operatorname{sen}\alpha} \, I_x = x_G \cancel{\operatorname{sen}\alpha} \, A \, x_C$$

QUINDI:

$$\boxed{x_C = \xi = \frac{I_x}{x_G \cdot A} = \frac{I}{M}} \Longrightarrow \text{Centro di spinta } (x_0, y_0)$$

→ M = MOMENTO STATICO RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA

ANALOGO DISCORSO X LA $y_C$:

$$S y_C = \int_A P \cdot y \, dA = \int_A \gamma h y \, dA = \int_A \gamma x y \operatorname{sen}\alpha \, dA = \gamma \operatorname{sen}\alpha \int_A x y \, dA$$

→ MOMENTO CENTRIFUGO $I_{xy}$

$$\boxed{y_C = \frac{I_{xy}}{M} = \eta}$$

$$\begin{cases} S = \gamma \cdot h_G \cdot A \\ x_C = \dfrac{I_0}{M} + x_G \end{cases} \qquad y_C = \frac{I_{xy}}{M}$$

nel caso di superfici simmetriche (quadrato, rettangolo, triangolo isoscele) a $y_C = 0$, xkè l'asse delle x passerà per il baricentro della sezione

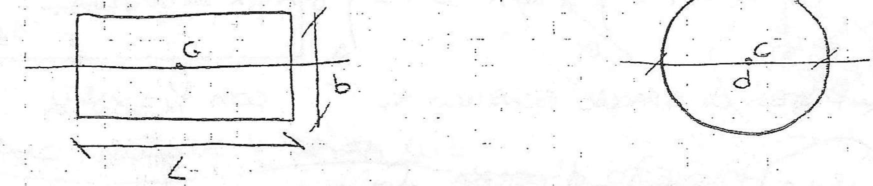
IMP

il centro di spinta è più lontano dalla retta di sponda rispetto a G e può essere in basso rispetto a G se il fluido è in pressione + alto se il fluido è in depressione. (nella figura a) il fluido è in pressione xkè il punto considerato si trova sotto il p.c.I.).

CENTRO DI SPINTA ⇒ Per figure semplici ⟶ $x_C = \dfrac{I}{M} = \dfrac{I_0}{M} + \dfrac{A x_G^2}{M} = \dfrac{I_0}{A x_G} + x_G$

MOMENTO DI INERZIA ($I_0$)

$I_0$ = momento d'inerzia della sezione calcolato x un asse che passa x il suo baricentro

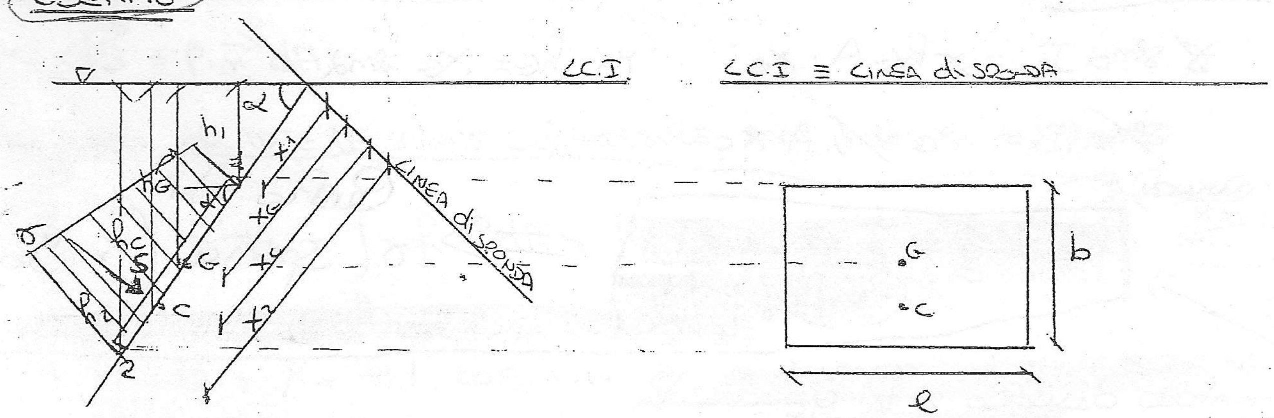


$I_0 = \dfrac{1}{12} b^3 \cdot L$

IN UN QUADRATO $b \equiv L$

$I_0 = \dfrac{1}{64} \pi d^4$

ESEMPIO




Consideriamo una parete inclinata (1-2) di un angolo $\alpha$; la spinta che il fluido di peso specifico $\gamma$ esercita sulla lastra è:

IMP

$S = \gamma h_G \cdot A = \gamma h_G \cdot b \cdot l = \gamma x_G \sin\alpha \cdot A$ $\quad$ $x_G \equiv h_G$ se la parete è verticale!

$h_G = h_1 + \left(\dfrac{b}{2} \sin\alpha\right)$ con $b = \dfrac{h_2 - h_1}{\sin\alpha}$

C è più basso di G se il fluido è in pressione.
C è più alto di G " " " " " depressione.



$$S = \gamma\left(h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{2\,\cancel{\sin\alpha}} \cdot \cancel{\sin\alpha}\right) \cdot A$$

$$S = \gamma \frac{(h_1 + h_2)}{2} A \ * \quad \text{xchè } h_1 - \frac{h_1}{2} = \frac{h_1}{2}$$

NB: LA SPINTA NON SI CALCOLA COME L'AREA DEL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONE, MA DAL VOLUME DEL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONE, XKÈ SE CONSIDERO L'AREA DEL TRAPEZIO DIFFERISCE DALLA * X UNA LUNGHEZZA.

SE VOGLIO CALCOLARE IL CENTRO DI SPINTA:

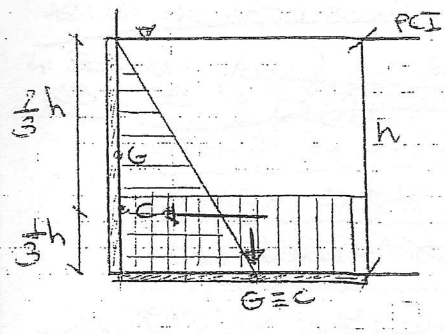
$$x_C = \frac{I_o}{M} + x_G \qquad x_C = \overline{CG} + x_G$$

$$x_C = \frac{\frac{1}{12} b^3 l}{x_G \cdot A} + x_G$$

Diagramme pressioni triangolare: $C \Rightarrow \frac{1}{3}$ base
" " rettangolare: $C = G$

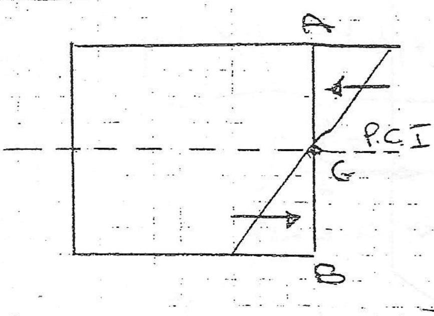
SE LA PARETE È VERTICALE E IL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONE È TRIANGOLARE IL CENTRO DI SPINTA SI TROVA O A $\frac{2}{3}$ DAL VERTICE DEL TRIANGOLO O A $\frac{1}{3}$ DALLA BASE.

Dove si trova C con diagr. pressioni




SE CONSIDERO LA SPINTA SUL FONDO DEL RECIPIENTE C e G COINCIDONO, IN CUI IL DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI È 1 RETTANGOLO (È COST) (ROSSO)

SE CONSIDERO UN SERBATOIO CHIUSO IN CUI IL PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI PASSA PER IL BARICENTRO LA SPINTA SULLA PARETE AB È NULLA XKÈ:




$$S = \gamma h_G \cdot A = 0$$ xkè $h_G$ = AFFONDAMENTO DI G DAL P.C.I. È = 0.

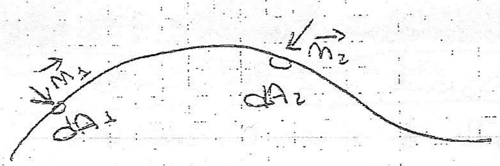
IN QUESTO CASO LA PARETE AB VA DIMENSIONATA CON LA FMAX CHE AGISCE SULLA PARETE, ANCHE SE LA SPINTA (LA RISULTANTE) È NULLA!

## SPINTA SU SUPERFICI CURVE

Consideriamo una superficie curva a contatto con del liquido; vogliamo calcolare la risultante delle spinte che il fluido esercita sulla superficie curva: metodo delle componenti

$$dS_1 = P_1 \cdot dA_1 \cdot \vec{m}_1$$

$$dS_2 = P_2 \cdot dA_2 \cdot \vec{m}_2$$



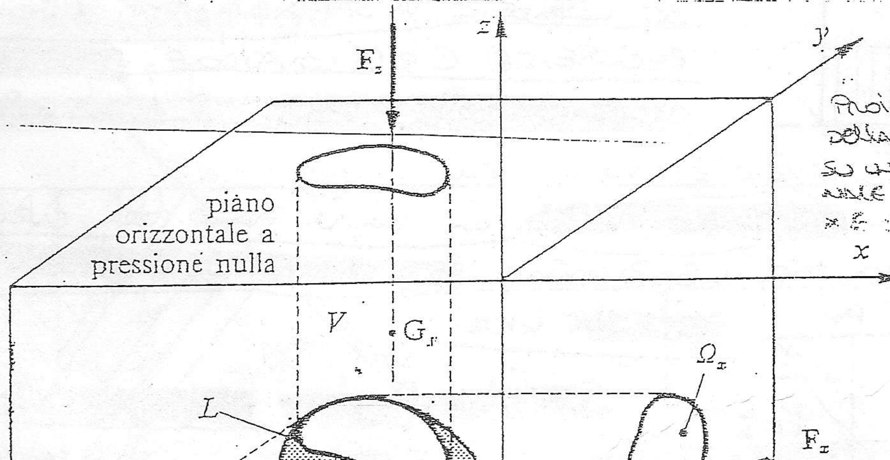

Sulla superficie generica $dA_1$ agirà una spinta $dS_1$ con una normale $\vec{m}_1$ così come sulla superficie infinitesima $dA_2$ agirà una spinta $dS_2$ con una normale $\vec{m}_2$. Queste spinte infinitesime non possono essere sommate (x calcolare la spinta risultante) perché la direzione delle normali è differente e vettorialmente non si possono sommare, risulta necessario quindi scomporre il vettore $dS$ lungo le 3 direzioni:

$$dS_x = P \cos\widehat{mx}\, dA = P\, dA_x$$

$$dS_y = P \cos\widehat{my}\, dA = P\, dA_y$$

$$dS_z = P \cos\widehat{mz}\, dA = P\, dA_z$$

Poiché $dA \cdot \cos\widehat{mx}$ è la proiezione di $dA$ sull'asse ortogonale all'asse delle x. (vedi immagine in basso ↓)




Proiezione della superficie su un asse ortogonale all'asse delle x è su un asse ⊥ x un asse delle y

Decomposizione e calcolo delle spinte idrostatiche contro una superficie gobba

A QUESTO PUNTO LE POSSO SOMMARE XKE' POI ESSENDO LUNGO LA SUPERFICIE $dA_x$ HO TUTTI VETTORI CHE HANNO LA STESSA DIREZIONE, INTEGRANDO OTTENIAMO:

$$S_x = \int_{A_x} p\, dA_x = \gamma h_x \cdot A_x$$

con $h_x$ = AFFONDAMENTO DEL BARICENTRO DELLA SUPERFICIE $A_x$ RISPETTO AL P.C.I.

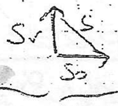
$$S_y = \int_{A_y} p\, dA_y = \gamma h_y A_y$$

$$S_z = \int_{A_z} p\, dA_z = \gamma h_z \cdot A_z = \gamma W$$

$h_z \cdot A_z$ = LA PROIEZIONE DELLA SUPERFICIE RISPETTO AD UN PIANO $\perp$ A $z$ MOLTIPLICATO PER $h_z$ DA' UN VOLUME!

$S_o = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ ← FORZE ORIZZONTALI ($S_x$ e $S_y$ sono $\perp$)

$S_v = S_z$ ← FORZE VERTICALI



X LA S RISULTANTE APPLICHIAMO IL TEOREMA DI PITAGORA → $S = \sqrt{S_v^2 + S_o^2}$

CALCOLO DELLA SPINTA SULLA SUPERFICIE CURVA: METODO EQ. GLOBALE delle STATICA DEI FLUIDI

NB: SE LA SUPERFICIE CURVA È SEMPLICE E LA LINEA DI CONTORNO È CONTENUTA IN UN PIANO PER IL CALCOLO DELLA SPINTA CHE IL FLUIDO ESERCITA SU TALE SUPERFICIE SI PUÒ RICORRERE AL METODO DELL'EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO GLOBALE DELLA STATICA DEI FLUIDI.

NELLA LEZIONE PRECEDENTE, NELLA LEGGE DI STEVINO, AVEVAMO FATTO L'EQUILIBRIO DELLE FORZE DI MASSA E FORZE DI SUPERFICIE OTTENENDO:

$$\underbrace{\rho (X dx + Y dy + Z dz)}_{\rho \vec{R}} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz}_{\text{grad } p}$$

FORZE DI MASSA X UNITÀ DI MASSA

$$\boxed{\rho \vec{R} = \text{grad } p} \longrightarrow \text{EQUAZIONE INDEFINITA STATICA DEI FLUIDI.}$$

PER OTTENERE L'EQUAZIONE GLOBALE È NECESSARIO INTEGRARE IN TUTTO IL VOLUME W:

$\int_W \rho R\, dW = \int_W \text{grad}\, P\, dW$ È un teorema (il nome è ignoto :))

che mi permette di passare dall'integrale esteso al volume a uno esteso alla superficie.

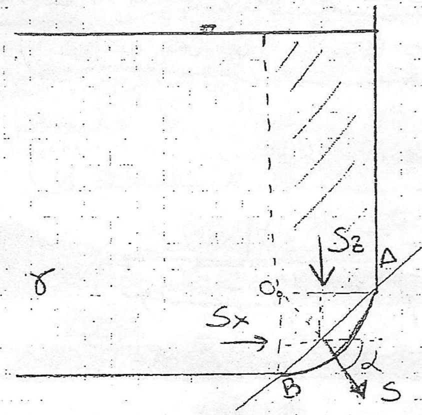
$\vec{G} = -\int_A P\vec{n}\, dA = -\vec{\Pi}$

$\boxed{\vec{G} + \sum_i \vec{\Pi}_i = 0}$ → EQ.uazione globale dell'equilib. statico dei fluidi

(risultante di spinte)

con $\vec{\Pi}$ = forza che tutto l'ambiente esterno esercita sul ~~fluido~~ volume attraverso la sup. di contorno

Esempio n°1




## Metodo delle componenti

Bisogna considerare la proiezione di questa superficie AB su una superficie ortogonale all'asse delle x $S_y = 0$ (è la linea); (ortog. al foglio)

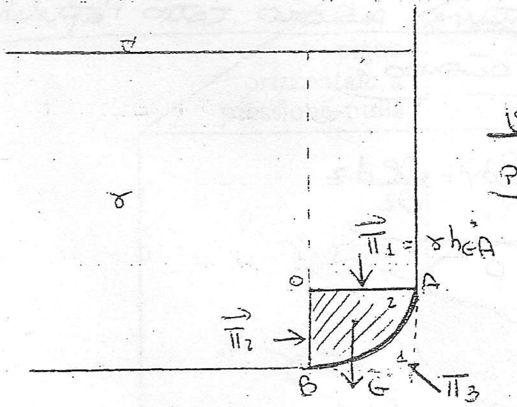
$S_x$ = proiezione di AB su z ovvero OB di area $A_x$ (spinta su sup. piana)

$S_z = \gamma W$ (∄ $A_y$ xké ∄ la proiez. sul foglio, è una linea AB)

??!

$S = \sqrt{S_x^2 + S_z^2}$

x trovare l'inclinazione $tg\alpha = \frac{S_z}{S_x}$




## Metodo dell'equilibrio globale

Isoliamo un volume di controllo che può essere ① o ②; prendiamo ②, ovvero $\frac{1}{4}$ di circonferenza:

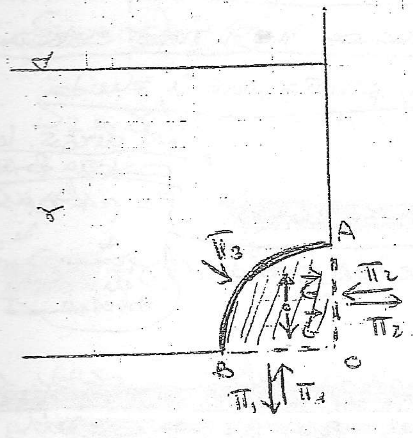
$\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_3 = 0$

$\vec{S} = -\vec{\Pi}_3 = \vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2$

con $\vec{\Pi}_3$ = spinta che la superficie AB esercita sul volume di liquido di controllo

$\vec{S}$ = spinta che il liquido esercita sulla superficie curva AB.

ESEMPIO N°2




EQ. EQUILIBRIO GLOBALE DELLA STATICA

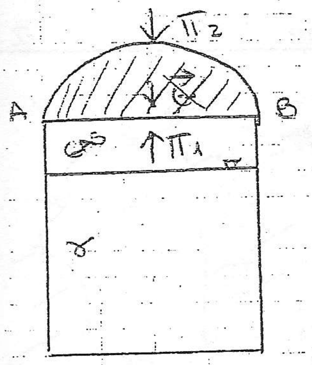
$$\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_3 = 0$$

$\Pi_3$ = SPINTA CHE L'AMBIENTE ESTERNO (IN QUESTO CASO IL LIQUIDO DENTRO IL RECIPIENTE) ESERCITA SULLA SUP. AB OVVERO SUL NOSTRO VOLUME DI CONTROLLO FITTIZIO = $\vec{S}$

COME SE CI FOSSE $H_2O$

$$\vec{S} = \vec{\Pi}_3 = -\vec{G} - \vec{\Pi}_1 - \vec{\Pi}_2 \quad \text{(VETTORI IN ROSSO)}$$

ESEMPIO N°3




CONSIDERIAMO UN AMBIENTE IN PRESSIONE, VOGLIAMO CALCOLARE LA SPINTA SULLA SUPERFICIE CURVA AB

$$\vec{G} + \sum_i \vec{\Pi}_i = 0$$

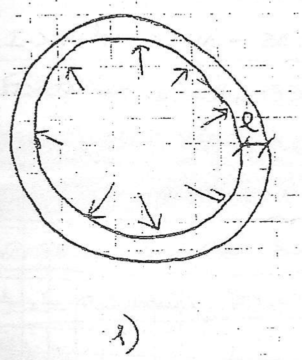
ISOLIAMO IL VOLUME DI CONTROLLO ($\frac{1}{2}$ SFERA)

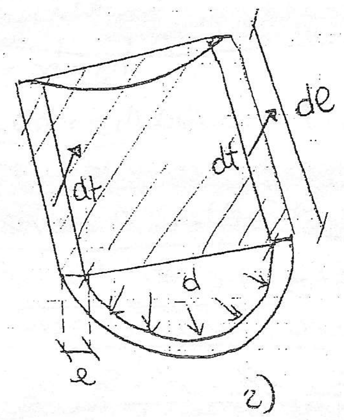
$$\cancel{\vec{G}} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 = 0$$

0 XKÉ I GAS HANNO UN PESO SPECIFICO MOLTO BASSO

$$\vec{S} = -\vec{\Pi}_2 = \vec{\Pi}_1 = P \cdot A_{AB}$$

FORMULA DI MARIOTTE × IL CALCOLO DELLO SPESSORE DEI TUBI IN FUNZIONE DELLA TENSIONE DI ESERCIZIO




e = SPESSORE TUBO

dt = FORZE CHE LA 2ª METÀ TUBO ESERCITAVA SULLA 1ª

d = DIAMETRO

All'interno di una condotta abbiamo un liquido che esercita una pressione sul tubo (fig. 1). Immaginiamo di sezionarlo e di considerarne una metà (fig. 2); nel momento in cui lo tagliamo, poiché il tubo deve essere in equilibrio nasceranno delle forze, che la seconda metà tubo esercitava sulla superficie di taglio, che devono bilanciare la spinta che il fluido esercita sulla metà tubo considerata:

$S = P \cdot d \cdot dl$ con $P$ = pressione di esercizio

nel dimens. la condotta [illegible]: $P = p + \Delta p$ (pressione di esercizio; [illegible])

$P \cdot d \cdot dl = 2\, dt$ ma $dt = \sigma \cdot \underbrace{l\, dl}_{\text{superficie di taglio}}$

con $\sigma$ = carico di sicurezza a trazione che dipende dalla natura del tubo. (è una cost)

Quindi il massimo sforzo $dt$ che il tubo può sopportare è funzione di $\sigma$.

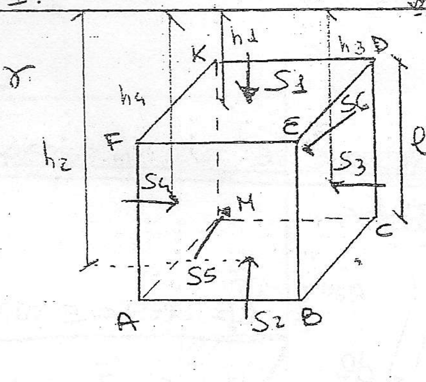
Otteniamo:

$P \cdot d \cdot \cancel{dl} = 2 \sigma l\, \cancel{dl}$ lo spessore $l$ sarà:

$$\boxed{l = \frac{P \cdot d}{2\sigma}} \rightarrow \text{formula di Mariotte}$$

## Principio di Archimede

P.C.I.




Consideriamo un cubo di lato $l$ immerso in un fluido di peso specifico $\gamma$.

$h_1$ = affondamento del baricentro della sup. FKDE rispetto al P.C.I.

$h_2$ = aff. di ABCM dal P.C.I.

$h_3 = h_4$ = aff di BCDE - AMFK dal P.C.I.

$h_5 = h_6$ = aff di ABEF - KDMC dal P.C.I.

essendo $h_3 = h_4 \Rightarrow S_4 = S_3$

$h_5 = h_6 \Rightarrow S_5 = S_6$

Quindi $S = S_2 - S_1 \cancel{+ S_4} \cancel{- S_3} \cancel{+ S_5} \cancel{- S_6}$

$S = S_2 - S_1$

** { I sommergibili (a titolo informativo) non vengono dimensionati x la spinta di Archimede ma x la profondità, la pressione massima raggiungibile. }

$S_1 = \gamma h_1 \, l^2$

$S_2 = \gamma h_2 \, l^2 = \gamma (h_1 + l) l^2$

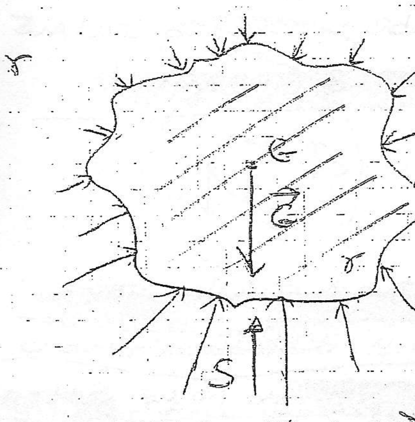
Quindi

$$S = -\cancel{\gamma h_1 l^2} + \cancel{\gamma h_1 l^2} + \gamma l^3 = \gamma l^3 \quad \text{modulo di } S$$

il verso è quello della forza maggiore $S_2$, x cui è diretta verso l'alto.

Consideriamo questo risultato e consideriamo non più un cubo, ma un corpo complesso (non semplice) immerso in un liquido e vogliamo calcolare la spinta che il liquido esercita su questo corpo:

P.C.I.:




Consideriamo il corpo come se fosse pieno di liquido e applichiamo l'equazione globale della statica:

$$\vec{G} + \sum_i \vec{\Pi}_i = 0$$

$\sum \vec{\Pi}_i$ = risultante che l'ambiente esterno esercita sul corpo = $\vec{S}$

$$S = \sum_i \vec{\Pi}_i = -\vec{G}$$

ma $\vec{G} = \gamma W$ ovvero il risultato ottenuto sopra *

Principio di Archimede = la spinta che il fluido esercita su un corpo immerso è pari al peso del volume di liquido spostato

[l'esempio del cubo serve x capire meglio il principio di Archimede: nel cubo non abbiamo applicato l'equazione globale della statica ma abbiamo semplicemente calcolato la spinta risultante come somma delle spinte che agiscono su ogni singola faccia del cubo, trovando una risultante verso l'alto; i due risultati sono identici xké $\vec{G}$ in un cubo è $= \gamma l^3$ ]

NB: la spinta che il corpo riceve non dipende dall'affondamento ma soltanto dal peso del volume di liquido spostato **

LEZIONE N° 4 14/03/2011

## STABILITÀ DI UN CORPO IMMERSO

LA SPINTA CHE IL FLUIDO ESERCITA SU UN CORPO IMMERSO È PARI AL PESO DEL VOLUME DI LIQUIDO SPOSTATO

SE:

- $P > S$ → IL CORPO AFFONDA
- $P = S$ → IL CORPO È IN EQUILIBRIO
- $P < S$ → IL CORPO GALLEGGIA

P = PESO DEL CORPO

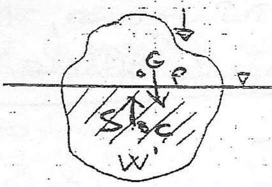
S = SPINTA DI ARCHIMEDE

G = BARICENTRO DEL CORPO

C = CENTRO DI CARENA (BARICENTRO DI W': VOLUME DI LIQUIDO SPOSTATO)

C è il baricentro del volume di liquido spostato

$G \equiv C$ SE IL CORPO È OMOGENEO.

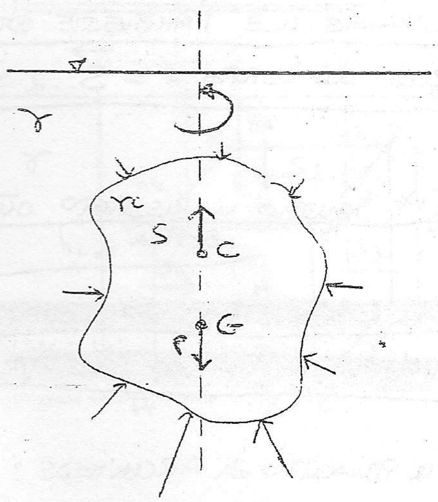



W' = VOLUME DI CARENA → CARENA

$$S = \gamma W' = \overbrace{\underset{\text{corpo}}{\gamma_c} W}^{P}$$

PER ESSERE IN EQUILIBRIO → $P = S$, OLTRE ALL'EQUILIBRIO DOBBIAMO STUDIARE LA STABILITÀ DEI CORPI IMMERSI. SI POSSONO VERIFICARE 3 SITUAZIONI DI EQUILIBRIO:

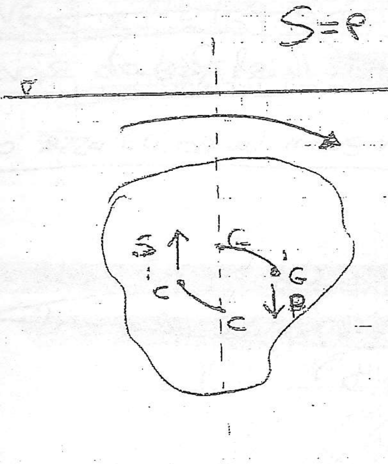
- EQUILIBRIO INDIFFERENTE




SE C E G SI TROVANO SULLA STESSA VERTICALE SI HA UN PERFETTO EQUILIBRIO PERCHÉ OLTRE $\Sigma F = 0$ HO ANCHE $\Sigma M = 0$

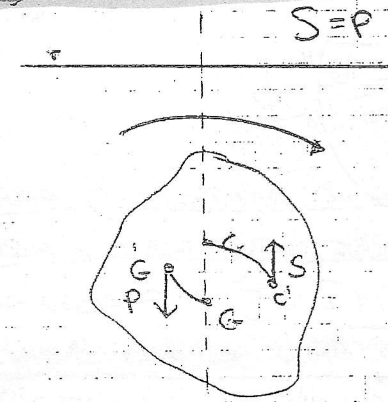
- IL CORPO SI TROVA QUINDI NELLA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO INDIFFERENTE PER QUALSIASI ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE VERTICALE E PER QUALSIASI TRASLAZIONE VERTICALE E ORIZZONTALE; CIOÈ SE IO LO RUOTO INTORNO AD UN ASSE VERTICALE O SE LO TRASLO ORIZZONTALMENTE O VERTICALMENTE NON SUCCEDE ASSOLUTAMENTE NIENTE E IL CORPO RIMANE NELLA NUOVA CONFIGURAZIONE (DOVE LO METTO STA!)

- Equilibrio instabile




Il corpo è in equilibrio x ché S=P; consideriamo il caso in cui C si trova + in basso di G e imponiamo una rotazione attorno ad un asse orizzontale. Dopo la rotazione G si porterà in G' e C in C'. In G' è applicata $\vec{P}$ diretta verso il basso; in C' è applicata $\vec{S}$ diretta verso l'alto. Nascerà una coppia instabilizzante il cui momento (rotazione) è in senso orario e concorde alla rotazione imposta, x cui il corpo ruoterà ulteriormente.

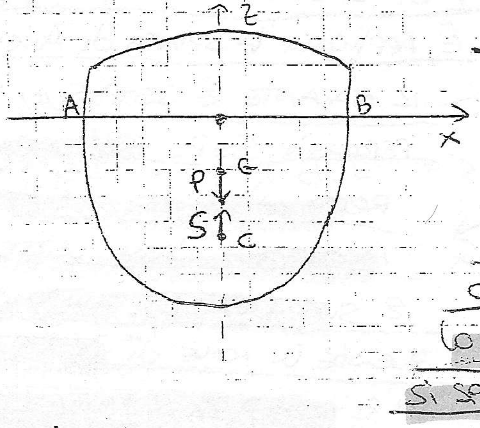
- Equilibrio stabile




Il corpo è ancora in equilibrio S=P; consideriamo adesso il caso in cui C si trova + in alto rispetto a G e imponiamo ancora una rotazione attorno ad un asse orizzontale. In C' è applicata $\vec{S}$ diretta verso l'alto e in G' è applicata $\vec{P}$ diretta verso il basso. Nascerà una coppia stabilizzante che tenderà a riportare il corpo immerso nella vecchia posizione di equilibrio. (il momento che si crea è in senso antiorario)

## Stabilità ed equilibrio dei galleggianti

Consideriamo un galleggiante (fig. C):




CARENA

P=S siamo in equilibrio; dobbiamo studiare la stabilità. Nel centro di carena è applicata la spinta di Archimede mentre nel baricentro G è applicata la forza peso.
Se diamo una rotazione attorno ad un asse orizzontale, ad esempio, il volume rimane sempre lo stesso, cambia la forma del volume immerso, quindi si sposterà il centro di carena (il volume non cambia x ché il corpo resta comunque in una condizione di equilibrio, cambia solo

la forza di questo volume e conseguentemente il baricentro di tale volume (volume immerso). Effettuando delle rotazioni si avranno 2 tipi di moto:

- moto di rollio = ruotando attorno all'asse y (⊥ al foglio)
- moto di beccheggio = ruotando attorno all'asse x (// al foglio).

(2)

Per rotazioni attorno ad asse verticale e x traslazioni lungo un asse orizzontale l'equilibrio è indifferente

Per quanto riguarda la stabilità dei natanti, quello che dà più problemi è il moto di rollio. Andiamo quindi a studiare la stabilità nel caso di piccole rotazioni attorno all'asse delle y. (FIG. D)

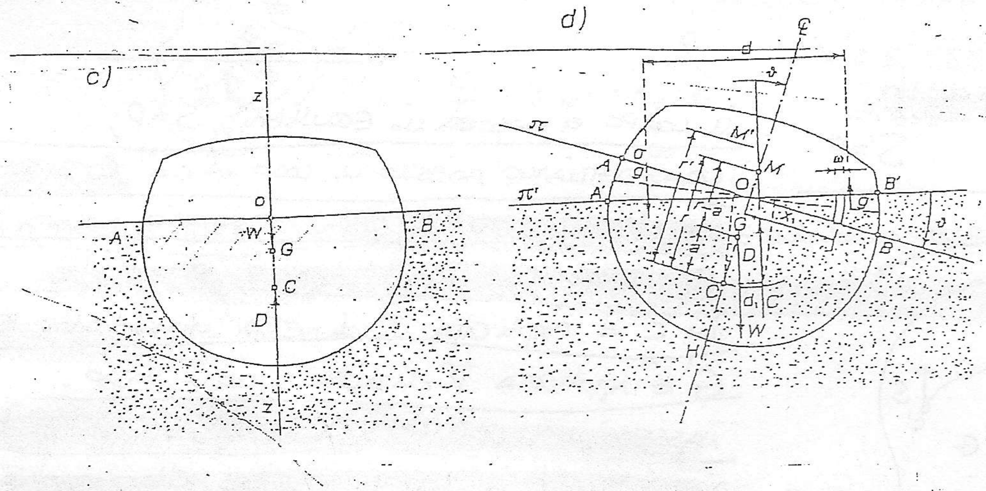
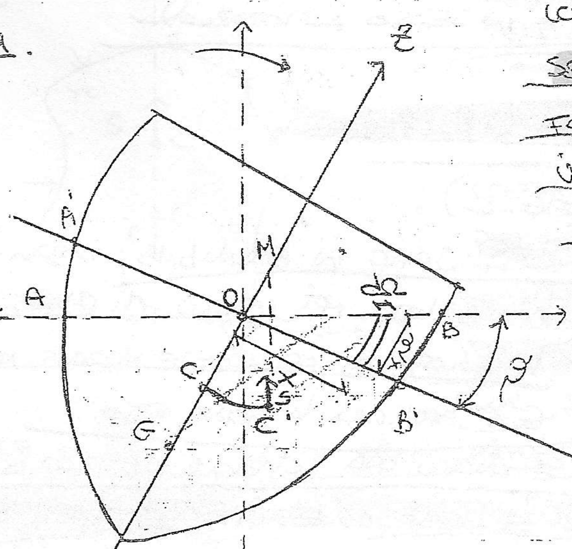



FIG 1.

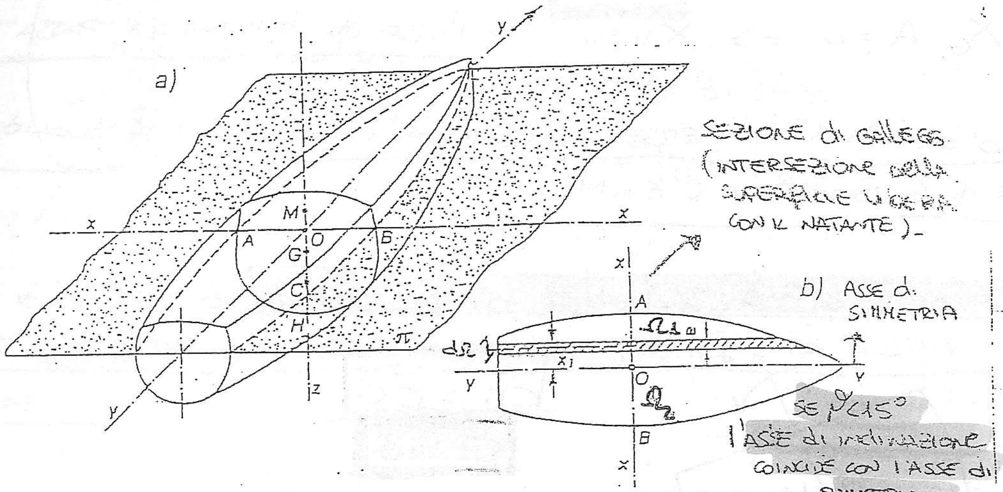



con $\vartheta$ piccolo.

Se il natante ruota di angolo $\vartheta$ la forma del volume di carena cambia, ma il volume è sempre lo stesso; il C si sposterà nella posizione C', dove è applicata la spinta di Archimede.

Il natante è sempre in equilibrio perché S=P. Prolungando la retta d'azione di S fino ad incontrare l'asse verticale delle z si ottiene un punto M che prende il nome di metacentro, ed è considerato il centro di curvatura della curva CC'

SE $\rho$ VARIA IL PUNTO M SI SPOSTA LUNGO L'ASSE DELLE Z; SE $\rho$ = MOLTO PICCOLO IL METACENTRO ASSUME UNA POSIZIONE LIMITE (NON VARIA). QUESTO È VERO x $\rho \leq 15°$ E INOLTRE L'ASSE DI SIMMETRIA PASSA PER IL BARICENTRO DELLA SEZIONE DI GALLEGGIAMENTO (FIG. b).




BASTA DIMOSTRARE QUINDI CHE x PICCOLE ROTAZIONI L'ASSE DI INCLINAZIONE PASSA x IL BARICENTRO DELLA SEZIONE DI GALLEG.

ANALIZZIAMO LA FIG 1. IL VOLUME EMERSO DELIMITATO DA O B B' È UGUALE AL VOLUME EMERSO O A A' QUINDI $\Omega_1 = \Omega_2$. CONSIDERIAMO UNA STRISCIOLINA DI AMPIEZZA $d\Omega$ E CALCOLIAMO IL VOLUME:

$$V_1 = \int_{\Omega_1} \underbrace{x \, tg\rho}_{\text{ALTEZZA}} \cdot \underset{\text{AREA}}{d\Omega} =$$

SE $\rho$ MOLTO PICCOLO $\rightarrow \rho \cong tg\rho$

$$= \int_{\Omega_1} x \rho \, d\Omega$$

MA $V_1 = -V_2$ IL SEGNO - È XKÈ SI TROVA DALL'ALTRA PARTE

$$\int_{\Omega_1} x \rho \, d\Omega = -\int_{\Omega_2} x \rho \, d\Omega \Rightarrow \int_{\Omega_1} x \rho \, d\Omega + \int_{\Omega_2} x \rho \, d\Omega = 0$$

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$$

$$\int_{\Omega} x \rho \, d\Omega = 0 \Rightarrow \rho \int_{\Omega} x \, d\Omega$$

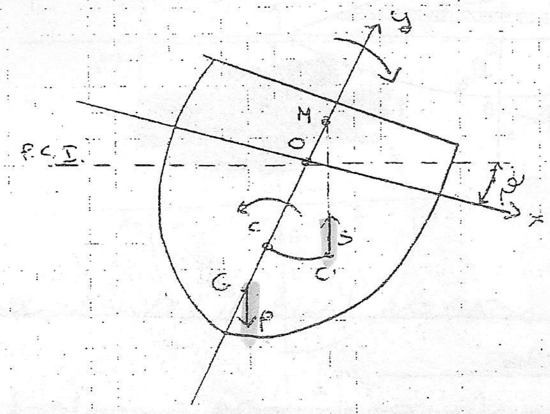
Per un moto piccolo o meglio x $\theta \to 0$ posso scrivere solo:

$$\int_\Omega x \, d\Omega = 0$$ ma questo integrale rappresenta il momento statico M della sezione di galleggiamento fatto rispetto all'asse di inclinazione, quindi se $M = 0$

$$M = X_G \cdot A = 0 \Rightarrow X_G = 0$$ → l'asse di inclinazione passa per G.

Studiamo quindi le diverse configurazioni di equilibrio a seconda della posizione di G rispetto a C e a M.

## 1) G più in basso di C e di M




$\boxed{\overline{CM} > \overline{CG}}$

$\boxed{\overline{GM} > 0}$

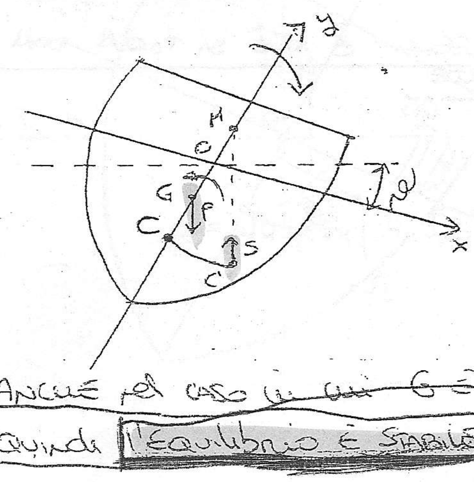
$\overline{CM} = (y_M - y_C) > 0$

$\overline{CG} = (y_G - y_C) < 0$

$\overline{GM} = (y_M - y_G) > 0$

Quindi nel caso in cui G sotto di C e sotto di M il $\overline{GM} > 0$ (è una quantità positiva). Siamo nel caso di equilibrio stabile xké nascerà una coppia che tenderà a riportare l'imbarcazione nella posizione di equilibrio con l'asse delle y verticale.

## 2) G più in alto di C e più in basso di M




$\boxed{\overline{CM} > \overline{CG}}$

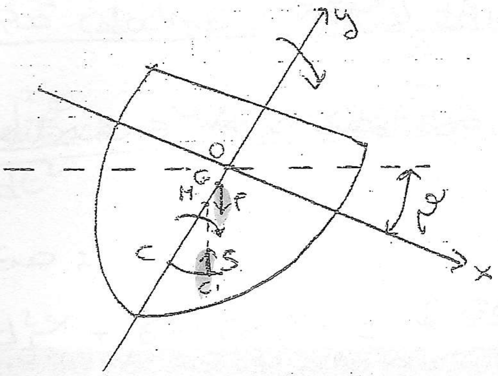
$\boxed{\overline{GM} > 0}$

$\overline{CM} = (y_M - y_C) > 0$

$\overline{CG} = (y_G - y_C) > 0$ xke $y_C > y_G$

Anche nel caso in cui G è + in alto di C e più in basso di M il $\overline{GM} > 0$ quindi $\boxed{\text{l'equilibrio è stabile}}$ xké la coppia in rosso è stabilizzante.

## 3) G più in alto di C e più in alto di M




$\boxed{\overline{CM} < \overline{CG}}$

$\boxed{\overline{GM} < 0}$

$\overline{GM} = (y_M - y_G) < 0$

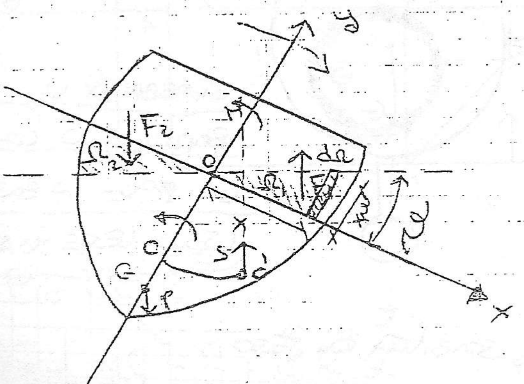
xké $|y_M| > |y_G|$

Questo è il caso di equilibrio instabile, al momento in cui do la rotazione nascerà una coppia (in rosso) instabilizzante che farà ruotare ulteriormente il natante.

## Posizione del Metacentro

Per vedere se il natante è stabile o meno è necessario calcolare la posizione del metacentro. La prima situazione (dove $y_G < y_C < y_M$) è la situazione di equilibrio migliore! Nel progetto di una imbarcazione la quantità $\overline{GM}$ deve essere positiva (ovviamente a seconda della funzione che l'imbarcazione deve avere la posizione di M, e quindi la distanza $\overline{GM}$, è diversa), se l'imbarcazione deve navigare in mari molto mossi questa quantità sarà maggiore, nelle navi passeggeri questa quantità non è molto grande, intorno a 0,45-0,60 m, nelle navi pescherecci è 0,90-1,50 m e scopriremo + avanti perché!).

Abbiamo bisogno di una equazione che ci dica se l'imbarcazione è stabile o meno e che ci dica la posizione di M. Imponiamo la condizione che la coppia stabilizzante della spinta S rispetto a C nata in seguito alla rotazione, sia uguale ai momenti (che hanno lo stesso segno) dei volumi, immerso ed emerso, $\Omega_1$ e $\Omega_2$.




$M_1$ = momento stabilizzante di S

$M_2$ = momento di $F_1$ e $F_2$

$M_1 = \underbrace{\gamma V_c}_{S} \cdot \overline{CM}\,\vartheta$ $\qquad \overline{CM}\,tg\,\vartheta = \overline{CM}\,\vartheta = \overline{CC'}$ = braccio della spinta $S$

$$M_2 = \int_{\Omega_1} \underbrace{\gamma\, d\Omega\, x\vartheta}_{\text{spinta } F_1 \text{ (peso)}} \cdot \overset{\text{braccio generico}}{x} + \int_{\Omega_2} \gamma\, d\Omega\, x\vartheta \cdot x = \gamma\vartheta \int_{\Omega} x^2\, d\Omega$$

I due momenti che ruotano nello stesso verso sono uguali e uguagliandoli si ottiene una condizione di stabilità:

$$\cancel{\gamma} V_c \cdot \overline{CM}\,\cancel{\vartheta} = \cancel{\gamma}\cancel{\vartheta} \int_{\Omega} \underbrace{x^2\, d\Omega}$$

NB ↓

I = momento d'inerzia della sezione di galleggiamento (fig. b) fatto rispetto all'asse di simmetria che x $\vartheta$ piccolo ≡ con l'asse di inclinazione.

Ottengo quindi:

$V_c \cdot \overline{CM} = I$ che può essere scritto come:

$$\boxed{\overline{CM} = \frac{I}{V_c} > \overline{CG}}$$

↓

condizione di stabilità

con $V_c$ = volume di carena

$\overline{CM} > \overline{CG}$ x la stabilità

⇓

$\boxed{\overline{GM} > 0}$

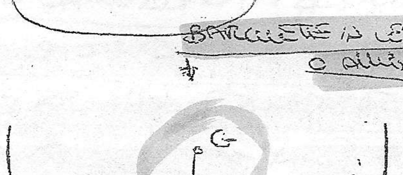
l'effetto momento stabilizzante $M$ è funzione della distanza $\overline{GM}$ in particolare si ha:

$$M = \gamma V_c\, \overline{GM} \cdot \vartheta$$

A seconda della funzione dell'imbarcazione abbiamo diverse posizioni di G. Esempio:

Barchette in vetroresina o alluminio

↓



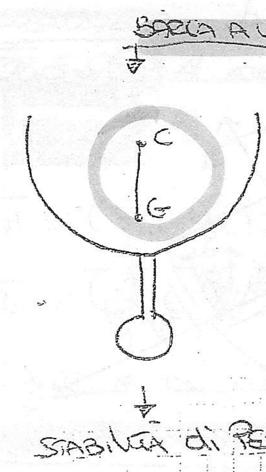

↑

stabilità di forma

con una piccola rotazione il C si sposta parecchio; il braccio di C' aumenta quindi aumenta la stabilità.

Barca a vela

↓




↓

stabilità di peso

Si abbassa il baricentro con un peso in basso (sono lente ma stabili)

## PERIODO DI OSCILLAZIONE DEL NATANTE

Si può calcolare a partire dall'equazione differenziale del pendolo

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_{st} = -\gamma V_c \overline{GM} \varphi$$

il segno − xké le forze stabilizzanti sono dirette in verso opposto (mentre la forza peso è diretta verso il basso)

ovvero:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma V_c \overline{GM} \varphi = 0$$

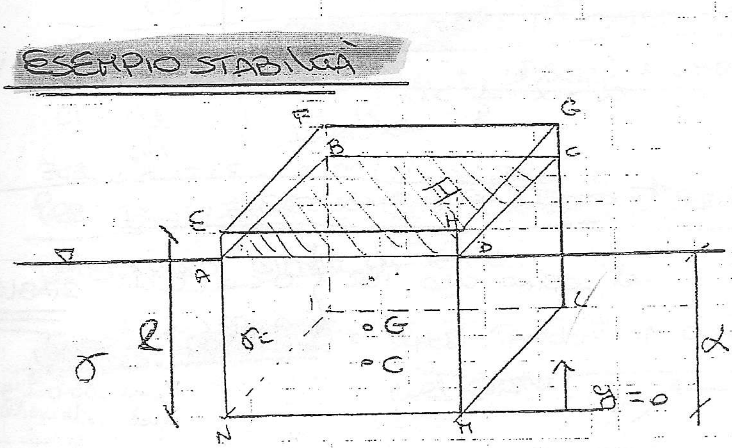
La soluzione di questa equazione differenziale al secondo ordine è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\gamma V_c \overline{GM}}}$$

Il $\overline{GM}$ si trova al denominatore x cui + $\overline{GM}$ è grande più T diminuisce.

Se il periodo di oscillazione è breve sulla barca ci viene il vomito xké dopo una rotazione il natante tornerà velocemente nella posizione di equilibrio iniziale, ecco perché nelle navi passeggeri la distanza $\overline{GM}$ è piccola e si preferisce aumentare il confort a discapito della stabilità in quanto $\overline{GM}$ grande forti accelerazioni e periodi di oscillazione brevi.

## ESEMPIO STABILITÀ




Consideriamo un cubo di peso specifico $\gamma_c$ - il cubo galleggia quindi P=S. Il lato è pari a $\ell$ e il lato immerso è pari ad $\alpha\ell$ con $\alpha$ che va da 0 a 1.

$$\begin{cases} P = \gamma_c \cdot \ell^3 \\ S = \gamma \underbrace{\ell^2 \alpha \ell}_{\text{Volume immerso}} = \gamma \ell^3 \alpha \end{cases}$$

Poiché il corpo è in equilibrio posso scrivere:

$P = S \Rightarrow \gamma_c \cancel{\ell^3} = \gamma \cancel{\ell^3} \alpha$

ovvero $\alpha = \dfrac{\gamma_c}{\gamma}$ $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ cubo tutto emerso; $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ cubo tutto immerso.

con $\alpha$ = affondamento del corpo e dipende dal rapporto dei pesi specifici.

la condizione di stabilità è: $\dfrac{I}{V_c} > \overline{CG}$ ovvero $\overline{CM} > \overline{CG}$

$$\frac{I}{V_c} = \frac{\frac{1}{12}\ell^3 \cdot \ell}{\alpha \ell^3} = \frac{1\,\ell}{12\alpha}$$

con $I$ = momento di inerzia sup. di gallegg. (ABCD)

calcoliamo $\overline{CG} = (y_G - y_C)$

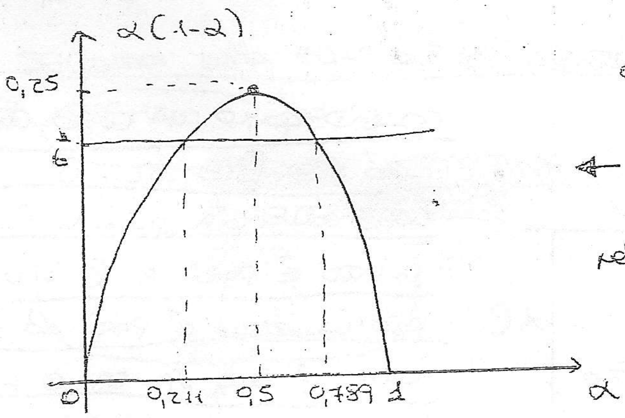
$$y_C = \frac{\alpha \ell}{2}, \quad y_G = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \overline{CG} = \frac{\ell}{2} - \frac{\alpha \ell}{2} = \frac{\ell}{2}(1-\alpha)$$

Quindi:

$$\frac{1}{\cancel{12}_{6}\,\alpha}\cancel{\ell} > \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}}(1-\alpha) \Rightarrow \frac{1}{6} > \alpha(1-\alpha)$$

con $\alpha$ variabile $f\left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)$

vediamo quindi x quali valori di $\alpha$ si verifica la disuguaglianza.




$\alpha - \alpha^2 - \frac{1}{6} > 0$ qui non è il contrario!!

← si costruisce la curva x punti e si vede quale è il ramo stabile.

nel nostro caso per $\begin{cases} 0 < \alpha < 0{,}211 \\ 0{,}789 < \alpha < 1 \end{cases}$ STABILE

Come stabiliamo quali intervalli!!

ora posso calcolare la $y_M$: $\overline{CM} = \dfrac{I}{V_c} \Rightarrow y_M - y_C = \dfrac{I}{V_c}$ Quindi:

$\boxed{y_M = y_C + \dfrac{I}{V_c}}$ → posizione del metacentro.