LEZIONE 5 15/03/2011

ESERCIZI → VEDI QUADERNO DA CONSEGNARE ESAME

LEZIONE 6 21/03/2011

DINAMICA DEI FLUIDI

PUNTO di VISTA EULERIANO
↓
CONSIDERA I VALORI di PRESSIONE VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE CHE IL FLUIDO IN MOVIMENTO OCCUPA NEI DIVERSI PUNTI DEL CAMPO di MOTO IN UN DETERMINATO INTERVALLO di TEMPO CONSIDERATO, QUINDI LI VALUTA SI DETERMINANO LINEE O SUPERFICI. (Poi parlo de ~~riccede~~ in un ~~punto~~ determinato punto nel tempo)

$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$
→ VELOCITÀ

LE COMPONENTI di V SARANNO:

$$u = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{dy}{dt} \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

CAMPO di MOTO NEL DETERMINATO INTERVALLO di tempo t. SE CAMBIA t CAMBIERÀ IL CAMPO di MOTO, OVVERO VARIA ISTANTE PER ISTANTE

PUNTO di VISTA LAGRANGIANO
↓
IDENTIFICA UNA PARTICELLA E NE SEGUE L'EVOLUZIONE NEL TEMPO ISTANTE PER ISTANTE (È MOLTO COMPLESSO), OVVERO CONOSCERE ISTANTE PER ISTANTE LE POSIZIONI DELLE PARTICELLE:

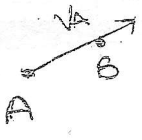
$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

(MOLTO USATO OGGI)

PER DESCRIVERE IL CAMPO di MOTO CI SERVIAMO DELLE LINEE di CORRENTE IN UN DETERMINATO ISTANTE di TEMPO.

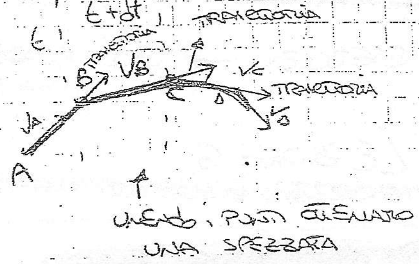
LINEE di CORRENTE = LINEE TANGENTI IN OGNI LORO PUNTO AL VETTORE VELOCITÀ IN quel PUNTO.

CONSIDERIAMO DELLE PARTICELLE FLUIDE IN MOVIMENTO IN UN DETERMINATO ISTANTE di TEMPO t. (BISOGNA IMMAGINARE di SCATTARE 1 FOTOGRAFIA ALLA MASSA FLUIDA IN MOVIMENTO)



Le linee di corrente forniscono la direzione della velocità in un istante fissato.

La particella A in quel determinato istante di tempo avrà una velocità V_A con una certa direzione. In un secondo istante di tempo ad esempio $t+dt$ la particella B, ottenuta spostandosi lungo V_A di una certa quantità, avrà una velocità V_B con una certa direzione. Proseguendo ancora con C e D e riducendo l'ampiezza degli spostamenti otteniamo una linea (in rosso) per cui in ogni punto il vettore velocità di quel punto sarà tangente alla curva. Quindi la linea di corrente ci fornisce la direzione del vettore velocità nei suoi punti. Per ogni punto della massa fluida passerà una linea di corrente.

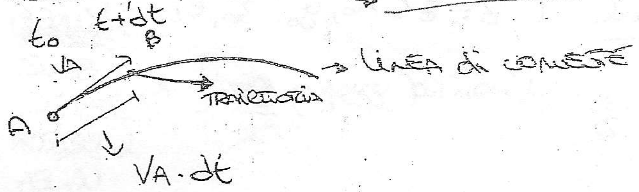


Linee corrente: istante fissato
Traiettorie: variare del tempo

NB: linee di corrente $\neq$ traiettorie!

Le traiettorie rappresentano le successioni di punti occupati dalle particelle al variare del tempo. Sono ben distinte dalle linee di corrente xké quest'ultime sono formate da punti in un determinato istante di tempo, mentre le traiettorie sono formate da punti occupati dal fluido al variare del tempo.

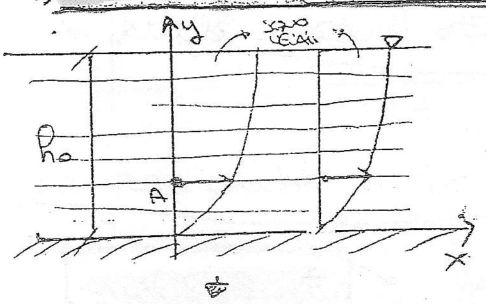
* Solo nel moto permanente le linee di corrente $\equiv$ con le traiettorie
→ i caratteri cinematici non dipendono dal tempo $V = (x, y, z)$



Mi sposto da A a B e percorro uno spazio pari a $V_A \cdot dt$. In quel punto ho la diff. tra linea di corrente e traiettoria xké nel punto B all'istante di tempo $t+dt$ non ho più la velocità V_A, perciò si avrà una V_B la cui direzione è diversa dalla V_A; da B si staccherà una linea che rappresenta la traiettoria.

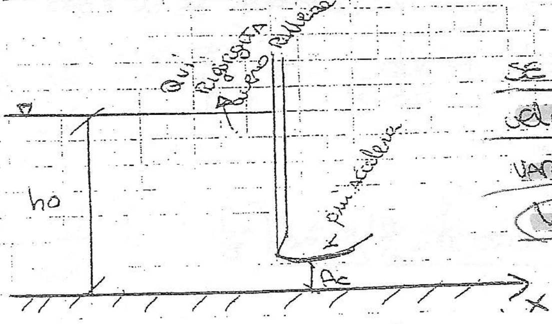
Analizziamo le diverse tipologie di moto o i diversi regimi di moto:

1) Moto uniforme nel regime di moto laminare



Nel regime di moto laminare (H_2O che si muove molto lenta) le traiettorie sono rettilinee e parallele, il tipo di moto è quello uniforme perché la velocità (vedi distribuzione in blu nel disegno) non varia nello spazio e nel tempo, la $\boxed{V = V(y)}$ non di x.

2) MOTO PERMANENTE



SE LA PARATIA NON SI MUOVE IL VETTORE VELOCITÀ VARIA NELLO SPAZIO (LUNGO x) MA NON VARIA NEL TEMPO: SIAMO NEL CASO DI MOTO PERMANENTE.

$$V=V(y,x,z)$$

3) MOTO VARIO

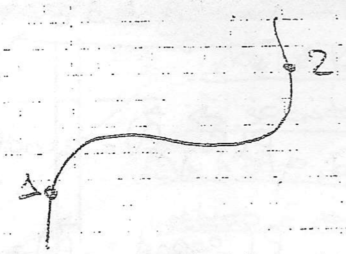
STESSO ESEMPIO FATTO SOPRA CON LA PARATIA CHE INIZIA A MUOVERSI PER CUI IL VETTORE VELOCITÀ VARIA SIA NEL TEMPO CHE NELLO SPAZIO: SIAMO NEL CASO DI MOTO VARIO; IL MOTO TURBOLENTO LO POSSIAMO GESTIRE COME UN MOTO VARIO.

$$V=V(x,y,z,t)$$

ACCELERAZIONE EULERIANA

$$\vec{A}=\frac{d\vec{V}}{dt}$$

CONSIDERIAMO UNA TRAIETTORIA: UNA PARTICELLA IN UN CERTO ISTANTE SI TROVA NELLA POSIZIONE (1) E DOPO UN ALTRO ISTANTE DI TEMPO SI TROVERÀ NELLA POSIZIONE (2) PER CUI IL VETTORE VELOCITÀ SUBIRÀ UNA VARIAZIONE NELLO SPAZIO (x,y,z) E NEL TEMPO (t):



$$d\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}dt+\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}dz$$

PER CUI SI HA:

$$A=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{dt}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

MA $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=u\\ \frac{dy}{dt}=v\\ \frac{dz}{dt}=w\end{cases}$ => COMPONENTI DEL VETTORE V

$$\boxed{A=\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\text{VARIAZIONE TEMPORALE DEL VETTORE V}}+\underbrace{u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}}_{\text{VARIAZIONE SPAZIALE DEL VETTORE V.}}}$$

=> DERIVATA TOTALE O DERIVATA EULERIANA

Nel caso di moto permanente, non essendoci la dipendenza del vettore V dal tempo, il primo termine della accelerazione euleriana scompare; se il moto è uniforme l'accelerazione è nulla!

TEOREMA di BERNOULLI

Partiamo sempre dall'equilibrio del volumetto di fluido:

- STATICA $\rightarrow F = m\vec{a} = 0 \Rightarrow \rho\vec{R} = \text{grad}\,P$ → si ricava Stevino
- DINAMICA $\rightarrow F = m\vec{a} \Rightarrow \rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}\,P$ → equazione di Eulero; si ricava Bernoulli

con $\vec{R}$ = risultante delle forze di massa x unità di massa

$\vec{A}$ = accelerazione euleriana

$\vec{R} = -g\,\text{grad}\,z$ ← nel campo gravitazionale terrestre

$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad}\,P$ sostituendo:

$\rho(-g\,\text{grad}\,z - \vec{A}) = \text{grad}\,P$ moltiplico per ρ con $\rho \cdot g = \gamma$

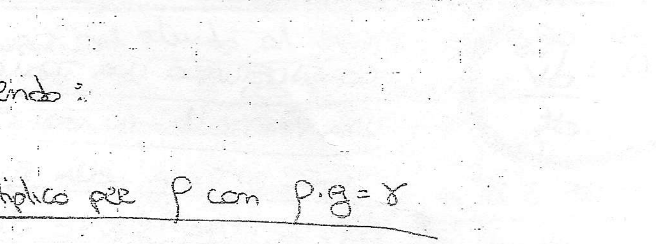
$-\gamma\,\text{grad}\,z - \rho\vec{A} = \text{grad}\,P$

$\text{grad}(\gamma z + P) = -\rho\vec{A}$ • il fluido è incomprimibile quindi posso mettere γ dentro il segno di gradiente.

Divido tutto per γ per cui $\frac{\rho}{\gamma} = \frac{1}{g}$:

$\text{grad}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\vec{A}$ ma $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

Quindi:



(*) $\text{grad}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{d\vec{V}}{dt}$

ds: elemento di linea di corrente che è con l'elemento di traiettoria

Consideriamo una traiettoria del tipo $S = s(t)$ e consideriamo un punto O in un intorno dS per cui possiamo individuare una direzione $\vec{t}$ tangente alla curva, una $\vec{n}$ normale e una $\vec{b}$ binormale alla curva.

PROIETTIAMO LA (*) LUNGO LE TRE DIREZIONI $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$:

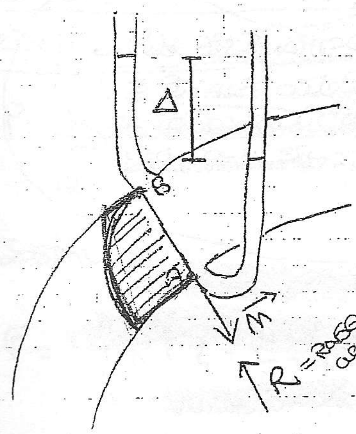
(1) $\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$ → TOLGO IL SEGNO DI VETTORE XKE' RAPPRESENTA LA COMPONENTE LUNGO LA TANGENTE

(2) $\frac{\partial}{\partial n}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\cancel{\frac{dV}{dt}}\frac{V^2}{R}$ → ACCELERAZIONE CENTRIPETA

(3) $\frac{\partial}{\partial b}\left(z+\frac{p}{\gamma}\right) = 0$ → LUNGO LA BINORMALE L'ACCELERAZIONE NON HA COMPONENTI

DALLA (1) RICAVIAMO BERNOULLI; DALLA (2) RICAVIAMO STEVINO IN IDROSTATICA, E IN IDRODINAMICA POSSIAMO FARE DELLE CONSIDERAZIONI:

CONDOTTA CURVILINEA

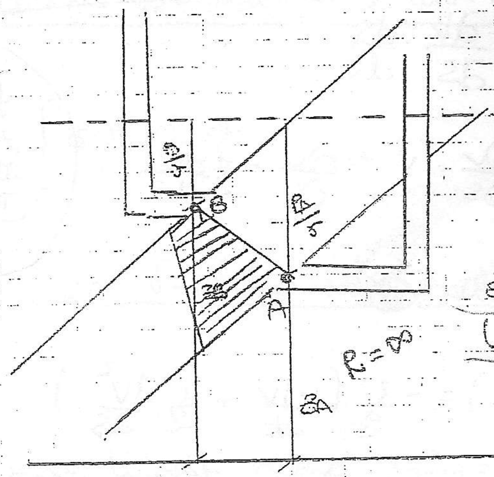


↓

distribuzione delle pressioni di legge quadratica (parabolica)

↓

CONDOTTA RETTILINEA



$\frac{p}{\gamma}+z = cost$

xKE' SE $R=\infty$ IL SECONDO TERMINE VA A ZERO, OVVERO INTEGRATO È UNA COSTANTE.

È IL CASO DI CORRENTI LINEARI O GRADUALMENTE VARIATE

$z=0$

↓

distribuzione delle pressioni di tipo idrostatico (legge lineare)

$dn = -dR$ quindi posso sostituire e cambiare di segno:

$$\frac{d\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)}{dR} = +\frac{1}{g}\frac{V^2}{R}$$

INTEGRIAMO LUNGO LA SEZIONE AB:

$$\left[z+\frac{p}{\gamma}\right]_A^B = \frac{1}{g}\int_A^B \frac{V^2}{R}\,dR$$

sviluppando

$$-\left(z_A + \frac{p_A}{\gamma}\right) + \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right) = \int_A^B \frac{1}{g} V^2/R \, dR$$

$$\underbrace{z_A + \frac{p_A}{\gamma}}_{h_A} \qquad \underbrace{z_B + \frac{p_B}{\gamma}}_{h_B}$$

h = carico piezometrico

$$h_B = h_A + \int_A^B \frac{1}{g} \frac{V^2}{R} dR \rightarrow \Delta > 0$$

quantità positiva → nel caso di correnti curvilinee il carico in B è > del carico in A.

Ricaviamo Bernoulli dalla 1

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}$$

Hp: fluido ideale, incomprimibile, moto permanente!

la velocità è funzione dello spazio e del tempo: $V = V(t, s(t))$

applicando la regola di derivazione euleriana

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \cdot V = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds}$$

nel moto permanente di un fluido perfetto pesante e incomprimibile il carico totale si mantiene costante lungo ogni traiettoria

Sostituiamo nella 1

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{1}{g}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds}\right)$$

z = quota geodetica

$\frac{p}{\gamma}$ = altezza piezometrica

$\frac{V^2}{2g}$ = altezza cinetica

Raccolgo:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

→ 0 x le Hp di moto permanente

Quindi integrando si ottiene

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \text{cost} \quad H = \text{carico totale (o trinomio di Bernoulli)}}$$

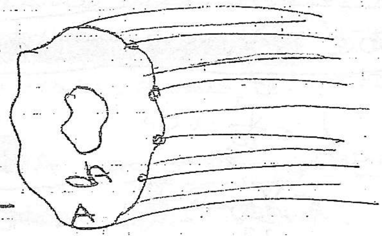
altezza cinetica = energia per unità di peso

H = energia totale della singola particella che si muove lungo una traiettoria

POTENZA DI UNA CORRENTE

LA POTENZA DI UNA CORRENTE È L'ENERGIA NELL'UNITÀ DI TEMPO

CONSIDERIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA, POSSIAMO COSTRUIRE UN TUBO DI FLUSSO, OVVERO DA OGNI PUNTO DI QST SUPERFICIE PASSERÀ, IN UN DETERMINATO ISTANTE DI TEMPO, UNA LINEA DI CORRENTE.



AD UNA SUPERFICIE INFINITESIMA dA È ASSOCIATA UNA PORTATA INFINITESIMA dQ, ALLA QUALE È ANCORA ASSOCIATA UNA ENERGIA H E QUINDI UNA POTENZA INFINITESIMA dP:

$$dP = \gamma H \cdot dQ$$

PER OTTENERE LA POTENZA DELLA CORRENTE DEVO INTEGRARE SU TUTTA LA SEZIONE A, RISPETTO ALLA PORTATA Q

$$P = \int_Q \gamma H \, dQ \qquad \text{oppure}: \quad P = \int_A \gamma \cdot H \cdot v \cdot dA$$

SOSTITUIAMO:

con v = velocità relativa all'area infinitesima dA

$$P = \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) v \, dA$$

SE FACCIAMO L'IPOTESI DI CORRENTE LINEARE OVVERO $z + \frac{p}{\gamma}$ = COST PER TUTTI I PUNTI DELLA SEZIONE POSSIAMO SPEZZARE L'INTEGRALE:

$$P = \underbrace{\int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \cdot v \, dA}_{\text{calcola potenza relativa alla parte potenziale}} + \underbrace{\gamma \int_A \frac{v^2}{2g} \cdot v \, dA}_{\text{calcola la potenza relativa alla parte cinetica} = P_c = \text{potenza cinetica effettiva}}$$

$$P = \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) v \, dA + P_c \quad \Rightarrow \quad P = \int_A \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) v \, dA = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \int_A v \, dA = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) Q$$

POICHÉ LA VELOCITÀ v NON È LA STESSA IN TUTTI I PUNTI DELLA MASSA FLUIDA, INTRODUCIAMO UNA VELOCITÀ MEDIA:

$$V_m = \frac{Q}{A}$$

PER CUI SI PUÒ INTRODURRE UNA POTENZA CINETICA FITTIZIA (PERCHÉ LEGATA ALLA V_m)

$$P_{c_{fittizia}} = \gamma V_m A \frac{V_m^2}{2g} = \gamma Q \frac{V_m^2}{2g}$$

PER PASSARE ALLA POTENZA DELLA CORRENTE E PER NON PORTARE DIETRO L'INTEGRALE SI UTILIZZA UN FATTORE α = FATTORE DI CORIOLIS definito come:
↳ o coeff. di ragguaglio

$$\alpha = \frac{P_{c\,effettiva}}{P_{c\,fittizia}} = \frac{\int_A \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot v\, dA}{\gamma \frac{V_m^2}{2g} \cdot Q} \qquad P_{c\,eff} = \alpha\, P_{c\,fitt.}$$

PER CUI $\boxed{P = \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} + \overset{1}{\cancel{\alpha}} \frac{V_m^2}{2g}\right) Q}$ → POTENZA DI UNA CORRENTE

$\alpha \cong 1$ x cui si può trascurare;

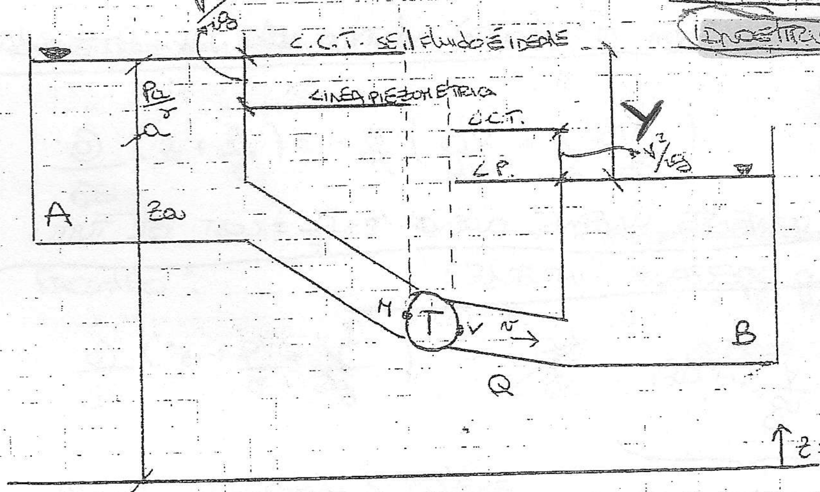
si ha perciò: $\boxed{P = \gamma H \cdot Q}$

LEZIONE N° 7 — 22/03/2011

APPLICAZIONE POTENZA DI UNA CORRENTE

CONSIDERIAMO LO SCHEMA DI UN IMPIANTO IDROELETTRICO.

$$Y = H_A - H_B$$



NEL SERBATOIO DI MONTE VIENE RACCOLTA L'ACQUA; QUI SI HA ENERGIA POTENZIALE CHE VIENE TRASFORMATA IN ENERGIA CINETICA CHE FA MUOVERE LE PALE DELLA TURBINA PER CUI SI PRODUCE ENERGIA ELETTRICA; INFINE L'ACQUA VIENE SCARICATA NEL SERBATOIO DI VALLE. IL CARICO, QUINDI, CHE LA TURBINA POTREBBE SFRUTTARE È PARI AL DISLIVELLO DELLE QUOTE DEI DUE SERBATOI $Y = H_A - H_B$

PER CUI LA POTENZA DISPONIBILE È:

$P_d = \gamma Q Y$ → POTENZA DISPONIBILE

LA POTENZA CEDUTA DALLA CORRENTE ALL'IMPIANTO È DIVERSA DALLA POTENZA disponibile perché tiene conto delle perdite; quindi la potenza ceduta alla turbina è:

$$\boxed{P_{\text{ceduta}} = \gamma Q \Delta H}$$

con $\Delta H = H_M - H_V$

H_M = carico a monte della turbina

H_V = carico a valle della turbina

Se il fluido è ideale il carico in A non varia, non ha perdite, quindi sarà costante fino al punto di ingresso della turbina:

$H_A = H_M$

il carico a valle è pari: $H_V = H_B + \frac{V^2}{2g}$ con V = cost per l'equazione di continuità $Q = V \cdot A$ e Q = cost.

Quindi:

$\Delta H = H_A - H_B - \frac{V^2}{2g} = Y - \frac{V^2}{2g}$ dove $\frac{V^2}{2g}$ rappresenta la perdita di sbocco

NB: se il fluido fosse stato reale al ΔH avrei dovuto aggiungere altri termini che rappresentano le perdite (JL)

La potenza effettiva dell'impianto deve tenere conto del rendimento della macchina e quindi risulta essere più piccola della potenza ceduta dalla corrente:

$P_{eff} = \eta \gamma Q \Delta H$ η = rendimento < 1

Come è possibile massimizzare il rendimento dell'impianto? Bisogna lavorare sul ΔH; affinché il ΔH sia max il termine $\frac{V^2}{2g}$ deve essere minimo.

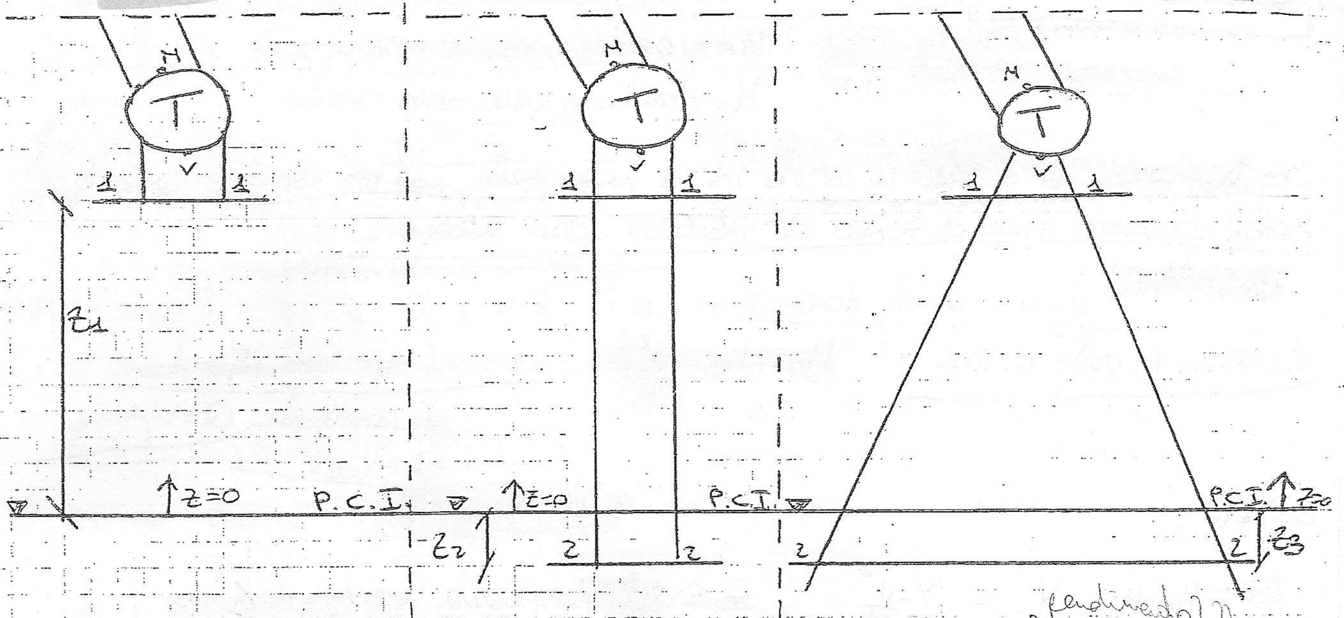
Riassumendo: $\left\{ \text{se } \frac{V^2}{2g} \text{ è piccolo} \Rightarrow \Delta H \text{ è grande} \Rightarrow P_{eff} \text{ cresce!} \right.$

$\uparrow \Delta H \quad \downarrow \eta$

Se vogliamo massimizzare la potenza dobbiamo lavorare su $\frac{V^2}{2g}$ che rappresenta le perdite di sbocco, quindi lavoriamo sul tipo di sbocco a valle.

ABBIAMO A DISPOSIZIONE 3 POSSIBILI SOLUZIONI PER LO SBOCCO DELLA TURBINA:

(1) LIQUIDO SCARICATO IN ARIA | (2) DIFFUSORE CILINDRICO (scarico al di sotto del pelo libero) | (3) DIFFUSORE DIVERGENTE



CON $z_2 = z_3$

rendimento??

DOMANDA:

QUAL È LA SOLUZIONE MIGLIORE PER MASSIMIZZARE LA POTENZA DELL'IMPIANTO???

(1) SOLUZIONE: LIQUIDO SCARICATO IN ARIA VS (2) SOLUZIONE: DIFFUSORE CILINDRICO

EFFETTUIAMO IL CONFRONTO TRA LA (1) E LA (2) IN TERMINI ENERGETICI APPLICANDO IL TEOREMA DI BERNOULLI:

Scarico caso 1

$$H_{v(1)} = z_1 + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \frac{V_1^2}{2g}$$

$p_1 \to 0$ xké è a contatto con l'atmosfera

CON $V_1 = V_2$ PERCHÉ I TUBI HANNO LO STESSO DIAMETRO E LA PORTATA È LA STESSA ($Q_1 = Q_2$)

Scarico caso 2

$$H_{v(2)} = -z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = \cancel{-z_2} + \cancel{\frac{\gamma z_2}{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

OVVERO:

$$H_{v(1)} = z_1 + \frac{V_1^2}{2g} \qquad H_{v(2)} = \frac{V_2^2}{2g}$$

è corretto x massimizzare ma il rendimento

IL CARICO NELLA (1) SOLUZIONE È PIÙ GRANDE DI QUELLO DELLA (2) SOLUZIONE DI UNA QUANTITÀ PARI A z_1, QUINDI LA SOLUZIONE MIGLIORE È LA (2) OVVERO:

$$\Delta H_{recuperato} = z_1 = \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

!! ?? No

MA ESSENDO H (L'ENERGIA) COSTANTE, SE ABBIAMO RECUPERATO UNA PORZIONE DI ENERGIA VUOL DIRE CHE NE ABBIAMO PERSA UN'ALTRA. LAVORIAMO SULLA

SOLUZIONE (2) E PER ~~VEDERE~~ vedere COSA ABBIAMO ~~PERSO~~ Perso APPLICANDO BERNOULLI TRA LA SEZIONE 1-1 (CHE SI TROVA ALL'ALTEZZA DELLO SBOCCO DELLA SOLUZIONE (1)) E LA SEZIONE 2-2.

$$z_{1-1} + \frac{P_{1-1}}{\gamma} + \cancel{\frac{V_{1-1}^2}{2g}} = \underbrace{-\cancel{z}_{2-2} + \cancel{\frac{P_{2-2}}{\gamma}}}_{\text{sono} =} + \cancel{\frac{V_{2-2}^2}{2g}}$$

$V_{1-1} = V_{2-2}$ PERCHÉ IL TUBO HA DIAMETRO COSTANTE;

$$\frac{P_{2-2}}{\gamma} = \frac{z_{2-2} \cdot \cancel{\gamma}}{\cancel{\gamma}} = z_{2-2}$$

POSSO SEMPLIFICARE SOPRA E OTTENGO:

$$-z_1 = \frac{P_1}{\gamma} \qquad \text{OPPURE ANCHE } P_1 = -\gamma z_1 \ *$$

QUESTO SIGNIFICA CHE ABBIAMO RECUPERATO ENERGIA POTENZIALE, MA ABBIAMO PERSO ENERGIA DI PRESSIONE, QUELLO DELLA SEZIONE 1-1 STIAMO IN DEPRESSIONE, ANCHE PERCHÉ IL P.C.I. SI TROVA SOTTO; QUESTO PUÒ ESSERE PROBLEMATICO SE SI VERIFICA IL FENOMENO DELLA CAVITAZIONE: IL LIQUIDO, NEL CASO IN CUI LE PRESSIONI INIZIANO AD AVVICINARSI ALLO ZERO ASSOLUTO, COMINCIA A BOLLIRE E QUINDI A MARTELLARE LE PARETI DELLA CONDOTTA A CAUSA DELLA FORMAZIONE DI BOLLE DI VAPORE; PRECEDENTEMENTE SE LE CONDOTTE ERANO REALIZZATE IN GHISA E QUINDI POTEVANO BUCARSI, ADESSO VENGONO FATTE IN ACCIAIO QUINDI QUESTO PERICOLO NON C'È PIÙ!

COMUNQUE ABBIAMO VISTO CHE LA SOLUZIONE (2) È MIGLIORE DELLA SOLUZIONE (1); CONFRONTIAMO LA SOLUZIONE (2) CON LA SOLUZIONE (3):

(2) SOLUZIONE: DIFFUSORE CILINDRICO VS (3) SOLUZIONE: DIFFUSORE DIVERGENTE

$$H_{v(2)} = \frac{V_2^2}{2g}$$

CALCOLIAMO IL CARICO A VALLE NELLA SOLUZIONE (3):

$$H_{v(3)} = \cancel{-z_3 + \frac{P_3}{\gamma}} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$\frac{P_3}{\gamma} = \frac{z_3 \gamma}{\gamma}$$

CON $z_3 = z_2$ MA $V_3 < V_2$ PERCHÉ LA Q È SEMPRE LA STESSA MA IL DIAMETRO CAMBIA!

RESTA

$$H_{v(2)} = \frac{V_2^2}{2g} \qquad H_{v(3)} = \frac{V_3^2}{2g}$$

POICHÉ $V_3 < V_2$ RISULTA $H_{v(3)} < H_{v(2)} < H_{v(1)}$.

RISPOSTA

LA SOLUZIONE MIGLIORE È LA (3) OVVERO L'UTILIZZO DI UN DIFFUSORE DIVERGENTE, IL PREZZO DA PAGARE È LA DEPRESSIONE CHE SARÀ MAGGIORE, INFATTI SE APPLICHIAMO BERNOULLI NELLA (3) SOLUZIONE TRA LA SEZIONE 1-1 E LA SEZIONE 2-2 NOTIAMO:

$$z_{1-1} + \frac{p_{1-1}}{\gamma} + \frac{V_{1-1}^2}{2g} = z_{2-2} + \frac{p_{2-2}}{\gamma} + \frac{V_{2-2}^2}{2g}$$

O ANCHE:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \cancel{-z_3} + \cancel{\frac{p_3}{\gamma}} + \frac{V_3^2}{2g}$$

QUINDI:

$$\frac{p_1}{\gamma} = -z_1 + \frac{V_3^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \underbrace{-z_1 - \left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g}\right)}$$

SI NOTA CHE LE DEPRESSIONI SONO MAGGIORI RISPETTO AL CASO (2) *

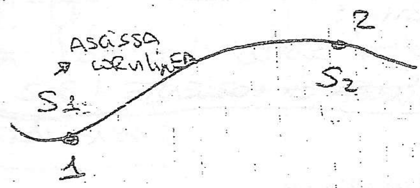
ESTENSIONE TEOREMA DI BERNOULLI AL MOTO VARIO

IL TEOREMA DI BERNOULLI VALE NELL'IPOTESI DI FLUIDO IDEALE E INCOMPRIMIBILE CHE SI MUOVE DI MOTO PERMANENTE, NEL CASO IN CUI RINUNCIAMO A QUESTE IPOTESI ABBIAMO CHE LA QUANTITÀ AL SECONDO MEMBRO DELL'ESPRESSIONE SCRITTA SOTTO NON È PIÙ NULLA COME NEL CASO DI MOTO PERMANENTE: EQ. DEL FLUIDO IDEALE PESANTE E INCOMPRIMIBILE IN CASO DI MOTO VARIO:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}$$

??

QUESTO VUOL DIRE CHE IL CARICO LUNGO UNA LINEA DI CORRENTE VARIA IN UN DETERMINATO ISTANTE DI TEMPO t;



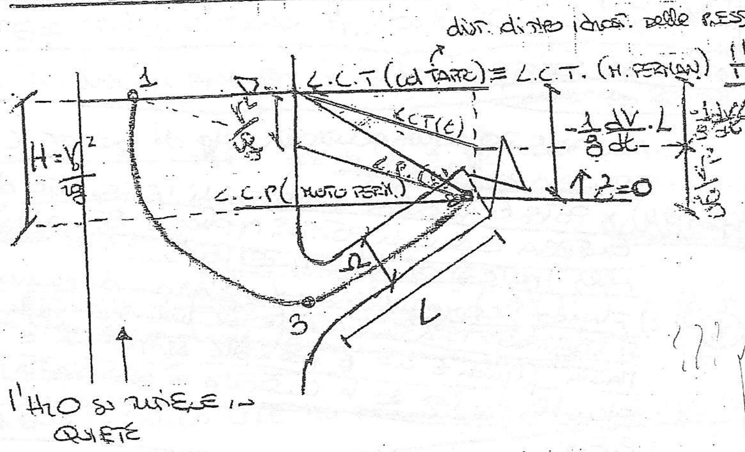
Per cui data una linea di corrente, l'energia nella posizione 1 non è uguale a quella nella posizione 2. (nel moto permanente l'energia nei due punti è uguale).

Integrando si ha:

$$H_2 - H_1 = \int_{S_1}^{S_2} -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\, ds$$

con H_1 e H_2 i valori che il carico totale assume "contemporaneamente" in un determinato istante nei due punti

APPLICAZIONE: AVVIAMENTO CORTA CONDOTTA: MOTO VARIO!



Hp = fluido ideale e incomprimibile (quindi le variazioni di pressione si devono sentire istantaneamente in tutti i punti della massa fluida)

?? linea di corrente 1-3-2
— moto permanente ($t = \infty$)
— $t = 0$ (unica linea tot. e piez.)
— t = generico

Quando c'è il tappo abbiamo solo energia di pressione (non c'è energia cinetica); se tolgo il tappo il fluido inizierà a fuoriuscire con una certa velocità che non sarà subito quella di moto permanente; quest'ultimo si instaurerà dopo un tempo pari a $t = \infty$

Come calcoliamo la velocità di moto permanente? Data una linea di corrente applichiamo il teorema di Bernoulli:

$$z_1 + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} = \cancel{z_2} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \frac{V_0^2}{2g}$$

V_0 = velocità moto permanente

in 1 il liquido è fermo; in 2 $z = 0$; quando tolgo il tappo $P_2 = P_{atm} = 0$

$$H = \frac{V_0^2}{2g} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2gH}$$

con $H = z_1$

Possiamo disegnare la linea dei carichi totali in regime di moto permanente (che coincide con quella in presenza del tappo) e la linea dei carichi piezometrici in regime che distano l'una dall'altra di $\frac{V_0^2}{2g}$.

TOGLIAMO IL TAPPO E RAGIONIAMO IN UN GENERICO ISTANTE t: IL CARICO LUNGO LA GENERICA LINEA DI CORRENTE VARIA, IN PARTICOLARE SI HA:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} \quad (1)$$ → PARTICOLARIZZIAMO ALLA LINEA DI CORRENTE 1-3-2 E INTEGRIAMO:

$$\int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = \int_1^2 -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} ds$$ → SPEZZIAMO L'INTEGRALE:

$$\cancel{\int_1^3 \frac{\partial H}{\partial s} ds}^{\,0} + \int_3^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = \cancel{\int_1^3 -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} ds}^{\,0} + \int_3^2 -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} ds$$

ALL'INTERNO DEL SERBATOIO IL CARICO (LIVELLO) H NON VARIA.

ALL'INTERNO DEL SERBATOIO LA VELOCITÀ NON VARIA

QUINDI SI HA:

$$\int_3^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = -\int_3^2 +\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} ds \quad (*)$$

ANALIZZIAMO LA CONDOTTA: HP DI BREVITÀ È FORMULATA X 2 RAGIONI:
1) X POTER RITENERE TRASCURABILI LE PERDITE DI ENERGIA E QUINDI POTER APPLICARE BERNOULLI NELL'IPOTESI DI FLUIDO PERFETTO;
2) FLUIDO INCOMPRIMIBILE → VARIAZIONI DI PRESSIONE SI RISENTONO ISTANTANEAMENTE IN TUTTI I PUNTI DELLA MASSA FLUIDA E CIÒ È POSSIBILE SE LA MASSA È PICCOLA, OVVERO SE LA CONDOTTA È ABBASTANZA BREVE.

MA IN UNA LINEA DI CORRENTE LA QUANTITÀ $\frac{\partial V}{\partial t}$ È COSTANTE PERCHÉ LA L. DI CORR. È VALIDA PER UN PRECISO ISTANTE DI TEMPO.

NEL MOTO VARIO LA PORTATA È FUNZIONE DEL TEMPO: $Q = Q(t)$, MA NELLO SPAZIO $Q(s) = cost$, CIOÈ SE FISSO UN DETERMINATO ISTANTE DI TEMPO LA PORTATA NON VARIA NELLO SPAZIO (IN UN ISTANTE DI TEMPO SUCCESSIVO QUALCHE COSA VARIERÀ).

SICCOME NELLA NOSTRA CONDOTTA ABBIAMO UNA SEZIONE Ω DI DIAMETRO COSTANTE LA VELOCITÀ NON PUÒ VARIARE NEL TEMPO E NELLO SPAZIO PERCHÉ LA VELOCITÀ È LA PORTATA DIVISO L'AREA, QUINDI $V = V(s) = cost$.

POSSO SOSTITUIRE QUINDI LA DERIVATA PARZIALE (∂) LA DERIVATA TOTALE (d):

$$\frac{\partial V(s)}{\partial t} = \frac{dV(s)}{dt} = cost$$ ← LA DERIVATA TOTALE (DERIVATA EULERIANA) È LA SOMMA DI 2 DERIVATE PARZIALI, UNA RISPETTO AL TEMPO E UNA RISPETTO ALLO SPAZIO; NON ESSENDOCI VARIAZIONI SPAZIALI POSSO SOSTITUIRE LA DERIVATA PARZIALE CON QUELLA TOTALE.

PER CUI LA (*) LA POSSO SCRIVERE: $H_2 - H_3 = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}\int_3^2 ds$

MA $\int_3^2 dS = L$ OVVERO LA LUNGHEZZA DEL TRATTO DI CONDOTTA CONSIDERATO E

QUINDI SI HA:

$$H_2 - H_3 = -\frac{1}{g}\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{ACCELERAZIONE}} \cdot L$$

ANALIZZIAMO DUE ISTANTI DI TEMPO: ① $t=0$ APPENA TOLGO IL TAPPO E ② $t=t$ GENERICO DA QUANDO HO TOLTO IL TAPPO.

$t=0$

APPENA TOLGO IL TAPPO $H_2=0$ PERCHÉ IL LIQUIDO HA UNA CERTA ACCELERAZIONE MA LA VELOCITÀ ANCORA È NULLA QUINDI:

$$H_2 = \cancel{z_2} + \cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} = 0 \qquad H_3 = z_3 + \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

POSSO SCRIVERE:

$$\underbrace{\cancel{-}H_3 = \cancel{-}\frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0} \cdot L}_{} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0}}_{\text{ACCELERAZIONE IN } t=0} = \frac{g\,H}{L}$$

OVVERO IL CARICO CHE HO IN 3 È PROPRIO UGUALE AD H NEL CASO DI $t=0$

SE MOLTIPLICO AMBO I MEMBRI PER $\gamma\Omega$

$$\underbrace{\gamma \cdot \Omega\, H_3}_{\text{SPINTA SUL TAPPO}} = \underbrace{\gamma\Omega\,\frac{1}{g}\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0} \cdot L}_{m \cdot a \,=\, \text{AZIONE D'INERZIA}}$$

$$\frac{\gamma}{g} = \rho$$

$$\gamma\Omega\frac{1}{g} = \rho \cdot \Omega \cdot L = \text{MASSA}$$

$$\frac{dV}{dt} = \text{ACCELERAZIONE}$$

QUINDI ABBIAMO CHE LA SPINTA SUL TAPPO È UGUALE ALL'AZIONE DI INERZIA NELL'ISTANTE $t=0$

$t = t_{\text{GENERICO}}$

DOPO UN CERTO ISTANTE DI TEMPO IL FLUIDO DEFLUISCE CON UNA CERTA VELOCITÀ PER CUI SI HA UN CERTO CARICO CINETICO PARI A $\frac{V^2}{2g}$ MA NON SIAMO ANCORA IN CONDIZIONI DI MOTO PERMANENTE E QUINDI UNIFORME PERCHÉ IL FLUIDO HA ANCORA UNA CERTA ACCELERAZIONE.

$$H_2 = \frac{V^2}{2g} \qquad H_1 = \frac{V_0^2}{2g}$$

NB: LE LINEE DEI CARICHI TOTALI FORNISCONO LE ENERGIE NEI VARI PUNTI

$$H_2 - H_1 = \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} \cdot L$$

V_0 = VELOCITÀ di MOTO PERMANENTE

$$\frac{V_0^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = +\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} \cdot L \longrightarrow$$ EQUAZIONE differenziale: ci PERMETTE di calcolare la VELOCITÀ AL VARIARE del TEMPO.

CALCOLIAMO LA $V = V(t)$

MOLTIPLICHIAMO IL I E IL II TERMINE PER $2g$.

$$V_0^2 - V^2 = 2\frac{dV}{dt} \cdot L$$

SEPARIAMO LE VARIABILI:

$$dt = 2L\frac{dV}{V_0^2 - V^2}$$

MA POSSO ANCHE SCRIVERE:

$$\int_t dt = \frac{L}{V_0}\left[\int_V \frac{1}{V_0+V}\,dV + \int_V \frac{1}{V_0-V}\,dV\right]$$

$$t \qquad\qquad \ln(V_0+V) \qquad - \ln(V_0-V)$$

$$dt = \frac{2L}{2V_0}\left[\frac{dV}{V_0+V} + \frac{dV}{V_0-V}\right] \rightarrow$$ SE FACCIO IL m.c.m $\Rightarrow$

$$\frac{dV(V_0-V) + dV(V_0+V)}{(V_0+V)(V_0-V)} = \frac{dV\,(V_0 + V_0 - \cancel{V} + \cancel{V})}{V_0^2 - V^2} = \frac{2V_0\,dV}{V_0^2 - V^2}$$

Noi vogliamo questa quantità x questo dividiamo per $2V_0$

INTEGRANDO SI HA:

IL SEGNO − PERCHÉ È UNA QUANTITÀ NEGATIVA

$$t = \frac{L}{V_0}\left[\ln(V_0+V) - \ln(V_0-V)\right] + C$$

COSTANTE di INTEGRAZIONE

PER CALCOLARE LA COSTANTE di INTEGRAZIONE DEVO IMPORRE DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO PER CUI:

$$t = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$0 = \frac{L}{V_0}\left[\cancel{\ln V_0} - \cancel{\ln V_0}\right] + C \Rightarrow C = 0$$

SOSTITUENDO:

$$t = \frac{L}{V_0}\ln\left(\frac{V_0+V}{V_0-V}\right)$$

$$\frac{V_0 t}{L} = \ln\left(\frac{V_0+V}{V_0-V}\right)$$ APPLICO l'ESPONENZIALE $\longrightarrow$

$$e^{\frac{V_0 t}{L}} = \frac{V_0+V}{V_0-V}$$

$$(V_0-V)\,e^{\frac{V_0 t}{L}} = V_0+V$$

$$V_0 e^{\frac{V_0 t}{L}} - V e^{\frac{V_0 t}{L}} = V_0+V$$

$$V_0\left(e^{\frac{V_0 t}{L}}-1\right) - V\left(e^{\frac{V_0 t}{L}}+1\right) = 0$$

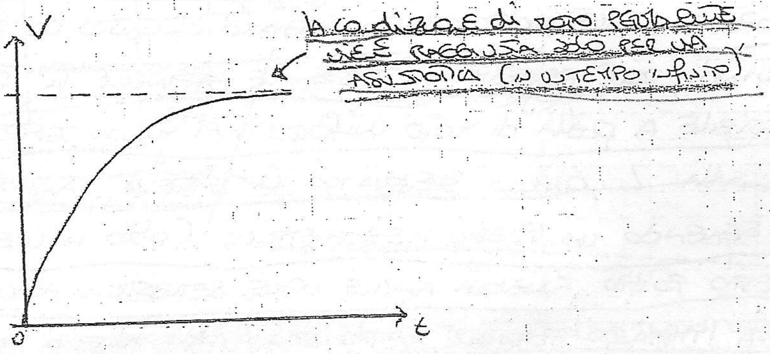
LO SCOPO È RICAVARE LA V ALL'ISTANTE DI TEMPO t:

$$V = \frac{V_0\left(e^{\frac{V_0 t}{L}}-1\right)}{\left(e^{\frac{V_0 t}{L}}+1\right)} \quad (*)$$

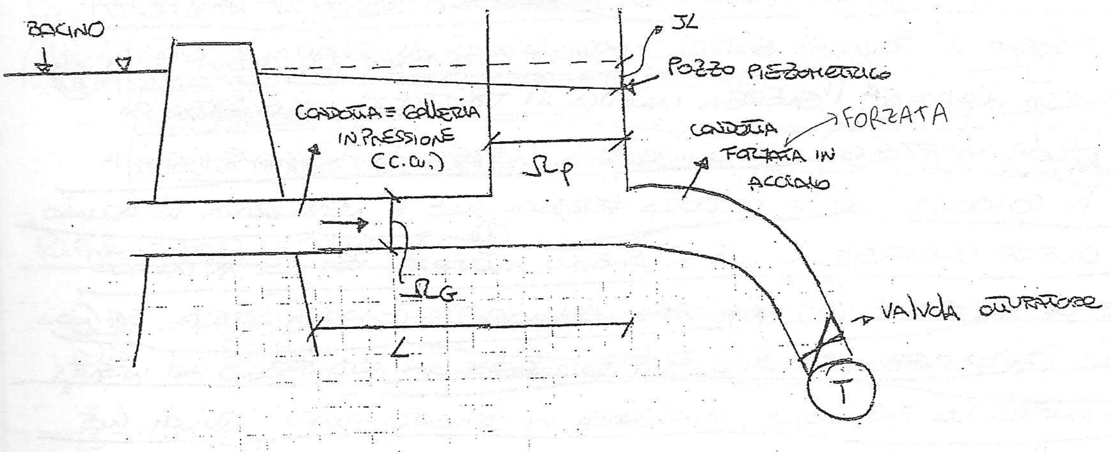
PER $t=0 \rightarrow V=0$

PER $t=\infty \rightarrow V \cong V_0$
(V TENDE A V_0)

$\exp(\infty)=0$



QUESTE CONSIDERAZIONI CHE ABBIAMO FATTO SI APPLICANO AGLI IMPIANTI IDROELETTRICI, AD ESEMPIO CONSIDERIAMO LO SCHEMA DI UN IMPIANTO IDROELETTRICO



PER ATTIVARE L'IMPIANTO ABBIAMO BISOGNO DI ENERGIA ELETTRICA. QUANDO APRIAMO LA VALVOLA CI TROVIAMO NEL CASO TRATTATO IN PRECEDENZA DELL'AVVIAMENTO DI UNA CORTA CONDOTTA.

LA POTENZA DELL'IMPIANTO È:

$$P = \eta \gamma Q \Delta H$$

NOI VOGLIAMO CHE L'IMPIANTO VADA VELOCEMENTE A REGIME, CIOÈ ABBIA LA POTENZA MASSIMA effettiva. È NECESSARIO COSÌ LAVORARE SULLA PORTATA $Q = Q(t)$.
LA PORTATA Q NON È SUBITO QUELLA DI MOTO PERMANENTE MA DOVRÀ PASSARE UN CERTO PERIODO DI TEMPO PERCHÉ LA VELOCITÀ VA DA ZERO A V_0 IN UN TEMPO CHE PUÒ ESSERE MOLTO GRANDE.
DOBBIAMO UTILIZZARE LA LEGGE (*) PRECEDENTEMENTE RICAVATA

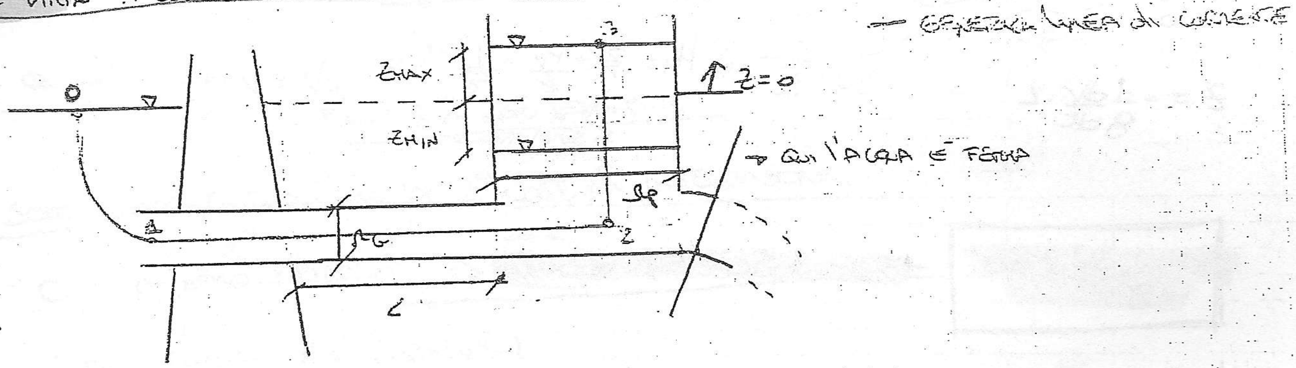
ESEMPIO:

$$\left\{\begin{array}{l} V_0 = 3\,m/s \\ L = 6000\,m \rightarrow \text{SOMMA GALLERIA IN PRESS. E COND. FORZATA} \\ t = 1000\,s \rightarrow \text{TEMPO ABBASTANZA GRANDE} \end{array}\right. \Rightarrow V = 0{,}24\,V_0 \text{ DALLA } (*)$$

DOPO UN TEMPO MOLTO GRANDE ABBIAMO OTTENUTO UNA VELOCITÀ CHE È CIRCA $\frac{1}{4}$ DI V_0.
QUINDI DOVE POSSIAMO INTERVENIRE AFFINCHÉ LA VELOCITÀ SI AVVICINI IL PIÙ POSSIBILE A QUELLA DI MOTO UNIFORME NEL MINOR TEMPO POSSIBILE? POSSIAMO LAVORARE SULLA L QUELLO SPEZZIAMO IL SISTEMA CANALIZZAZIONE-CONDOTTA FORZATA INSERENDO UN POZZO PIEZOMETRICO (ALTO ANCHE DECINE DI METRI), IN PIÙ QUESTO POZZO FUNZIONA ANCHE COME SERBATOIO PERCHÉ AL MOMENTO IN CUI SI ATTIVA L'IMPIANTO FORNISCE SUBITO ACQUA ALLA TURBINA, MA IN REALTÀ IL POZZO PIEZOMETRICO SVOLGE UN'ALTRA FUNZIONE MOLTO IMPORTANTE: IMMAGINIAMO CHE L'IMPIANTO STIA LAVORANDO A REGIME, IL POZZO PIEZOMETRICO SI COMPORTA COME UN VERO E PROPRIO PIEZOMETRO, PER CUI IL LIVELLO SARÀ PARI A QUELLO DEL BACINO MENO LE PERDITE (JL) LUNGO LA CONDOTTA. ESSENDO L'IMPIANTO A REGIME NON ABBIAMO PIÙ BISOGNO DI FORNIRE ENERGIA; IMMAGINIAMO DI BLOCCARE ISTANTANEAMENTE IL FLUSSO D'ACQUA: L'ENERGIA CINETICA SI TRASFORMA IN ENERGIA DI PRESSIONE (COLPO D'ARIETE) PER CUI QUESTA ENERGIA DI PRESSIONE INIZIA A MARTELLARE LA CONDOTTA. MA LA CONDOTTA FORZATA, CHE È REALIZZATA IN ACCIAIO, RESISTE A QUESTE SOVRAPRESSIONI CHE SI VENGONO A CREARE PER CUI SI CREANO DELLE ONDE DI PRESSIONE CHE SI PROPAGANO LUNGO LA CONDOTTA STESSA. SE NON CI FOSSE IL POZZO PIEZOMETRICO QUESTE SOVRAPRESSIONI ANDREBBERO AD INTERESSARE LA GALLERIA IN PRESSIONE, REALIZZATA IN CEMENTO ARMATO. QUINDI CHE SUCCEDE? SE L'ACQUA È FERMA AL LIVELLO DELLA VALVOLA DELLA CONDOTTA FORZATA, AL LIVELLO DEL POZZO PIEZOMETRICO L'ACQUA ANCORA NON SI È FERMATA, MA PUÒ RISALIRE LUNGO LO STESSO; SI CREA QUINDI UN MOTO OSCILLATORIO TRA LA GALLERIA IN PRESSIONE ED IL POZZO PIEZOMETRICO PER CUI IL LIQUIDO SALE NEL POZZO PIEZOMETRICO, SI PORTA ALLO STESSO LIVELLO DEL BACINO DI MONTE, MA POSSEDENDO

una certa inerzia sale ancora e si porta ad un certo livello più alto di quello di monte fino ad una altezza massima per cui il liquido si ferma; ma naturalmente questa non è una situazione di equilibrio, per cui si inverte il moto! Quando vi sarà sempre una differenza di potenziale, si innesca un moto e quindi si ricomincia!! Se il fluido fosse ideale questo moto oscillatorio durerebbe all'infinito. Essendo il fluido reale ci sono delle perdite quindi dopo un certo intervallo di tempo il moto si arresta.

Per dimensionare il pozzo piezometrico è necessario conoscere l'h_{max} e l'h_{min} a cui si porta il livello dell'acqua:



La Z_{max} ci serve per vedere quanto deve essere alto il pozzo, altrettanto importante è la Z_{min} perché se questa è più bassa dell'imbocco del pozzo piezometrico entrerà aria e quindi la portata che arriva alla turbina sarà minore.

Si considera la linea di corrente 0-1-2-3;

Hp: il livello nel serbatoio di monte non varia;
fluido ideale;
velocità pozzo piezometrico << velocità galleria in pressione $\left(\frac{V^2}{2g} \cong 0\right)$

Riprendiamo l'equazione (1)

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$$

estendiamola alla linea di corrente

considerando la $V = cost$ nello spazio per cui $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt}$

$$\int_0^3 \frac{\partial H}{\partial s} = \int_0^3 -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}\, ds$$

Spezziamo l'integrale nei tratti 0-1; 1-2; 2-3 perché non c'è ???!

$$\underbrace{\cancel{\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s} ds}}_{0} + \int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds + \int_2^3 \frac{\partial H}{\partial s} ds = -\frac{1}{g}\left\{ \underbrace{\cancel{\int_0^1 \frac{dV}{dt} ds}}_{0} + \int_1^2 \frac{dV}{dt} ds + \underbrace{\cancel{\int_2^3 \frac{dV}{dt} ds}}_{0} \right\}$$

non ci sono variazioni di velocità nel serbatoio e nel pozzo piezometrico

Quindi si ha:

$$H_3 - H_1 = -\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{dV}{dt} ds$$

→ la velocità è costante nello spazio quindi la posso portare fuori dall'integrale

$$H_3 - \underbrace{\cancel{H_1}}_{0} = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} \cdot L$$

con $H_3 = Z_{max}$ che indichiamo con z generica

$$\to H_1 = \underbrace{\cancel{z} + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}}}_{\text{si semplificano}} + \cancel{\frac{V^2}{2g}}^{\,0} = 0$$

$$z = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} \cdot L$$

$$\boxed{z + \frac{1}{g}\frac{dV}{dt} \cdot L = 0} \Rightarrow \text{equazione del moto}$$

L'equazione del moto più l'equazione di continuità ci permettono di calcolare la variazione dell'altezza nel tempo e la variazione di velocità.

Ci costruiamo un sistema in cui abbiamo due equazioni in due incognite (z, V) che possiamo risolvere per sostituzione;

Quindi:

$$\begin{cases} (1)\quad z + \dfrac{1}{g}\dfrac{dV}{dt} \cdot L = 0 & \to \text{equazione del moto} \\ (2)\quad \Omega_G \cdot V = \Omega_P \cdot \dfrac{dz}{dt} & \to \text{equazione di continuità} \end{cases}$$

V = velocità di moto vario

Ω_G = sezione della galleria (area)

Ω_P = sezione del pozzo piez. (area)

Dalla (2) ricavo la velocità → $V = \dfrac{\Omega_P}{\Omega_G} \cdot \dfrac{dz}{dt}$

Sostituisco il valore ottenuto nella (1)

$$z + \frac{1}{g}\frac{\Omega_P}{\Omega_G} \cdot L \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad \to \text{equazione differenziale di secondo grado.}$$

INTEGRANDO SI HA:

$$Z = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (3)$$

con A, B COSTANTI DI INTEGRAZIONE

ω = FREQUENZA DI OSCILLAZIONE

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\cdot\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}$$

IMPONIAMO LE CONDIZIONI AL CONTORNO PER TROVARE LE COSTANTI DI INTEGRAZIONE

$t=0$ → ISTANTE INIZIALE (È COME SE CI TROVIAMO IN CONDIZ. DI MOTO PERMANENTE) → $Z=0$ PERCHÉ L'OSCILLAZIONE NEL POZZO PIEZOMETRICO È NULLA

QUINDI → $V = V_0$

↓ VELOCITÀ DI MOTO PERMANENTE

SOSTITUIAMO E TROVIAMO LA 1ª COST. DI INTEGRAZIONE

$$0 = A\,\overset{0}{\cancel{\sin 0°}} + B\,\overset{1}{\cos 0°} \Rightarrow B=0$$

TROVO CHE: $Z = A\sin(\omega t)$

RIPRENDO LA (2) E SOSTITUISCO LA Z E LA $V=V_0$ PER TROVARE LA 2ª COST. DI INTEG.

$$\Omega_G V_0 = \Omega_P \left(\frac{d(A\sin(\omega t))}{dt}\right)_{t=0}$$ ← EQ. DI CONTINUITÀ IN $t=0$

FACCIAMO LA DERIVATA DELLA FUNZIONE seno di ωt:

$$\Omega_G V_0 = \Omega_P A\omega\cos(\omega t)_{t=0}$$

IN $t=0$ $\cos 0° = 1$ PER CUI:

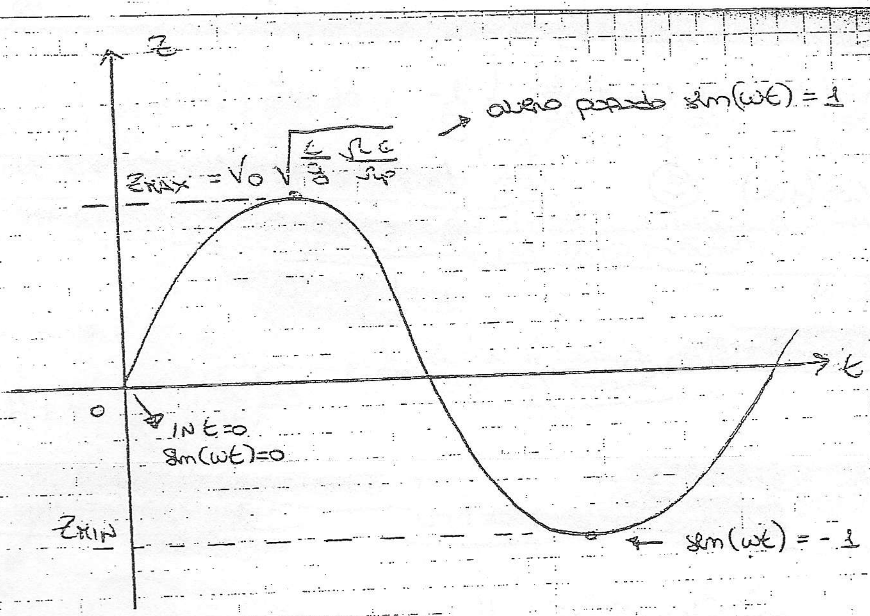
PORTO DENTRO

$$A = \frac{\Omega_G}{\Omega_P}\frac{V_0}{\omega} = V_0\frac{\Omega_G}{\Omega_P}\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_P}{\Omega_G}} \Rightarrow A = V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}$$

SOSTITUISCO I VALORI DI A E B NELLA (3) E HO:

$$\boxed{Z = V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}\cdot\sin(\omega t)}$$

DIAGRAMMANDO QUESTA RELAZIONE →



PER CUI $\boxed{z_{MAX} = V_0\sqrt{\frac{L}{g}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}}$

NOI DOBBIAMO DIMENSIONARE NON SOLO L'ALTEZZA (PER CUI CI SERVE CONOSCERE LA MASSIMA ESCURSIONE) MA ANCHE LA SEZIONE DEL POZZO; DALLA RELAZIONE SOPRA NOTIAMO CHE LA z E L'Ω_P SONO INVERSAMENTE PROPORZIONALI MA NON BASTA SCEGLIERE Ω_P IN FUNZIONE DELLA z_{MAX} CHE OTTENIAMO DI CONSEGUENZA; È NECESSARIO TENERE CONTO DEL PERIODO DI OSCILLAZIONE T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}\frac{\Omega_G}{\Omega_P}}} = \boxed{2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}\cdot\frac{\Omega_P}{\Omega_G}}}$$

SE FACCIAMO IL POZZO DI OSCILLAZIONE PIÙ GRANDE LA z_{MAX} DIMINUISCE MA DI CONTRO AUMENTA IL PERIODO DI OSCILLAZIONE; DOBBIAMO TROVARE UN COMPROMESSO PERCHÈ NOI VOGLIAMO CHE LA SITUAZIONE DI SFORZI SOSTATO E CHE QUINDI LE OSCILLAZIONI SIANO VELOCI E QUINDI IL PERIODO È PICCOLO OVVERO ESCURSIONI CONTENUTE (z_{MAX}) E TRANSITORI BREVI.

LEZIONE N° 8

BATTENTE = PARTE SPESSORE DELLA LUCE

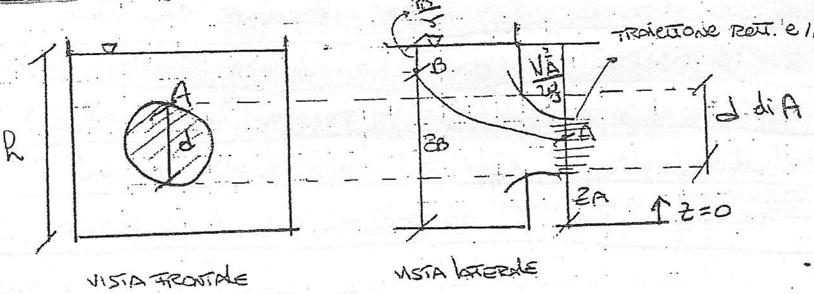
24/03/2011

Gli STRAMAZZI sono dei dispositivi che servono a misurare le portate, quindi si parla di ~~efflusso attraverso una luce libera~~.

LUCI → A BATTENTE → tutto il contorno della luce è al di sotto del pelo libero

LUCI → A STRAMAZZO → solo la parte inferiore della luce è al di sotto del pelo libero. (vengono definite anche luci a battente nullo)

STRAMAZZO A LUCE BATTENTE



È possibile calcolare la portata che ~~effluisce attraverso la luce di area A e diametro d;~~

localmente i filetti fluidi sono rettilinei e paralleli per avere una distrib. delle pressioni di tipo idrostatico, altrimenti interviene l'accelerazione centripeta

Possiamo applicare BERNOULLI da 1 punto B lontano dalla luce e un punto A dove le traiettorie sono sensibilmente rettilinee e parallele (nella sezione contratta)

altrimenti non si ha la distr. idrostatica delle velocità perché interviene l'accel. centripeta

$$\frac{V_A^2}{2g} + z_A = z_B + \frac{p_B}{\gamma} = H$$

PER CUI:

$$V_A = \sqrt{(H - z_A)2g} \rightarrow \text{velocità di TORRICELLI}$$

la velocità che effluisce dalla luce va moltiplicata per un coefficiente perchè in realtà ci sono delle perdite

$$V = C_V \sqrt{2g(H - z_A)} \quad \text{con} \quad C_V = 0{,}97 \rightarrow \text{coeff. di velocità}$$

$$C_V = \frac{V_{\text{effettiva}}}{V_{\text{torricelliana}}}$$

Nota la V mi posso calcolare la portata considerando l'area della sezione contratta

$$Q = A_C \cdot V = A \cdot C_C \cdot C_V \sqrt{2g(H - z_A)} \qquad C_C = \text{coeff. di contrazione}$$

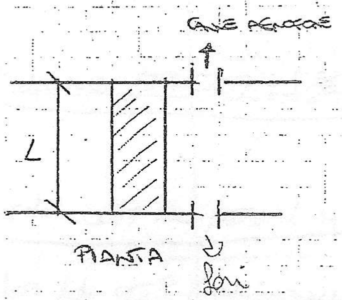
POSSO SCRIVERE:

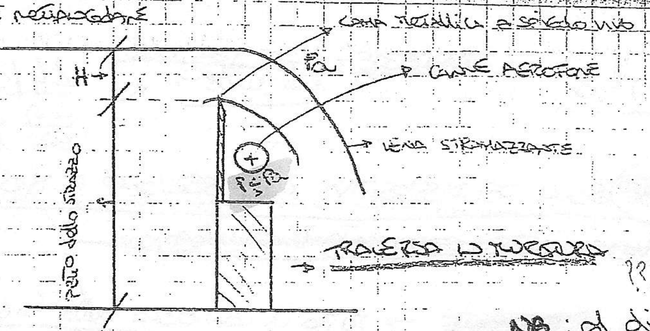
$$\boxed{Q = \mu A \sqrt{2g(H - z_A)}}$$

con $\mu = C_C \cdot C_V = 0{,}64$ → coeff. di efflusso

PAG. 438

STRAMAZZO BAZIN





Abbassam. sup. libera dovuto all'aumento delle velocità

* ABBASS. SUP. LIBERA DOVUTA ALL'AUMENTO DELLE VELOCITÀ

H = CARICO DELLO STRAMAZZO A SUPP. DISTANZA È SENTITO L'EFFETTO DELLA ?? CURVATURA DI SBOCCO*

NB: AL DI SOTTO DELLA VENA STRAMAZZANTE CI DEVE ESSERE LA P_a.

[È NECESSARIO METTERE LE CANNE AEROFORE NELLO STRAMAZZO BAZIN PERCHÉ SENZA DI QUESTI FORI PER PICCOLI VALORI DI H AVREMMO UNA MISURAZIONE DELLA PORTATA FALSATA PERCHÉ LA VENA STRAMAZZANTE ANDREBBE AD ADERIRE ALLA LAMINA IN QUANTO NELLA PARTE SUPERIORE HO LA PRESSIONE ATMOSFERICA MENTRE NELLA PARTE INFERIORE MAN MANO CHE L'H_2O TRASCINA CON SÉ L'ARIA SI PASSERÀ DA UNA $P \geq P_a$ AD UNA $P < P_a$; PER CUI LA PARTE INFERIORE SARÀ DEPRESSA E SI PORTA VERSO LA LAMINA (VENA DEPRESSA) E ADDIRITTURA PER PICCOLISSIMI VALORI DI H LA VENA PUÒ ADERIRE ALLA LAMINA (VENA ADERENTE); PER CUI ANDREMO A MISURARE UNA PORTATA CHE NON È QUELLA REALE]

LA PORTATA È LEGATA AL CARICO DELLO STRAMAZZO

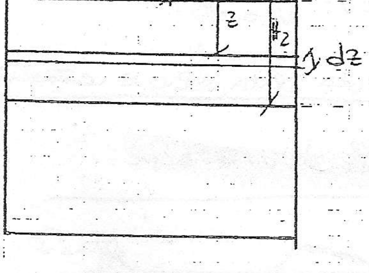
EQ. STRAMAZZO

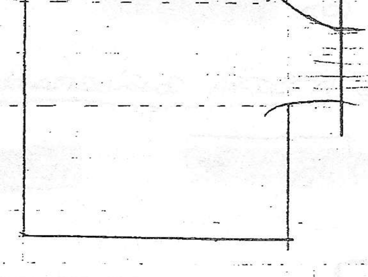
$$Q = Q(H)$$

NEL CASO DI LUCE BATTENTE SI APPLICA BERNOULLI, IN QUESTO CASO NON ESISTE UNA SEZIONE IN CUI LE TRAIETTORIE SONO RETTILINEE E PARALLELE PER CUI NON POSSIAMO APPLICARE BERNOULLI. PER CALCOLARE LA PORTATA SI È OTTENUTA SPERIMENTALMENTE, IN LABORATORIO, LA LEGGE:

$$\boxed{Q = \mu_s L H \sqrt{2gH}} \qquad \text{con } \mu_s = 0{,}42$$

COME POSSIAMO GIUSTIFICARE ANALITICAMENTE QUANTO RICAVATO PER VIA SPERIMENTALE? ATTRAVERSO BERNOULLI, CONSIDERIAMO UNA LUCE BATTENTE DI FORMA RETTANGOLARE:





(dz È IN CORRISPONDENZA DELLA SEZIONE CONTRATTA DOVE LE TRAIETTORIE SONO

RETTILINEE E PARALLELE QUINDI POSSIAMO APPLICARE BERNOULLI E CALCOLARE LA PORTATA CHE EFFLUISCE ATTRAVERSO LA STRISCIOLINA dz).

30

$$dQ = \mu \underbrace{L\,dz}_{\text{AREA INFINITESIMA}} \sqrt{2g\underset{\text{CARICO DELLA STRISCIOLINA}}{\underset{\downarrow}{z}}}$$

INTEGRANDO DA H_1 A H_2 HO:

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu L \sqrt{2gz}\, dz = \mu L \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} z^{\frac{1}{2}} dz = \mu L \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_{H_1}^{H_2}$$

QUINDI:

$$Q = \mu L \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} \left(H_2^{\frac{3}{2}} - \cancel{H_1^{\frac{3}{2}}} \right) \to 0$$

* PERCHÉ SE $H_1 \to 0$ LA LUCE BATTENTE SI TRASFORMA IN UNA LUCE A STRAMAZZO

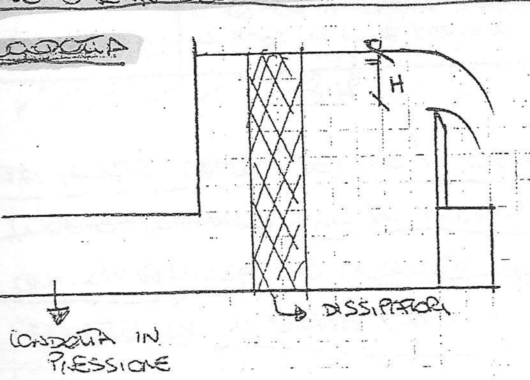
PER CUI:

$$Q = \mu L \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} \cdot H_2^{\frac{3}{2}}$$ CHE SI PUÒ ANCHE SCRIVERE:

$$Q = \left(\frac{2}{3} \cdot \mu\right) \cdot L H \sqrt{2gH} = \mu_s L H \sqrt{2gH}$$ ← QUELLO CHE ABBIAMO TROVATO SPERIMENTALMENTE)

$\mu_s = 0{,}42$

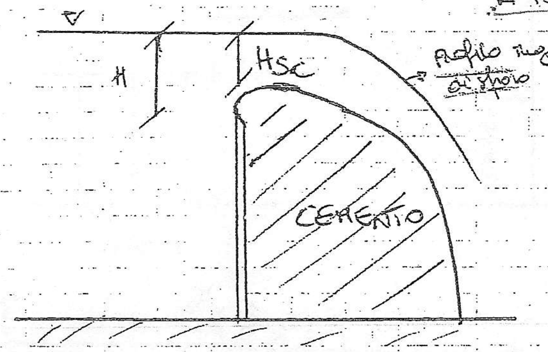
[LO STRAMAZZO BAZIN PUÒ ESSERE UTILIZZATO PER MISURARE LA PORTATA IN UNA CONDOTTA



• IL PELO LIBERO NON DEVE ESSERE PERTURBATO AFFINCHÉ LO STRAMAZZO BAZIN FUNZIONI BENE; IN PRATICA IN PROSSIMITÀ DEL PELO LIBERO L'ACQUA DEVE ESSERE QUASI FERMA; PER QUESTO SI INSERISCONO DEI DISSIPATORI (AD ESEMPIO UN MATERASSINO FORMATO DA UNA RETE METALLICA) CHE HANNO LA FUNZIONE DI RALLENTARE IL FLUSSO D'ACQUA.

[È MOLTO DELICATO E IN GENERE VIENE UTILIZZATO IN LABORATORIO]

STRAMAZZO CREAGER → si utilizza per le dighe (ad esempio per misurare la portata che effluisce da una diga)



- Funziona come lo stramazzo Bazin con la differenza che sotto la vena stramazzante viene riempito di cemento al fine di renderlo più resistente (meno delicato)

Questa volta però non andremo a misurare la H (come nello stramazzo Bazin) ma la quantità Hsc che sarà più piccola;

[la vena stramazzante si appoggia alla cresta di cemento] → GETTATA

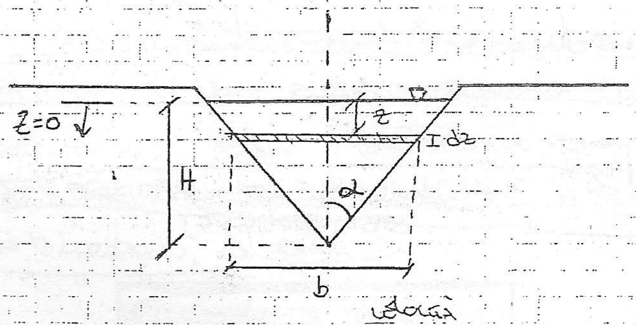
per cui:

$$Q = \mu_{sc} \cdot L \cdot H_{sc} \sqrt{2g H_{sc}}$$

con $\mu_{sc} = 0{,}47$ → ricavato per via sperimentale
$0{,}52$?

$H_{sc} = 0{,}88\,H$ → tiene conto della contrazione per cui la superficie inferiore della vena si alza di $0{,}12\,H$

STRAMAZZO TRIANGOLARE → (triangolo isoscele)



- Per il calcolo della portata consideriamo una striscia di area infinitesima di altezza dz a cui sarà associata una portata infinitesima dQ;

$$dQ = \mu \cdot \underbrace{b \cdot dz}_{\text{area infinitesima}} \cdot \overbrace{\sqrt{2g \cdot z}}^{\text{velocità}}$$

con $b = 2(H-z)\,tg\,\alpha$ → perché è diviso in 2 il triangolo di partenza

Integrando si ha:

$$Q = \int_0^H \mu\, 2(H-z)\, tg\alpha \sqrt{2gz} \cdot dz$$

$$Q = \underbrace{2\,tg\alpha\, \mu \sqrt{2g}}_{\text{costante}} \int_0^H (H-z) \cdot z^{\frac{1}{2}}\, dz$$

$$Q = \text{cost} \left[\int_0^H H \cdot z^{\frac{1}{2}} dz - \int_0^H z \cdot z^{\frac{1}{2}} dz \right]$$

$$Q = cost \left\{ \left[H \cdot \frac{2}{3} z^{\overset{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}}} \right]_0^H - \left[\frac{2}{5} z^{\overset{\frac{1}{2}+1+1}{\frac{5}{2}}} \right]_0^H \right\}$$

$$Q = cost \left\{ \frac{2}{3} H^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} H^{\frac{5}{2}} \right\} = cost \cdot \frac{4}{15} H^{\frac{5}{2}}$$

$$H^{\frac{5}{2}} = H^2 \cdot H^{\frac{1}{2}}$$

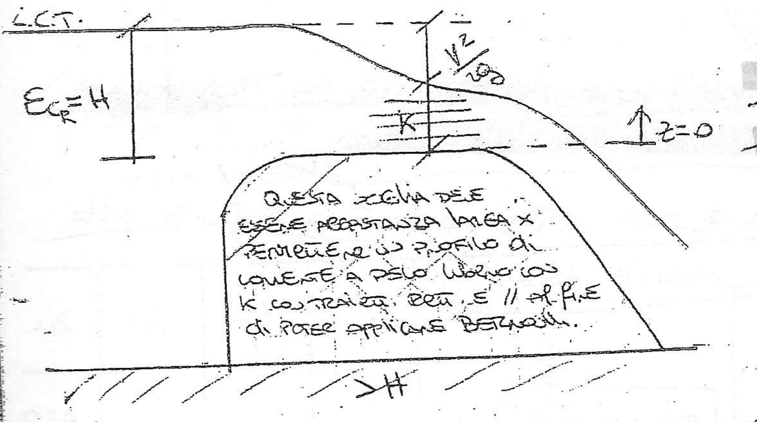
ovvero:

$$\boxed{Q = \frac{8}{15} \mu \, tg\alpha \cdot H^2 \sqrt{2gH}} \qquad con \ \mu = 0{,}6$$

Gli stramazzi triangolari sono molto usati perché sono parecchio precisi perché fanno corrispondere delle H abbastanza grandi anche se transitano portate piccole.

Se $\alpha = 45°$ $\longrightarrow$ $\boxed{Q = \frac{8}{15} \mu H^2 \sqrt{2gH}}$ $\rightarrow$ stramazzo di Thompson

Stramazzo a larga soglia (abbastanza largo da la vena si adagi ad esso e possa essere considerata una corrente a pelo libero)



- Consideriamo una corrente (in un canale) che incontra uno ostacolo e che abbia una altezza più piccola dell'ostacolo stesso. Le correnti a pelo libero hanno la capacità di modificare la propria energia: quando la corrente incontra questo ostacolo è costretta a rallentare, però da monte arriva sempre la stessa portata Q per cui le correnti a pelo libero aumentano la propria altezza rigurgitando (salendo di livello) quindi rallenta ed acquista energia potenziale, così tanto che gli permette di superare l'ostacolo.

$H = z + p/\gamma + V^2/2g$ al livello energetico:

$$H = E = \underset{\substack{\downarrow \\ h}}{E_p} + \underset{\substack{\downarrow \\ V^2/2g}}{E_{cin}} \qquad con \ h = z + p/\gamma$$

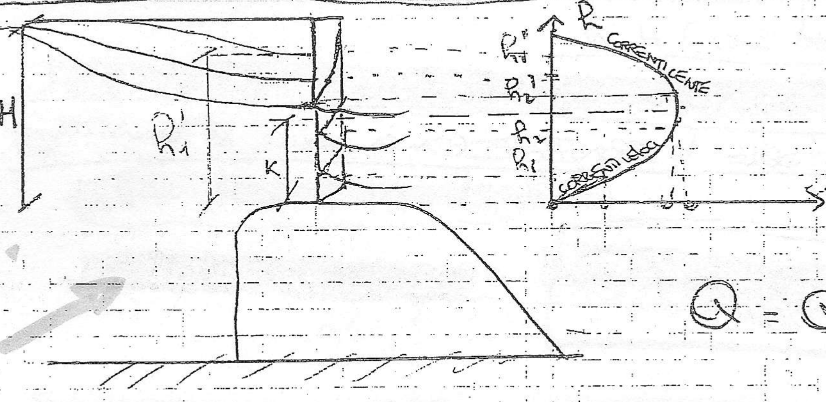
l'altezza che serve alla corrente per superare l'ostacolo è k in cui si ha lo stato critico e in cui le traiettorie sono rettilinee e parallele

$$E_{cr} = k + \frac{V_{cr}^2}{2g}$$

E_{cr} = energia critica

k = altezza critica

- In k corrisponde la minima energia e la massima portata; andiamo a vedere come mai avviene quanto appena detto: inseriamo una paratia mobile e misuriamo, variando l'apertura, di volta in volta, la portata:



— tutta chiusa la paratia

— tutta aperta "

NB: perdite nulle

IMP.

$$Q = Q(H)$$

La portata è in funzione dell'apertura della luce per cui modificando l'apertura si creano differenti profili sia a monte che a valle (quelli con lo stesso colore rappresentano i profili di corrente a pelo libero di monte e di valle x la stessa apertura).

Esisterà un unico punto k (critico) dove $h_n \equiv h_m'$ per cui per questa altezza critica corrisponderà il valore max della portata.

Per vedere dove è il max della portata dobbiamo fare la derivata della portata rispetto ad h e porla uguale a zero:

$$H = h + \frac{V^2}{2g} \rightarrow \text{Bernoulli}$$

da Bernoulli calcolo la $V = \sqrt{2g(H-h)}$

Quindi: $Q = A\sqrt{2g(H-h)}$

$$\boxed{\frac{dQ}{dh} = 0} \longrightarrow \text{così troviamo il valore di } h = k \times \text{cui } Q = Q_{max}$$

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{dA}{dh}\sqrt{2g(H-h)} - \frac{A\,2g}{\sqrt{2g(H-h)}} = 0$$ → moltiplico tutto per $\sqrt{2g(H-h)}$ ⇒

variazione infinitesima dell'area dovuta all'incremento infinitesimo di h

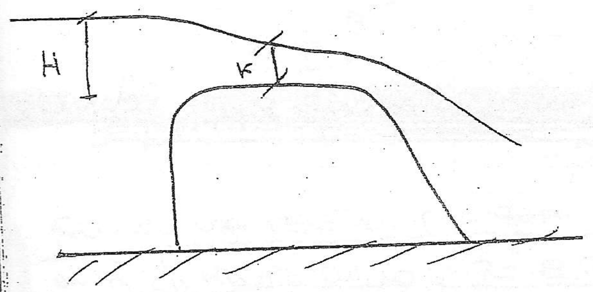
$$\frac{dQ}{dh} = b\,2\cancel{g}(H-h) - \frac{1}{\cancel{2}} A \cdot \cancel{2g} = 0$$

ovvero:

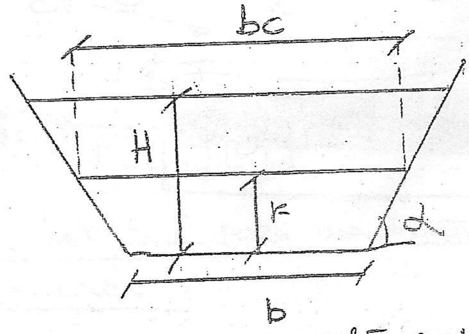
$$2bH - 2bh - A = 0$$

$$\begin{cases} H = \left(h + \dfrac{A}{2b}\right)_{h=k} \leftarrow \text{allo stato critico} \\ \text{quindi la portata allo stato critico} \\ Q = A_{crit} \cdot \sqrt{2g(H-k)} \end{cases}$$

Queste due espressioni ci servono per legare il valore della portata Q al valore di h letto nella soglia, ovvero per costruire la scala delle portate.



vista laterale

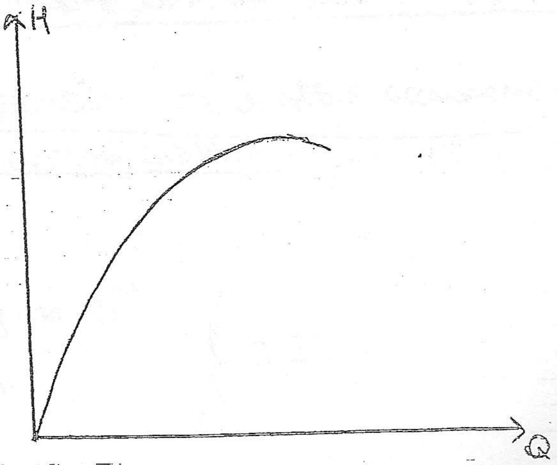


vista frontale canale di forma trapezia

k	bc	Ac	H	Q
0,25	--	--	--	--
0,5	--	--	--	--
0,75	--	--	--	--

↓

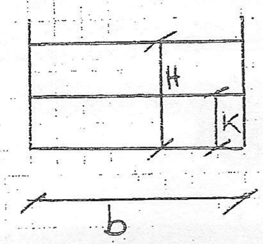
il passo di k lo impostiamo noi e ci ricaviamo di conseguenza tutti gli altri valori e diagrammiamo $Q = Q(H)$



↓

scala delle portate ricavata per punti

SE IL CANALE È DI FORMA RETTANGOLARE:



$A_c = b \times k$ con $b = b_c$

$H = k + \frac{\cancel{b}\cdot k}{2\cancel{b}} = \frac{3}{2}k$ ← ENERGIA DELLO STATO CRITICO

x cui $k = \frac{2}{3}H$

LA PORTATA DIVENTA:

$$Q = \underbrace{b\cdot k}_{A_c}\sqrt{2g(H-k)} = b\cdot\frac{2}{3}H\sqrt{2g\left(H-\frac{2}{3}H\right)}$$

$$Q = b\cdot\frac{2}{3}H\sqrt{2g\frac{H}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot b\cdot H\sqrt{2gH}$$

$$\boxed{Q = 0.385\cdot b\cdot H\sqrt{2gH}}$$ → STRAMAZZO RETTANGOLARE O STR. BÉLANGER