LEZIONE N° 9 — 28/03/2011

ANALISI DIMENSIONALE E TEORIA DELLE SIMILITUDINI

La teoria dei modelli è una disciplina dovuta al fatto che la fluido dinamica e i fenomeni che la caratterizzano sono molto complessi per cui spesso ci si avvale di ricerche sperimentali quando non si riesca a procedere per via teorica (analitica) le leggi che governano, appunto, la fluido dinamica.
Per cui si procede per via sperimentale effettuando delle prove su modelli a scala ridotta ed estendere i risultati dal modello al prototipo ovvero trovare delle leggi di valenza generale. La teoria dei modelli si compone di due pilastri: 1) analisi dimensionale; 2) teoria delle similitudini.

1) ANALISI DIMENSIONALE

GRANDEZZE FONDAMENTALI

S.I. — S.T.

$[M][L][T]$ — $[F][L][T]$

Non è la portata ma chiama così una grandezza generica

Quindi una generica grandezza Q_i nel S.I. avrà una determinata unità di misura ovvero si può esprimere come:

$$[Q_i] = [kg^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot s^{\gamma}]$$

dove α, β, γ sono le dimensioni della nostra grandezza rispetto alla massa, alla lunghezza e al tempo.
Per cui a partire da un sistema di riferimento tutte le altre grandezze sono funzione delle grandezze fondamentali del sistema scelto.

Ad esempio:

$$P = \frac{F}{A} \quad \text{con} \quad \left.\begin{array}{l}[F] = kg \cdot m \cdot s^{-2} \\ [A] = m^2\end{array}\right\} \text{S.I.}$$

$$[P] = kg \cdot s^{-2} \cdot m^{-1}$$

ovvero: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$ → Non è −2 ??

CONSIDERIAMO ADESSO DELLE GENERICHE GRANDEZZE DERIVATE:

$$[Q_1] = Kg^{\alpha_1} \cdot m^{\beta_1} \cdot s^{\gamma_1}$$

$$[Q_2] = Kg^{\alpha_2} \cdot m^{\beta_2} \cdot s^{\gamma_2}$$

$$[Q_3] = Kg^{\alpha_3} \cdot m^{\beta_3} \cdot s^{\gamma_3}$$

È POSSIBILE CONSIDERARE QUESTA TERNA DI GRANDEZZE DERIVATE (DA QUELLE FONDAMENTALI DEL S.I.) COME FONDAMENTALI E CONSIDERARE TUTTE LE ALTRE GRANDEZZE DERIVATE DA QUESTE ULTIME?

SI! SE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE FORMATA DAGLI ESPONENTI È DIVERSO DA ZERO $\Rightarrow$

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

POSSO QUINDI PRENDERE $[Q_1][Q_2][Q_3]$ COME GRANDEZZE FONDAMENTALI ED ESPRIMERE LA $[M][L][T]$ ATTRAVERSO DI ESSE, PER CUI DIVENTANO GRANDEZZE DERIVATE; PERTANTO SE $[Q_1][Q_2][Q_3]$ SONO GRANDEZZE FONDAMENTALI IL LORO PRODOTTO ELEVATO A DEI COEFFICIENTI SARÀ DIVERSO DA UN NUMERO PURO OVVERO:

cioè il prodotto non è adimensionale

$$Q_1^p \cdot Q_2^q \cdot Q_3^r \neq \text{NUMERO PURO}$$

→ SE $p=q=r=0$ → NUMERO PURO

→ SE $p \neq q \neq r \neq 0$ → PRODOTTO DIMENSIONALE ?

CON Q_1, Q_2, Q_3 GRANDEZZE DIMENSIONALMENTE INDIPENDENTI

CONSIDERIAMO 3 GRANDEZZE NEL S.I.

- DENSITÀ $[\rho] = [Kg \cdot m^{-3}] = [kg^1 \cdot m^{-3} \cdot s^0]$
- VELOCITÀ $[V] = [m \cdot s^{-1}] = [kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-1}]$
- DIMENS. DIAMETRO $[D] = [m] = [kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0]$

PER VEDERE SE POSSIAMO CONSIDERARE ρ, V, D COME GRANDEZZE FONDAMENTALI DOBBIAMO VERIFICARE CHE $\det \neq 0$

$$\det\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ $\longrightarrow$ POSSO PRENDERE ρ, V, D COME FONDAMENTALI

PER CUI $\rho^p \cdot V^q \cdot D^r \neq$ NUMERO PURO $\forall\, p, q, r \;\exists'\; p \neq q \neq r \neq 0$??? PERCHÉ DIVUNQUE NUMERO ELEVATO O DA 1 CHE È UN NUMERO PURO.

ESEMPIO:

VISCOSITÀ DINAMICA μ

$$S.I.\ [\mu] = [Kg\ m^{-1} \cdot s^{-1}]$$

CONSIDERANDO LE NUOVE GRANDEZZE FONDAMENTALI SI HA:

$$[\mu] = [\rho^a \cdot V^b \cdot D^c]$$

STABILIAMO ADESSO QUANTO VALGONO a, b, c:

$$Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = [kg \cdot m^{-3}]^a \cdot [m\, s^{-1}]^b [m]^c$$

$$\begin{aligned} 1 Kg^1 &= 1 Kg^a \Rightarrow 1 = a \\ m^{-1} &= m^{-3a} + m^{+b} + m^c \Rightarrow -1 = -3a + b + c \\ s^{-1} &= s^{-b} \Rightarrow -1 = -b \end{aligned} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Quindi $\mu = [\rho V D] = Kg\, m^{-3} s^{-1}\, m \cdot m = Kg\, m^{-1} s^{-1}$

TEOREMA Π o di BUCKINGHAM

IMMAGINIAMO di OSSERVARE UN FENOMENO FISICO IN CUI UNA CERTA GRANDEZZA È FUNZIONE di ALTRE GRANDEZZE, OVVERO:

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$$

IMMAGINIAMO di ASSUMERE LE PRIME 3 (Q_1, Q_2, Q_3) COME GRANDEZZE FONDAMENTALI (OVVIAMENTE VA SEMPRE VERIFICATO che il $\det \neq 0$) E di ESPRIMERE TUTTO IN FUNZIONE di QUEST'ULTIME.

POSSO SCRIVERE:

$$y = f\left(Q_1, Q_2, Q_3, \frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4} \cdot Q_2^{\beta_4} \cdot Q_3^{\gamma_4}} \cdot Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}, \frac{Q_5}{Q_1^{\alpha_5} \cdot Q_2^{\beta_5} \cdot Q_3^{\gamma_5}} \cdot Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}\right)$$

BISOGNA CALCOLARE $\alpha_4, \alpha_5, \beta_4, \beta_5, \gamma_4, \gamma_5$ AFFINCHÉ QUESTI RAPPORTI SIANO NUMERI PURI, CIOÈ IL RAPPORTO SIA ADIMENSIONALE ($Q_1^{\alpha_4} \cdot Q_2^{\beta_4} \cdot Q_3^{\gamma_4}$ ABBIA LE STESSE DIMENSIONI di Q_4).

SE INDICO CON N_4, N_5 I NUMERI PURI (ADIMENSIONALI) POSSO SCRIVERE:

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4 \cdot \underbrace{Q_1^{\alpha_4} Q_2^{\beta_4} Q_3^{\gamma_4}}; N_5 \cdot \underbrace{Q_1^{\alpha_5} Q_2^{\beta_5} Q_3^{\gamma_5}})$$

LA DIPENDENZA DA Q_1, Q_2, Q_3 C'È GIÀ QUINDI POSSO SCRIVERE:

$$y = f(Q_1, Q_2, Q_3, \underbrace{N_4, N_5}_{\text{DUE NUMERI PURI}})$$

LA STESSA COSA LA POSSIAMO FARE PER IL PRIMO MEMBRO:

$$\frac{y}{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}} \cdot Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y} = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

CI RICAVIAMO $\alpha_y, \beta_y, \gamma_y$ AFFINCHÉ IL RAPPORTO SIA UN NUMERO PURO CHE CHIAMO N_y; POSSO SCRIVERE QUINDI:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{NUMERO PURO}}}{N_y} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{NUMERO DIMENSIONALE}}}{\underbrace{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}}}{}^{*} = f(Q_1, Q_2, Q_3, N_4, N_5)$$

IL SECONDO MEMBRO DEVE AVERE LE STESSE DIMENSIONI DEL PRIMO OVVERO DEVE DIPENDERE DAL PRODOTTO * E IN PIÙ DEVE ESSERE FUNZIONE DEI DUE NUMERI PURI N_4, N_5; QUINDI POSSO SCRIVERE:

$$N_y \cdot \cancel{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}} = \cancel{Q_1^{\alpha_y} \cdot Q_2^{\beta_y} \cdot Q_3^{\gamma_y}} \, f(N_4, N_5)$$

SI SEMPLIFICA PERCHÉ SONO UGUALI.

UNA FUNZIONE NUOVA $\neq$ DA f DI SOPRA

INFINE RESTA:

$$N_y = \varphi(N_4, N_5) \quad (1)$$

IMPORTANZA TEOREMA Π: INIZIALMENTE OSSERVANDO UN FENOMENO FISICO NOTIAMO CHE UNA GRANDEZZA È FUNZIONE DI ALTRE GRANDEZZE. IN PARTICOLARE NEL NOSTRO CASO LA GRANDEZZA y ERA FUNZIONE DI ALTRE 5 GRANDEZZE DIMENSIONALI; ALLA FINE ABBIAMO OTTENUTO LA (1) COME RISULTATO;

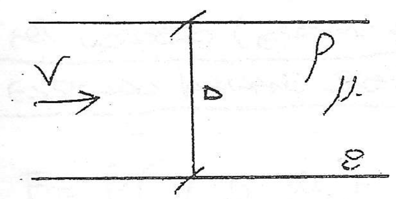
VANTAGGI: 1) CI SIAMO SVINCOLATI DALLE UNITÀ DI MISURA OTTENENDO UNA RELAZIONE TRA NUMERI PURI;

2) NON CI DOBBIAMO PREOCCUPARE PIÙ DEL SISTEMA DI MISURA ADOTTATO PERCHÉ LAVORIAMO CON NUMERI ADIMENSIONALI;

3) IL NUMERO DELLE GRANDEZZE È DIMINUITO;

DATE m GRANDEZZE E n NUMERO DI GRANDEZZE FONDAMENTALI IL TEOREMA Π CI DICE CHE ABBIAMO UN LEGAME TRA $(m-n)$ NUMERI PURI; PER CUI SIAMO PARTITI DA 6 GRANDEZZE, 3 ERANO FONDAMENTALI QUINDI HO UN LEGAME TRA 3 NUMERI PURI $(6-3=3)$.

ESEMPIO N°1



CONSIDERIAMO UN TUBO DENTRO IL QUALE SCORRE UN FLUIDO CON UNA CERTA VELOCITÀ

F = FORZA RESISTENTE DEL TUBO SUL FLUIDO

QUESTA FORZA RISULTA ESSERE FUNZIONE DI ALTRE GRANDEZZE:

$$F = f(\rho, V, D, \mu, \cancel{\varepsilon})$$

TUBO LISCIO

CONSIDERIAMO ρ, V, D COME GRANDEZZE FONDAMENTALI E APPLICHIAMO IL TEOREMA Π:

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} V^{\beta} D^{\gamma}} \cdot \rho^{\alpha} V^{\beta} D^{\gamma} = f\left(\rho, V, D, \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\gamma_1}} \cdot \rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\gamma_1}\right)$$

CALCOLIAMO I COEFF. α, β, γ AFFINCHÉ $\frac{F}{\rho^{\alpha} V^{\beta} D^{\gamma}}$ SIA ADIMENSIONALE

$$[F] = [Kg \cdot m \cdot s^{-2}]$$

$$[\rho] = [Kg \cdot m^{-3}]$$

$$[V] = [m \cdot s^{-1}] \quad \Rightarrow \quad [Kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [Kg \, m^{-3}]^{\alpha} \cdot [m \cdot s^{-1}]^{\beta} \cdot [m]^{\gamma}$$

$$[D] = [m]$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 = -1\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

SOSTITUENDO OTTENIAMO:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} \cdot \rho V^2 D^2 = f\left(\rho, V, D, \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\gamma_1}} \cdot \rho^{\alpha_1} \cdot V^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}\right)$$

si adimensionalizza la μ come fatto in precedenza per la F;

CALCOLIAMO ALLO STESSO MODO $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ SAPENDO CHE $[\mu] = [Kg \, m^{-1} \cdot s^{-1}]$;

$$[Kg \, m^{-1} \cdot s^{-1}] = [Kg \cdot m^{-3}]^{\alpha_1} \cdot [m \cdot s^{-1}]^{\beta_1} \cdot [m]^{\gamma_1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

SOSTITUIAMO:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} \cdot \rho V^2 D^2 = f\left(\rho, V, D, \frac{\mu}{\rho V D} \cdot \rho V D\right)$$

LA DIPENDENZA DA ρ, V, D C'È GIÀ QUINDI POSSO NON SCRIVERE L'ULTIMO PRODOTTO:

$$\underbrace{\frac{F}{\rho V^2 D^2}}_{\text{NUMERO PURO}} \cdot \underbrace{\rho V^2 D^2}_{\text{NUMERO DIMENSIONALE (FORZA)}} = f\left(\rho, V, D, \underbrace{\frac{\mu}{\rho V D}}_{\text{NUMERO PURO CHE CHIAMO } N_1}\right)$$

IL PRIMO TERMINE HA LE DIMENSIONI DI UNA FORZA PER CUI ANCHE IL SECONDO TERMINE DEVE AVERE LE STESSE DIMENSIONI, PER CUI:

$$\underbrace{\frac{F}{\rho V^2 D^2}}_{N_F} \cdot \cancel{\rho V^2 D^2} = \cancel{\rho V^2 D^2} \, \underbrace{\varphi}_{\text{UN'ALTRA FUNZIONE}}(N_1) \quad (2) \quad \rightarrow \quad \underbrace{N_F = \varphi(N_1)}_{\text{LEGAME TRA NUMERI PURI}}$$

Riprendo la (2) e calcolo F

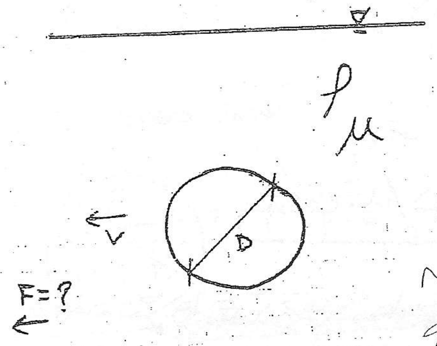
$$F = \rho V^2 D^2 \varphi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$ → forza di trascinamento o forza di drag $\left(\frac{1}{2}\rho C_d V^2 A\right)$

$\downarrow$ Re

xchè l'abbiamo invertito???

ESEMPIO N°2

Consideriamo una sfera che viaggia sotto lontana dal pelo libero con una velocità V molto piccola; vogliamo calcolare la forza F da applicare a questa sfera di diametro D per farla viaggiare con una velocità V molto piccola.



Non si considerano gli eventuali vortici

$$R = R_A(\mu) + \cancel{R_B(\rho)}$$

→ 0 → se la V è molto piccola è come se ci trovassimo in un regime laminare

R ↓ Resistenze al moto

$R_A(\mu)$ ↓ Resistenza d'attrito

$R_B(\rho)$ → Resistenza di Shields (se il moto è turbolento lo sforzo tangenziale dipende più da ρ)

nel condotto (esempio n°1) il moto è sempre turbolento, in questo caso essendo laminare scompare la dipendenza da ρ.

$$F = f(V, D, \mu)$$

Dobbiamo adesso scegliere le grandezze fondamentali: poiché in μ compare la massa abbiamo bisogno per forza di 3 grandezze, per cui, una volta verificato det ≠ 0, diventa:

$$\frac{F}{V^\alpha D^\beta \mu^\gamma} = \text{cost}$$ → 4 grandezze − 3 fondam = 1 cost

Bisogna adesso trovare α, β, γ affinché il rapporto sia adimensionale.

$$\underbrace{[Kg \cdot m \cdot s^{-2}]}_{F} = \underbrace{[m \cdot s^{-1}]}_{V}^{\alpha} \underbrace{[m]}_{D}^{\beta} \underbrace{[Kg\, m^{-1}\, s^{-1}]}_{\mu}^{\gamma}$$

$$\begin{cases} 1 = \gamma \\ 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ -2 = -\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

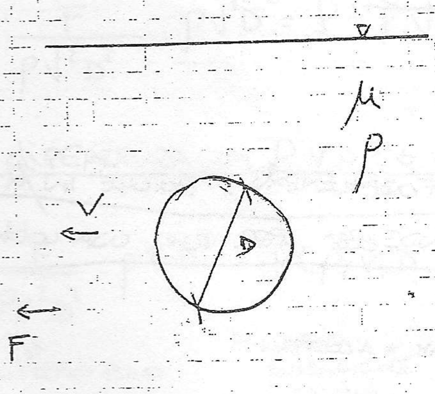
Otteniamo quindi:

$$\frac{F}{V D \mu} = cost$$

che posso anche scrivere come $\longrightarrow$ $\boxed{F = V D \mu \cdot cost}$

Una volta trovata la relazione di F prendiamo la sfera e la portiamo in laboratorio perché abbiamo bisogno di legare ciò che abbiamo ottenuto per via analitica all'analisi sperimentale per trovare una legge di validità generale; si prende la sfera e la si tira con una forza nota, $V D \mu$ le conosciamo e ci calcoliamo il valore della costante, ottenendo così la legge di validità generale

Esempio N° 3



Stessa situazione dell'esempio n° 2, la sfera di diametro D viaggia molto lontana dal pelo libero ma stavolta la velocità non è piccola quindi si ha la dipendenza da ρ, cioè la F dipende anche dalla turbolenza

$$R = R_A(\mu) + R_B(\rho)$$ $\rightarrow$ si considerano gli eventuali vortici

Quindi la forza F sarà funzione di 4 grandezze:

$$F = f(\rho, V, D, \mu)$$

ρ, V, D sono grandezze fondamentali che abbiamo già verificato

QUINDI:

$$\frac{F}{\rho^{\alpha} V^{\beta} D^{\gamma}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\gamma_1}}\right)$$

→ NUMERO PURO

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

SOSTITUENDO SI HA:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

→ Re

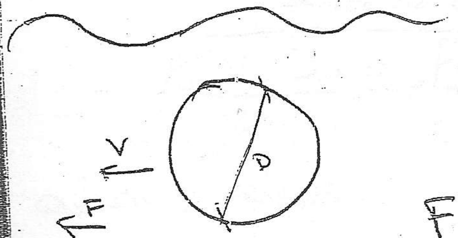
$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu}$$

→ CR = COEFF. di RESISTENZA

$$\boxed{CR = f(Re)} \quad a)$$

ESEMPIO N° 4

CONSIDERIAMO UNA SFERA di diametro D CHE VIAGGIA IN PROSSIMITÀ DEL PELO LIBERO; SI POSSONO TRASCURARE GLI EFFETTI di ATTRITO RISPETTO A QUELLI DEL MOTO ONDOSO.



$$F = f(\rho, V, D, g)$$

TURBESTO → velocità torricelliana

LE GRANDEZZE FONDAMENTALI SONO ρ, V, D

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = \varphi\left(\frac{g}{\rho^{\alpha} V^{\beta} D^{\gamma}}\right)$$

TROVIAMO α, β, γ.

$$[m \cdot s^{-2}] = [kg\, m^{-3}]^{\alpha} [m\, s^{-1}]^{\beta} [m]^{\gamma}$$

$$\begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \alpha \\ -2 = -\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Reynolds $Re = \dfrac{\rho V D}{\mu}$ $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{g \cdot D}}$ ⇒ Froud

SOSTITUENDO A HA:

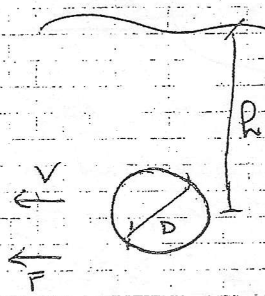
$$\underbrace{\frac{F}{\rho V^2 D^2}}_{C_R} = \varphi\left(\frac{g}{V^2 D^{-1}}\right) = \varphi\left(\frac{gD}{V^2}\right) = \psi\left(\frac{V^2}{gD}\right) = \psi\underbrace{\left(\frac{V}{\sqrt{gD}}\right)}_{\text{FROUD}}$$

UN'ALTRA FUNZIONE PERCHÉ ITO CONSIDERATO $\frac{1}{\text{NUMERO PTO}}$ CHE È ANCORA UN NUM. PURO

OTTENIAMO QUINDI:

$$\boxed{C_R = f(Fr)} \quad b)$$

ESEMPIO N° 5



• LA SFERA NON È PROPRIO PROSSIMA AL PELO LIBERO QUINDI VA CONSIDERATO SIA L'ATTRITO CHE L'AFFONDAMENTO h, QUINDI LA FORZA F RISULTA ESSERE FUNZIONE DI 6 GRANDEZZE:

$$F = f(\overset{\text{TURBOLENTO}}{\rho}, V, D, \overset{\text{RISERVATA DEL MOTO ONDOSO}}{g}, \underset{\text{ATTRITO}}{\mu}, h)$$ OTTENENDO INFINE:

$$C_r = \varphi\left(\underset{Re}{\frac{\rho V D}{\mu}}; \underset{Fr}{\frac{V}{\sqrt{gD}}}, \frac{h}{D}\right)$$ → TRASCURANDO QUESTO TERMINE

$$\boxed{C_r = \varphi(Re, Fr)} \quad e)$$

LEZIONE N° 10

29/03/2011

Similitudini

RIPRENDIAMO LE ESPRESSIONI TROVATE NELLA LEZIONE PRECEDENTE:

a) $C_r = f(Re)$ → SFERA LONTANA DAL PELO LIBERO;

b) $C_r = f(Fr)$ → SFERA IN PROSSIMITÀ DEL PELO LIBERO;

e) $C_r = f(Re, Fr)$ → SFERA NON PROPRIO IN PROSSIMITÀ DEL PELO LIBERO.

PER VEDERE ~~QUAL~~ È IL LEGAME TRA I NUMERI PURI BISOGNA ANDARE IN LABORATORIO

a) $C_r = \varphi(Re)$

$$F = \varphi(\rho, V, D, \mu)$$

infine otteniamo che il coefficiente di resistenza è funzione del numero di Reynolds.

Immaginiamo adesso di dover progettare questo corpo che viaggia ad una certa profondità, con una certa velocità, immerso in un liquido di caratteristiche note.

- il pedice zero sta per prototipo al vero;
- il pedice m sta per modello

$$C_{r0} = \varphi\left(\frac{\rho_0 V_0 D_0}{\mu_0}\right)$$

Per trovare φ ovvero il legame tra i numeri più vado in laboratorio e faccio delle prove su modelli in scala ridotta

$$C_{rm} = \varphi\left(\frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m}\right)$$

Ma il coefficiente di resistenza del prototipo deve essere uguale al coefficiente di resistenza del modello ovvero $C_{r0} = C_{rm}$ per cui posso scrivere:

$$\frac{\cancel{\rho_0} V_0 D_0}{\cancel{\mu_0}} = \frac{\cancel{\rho_m} V_m D_m}{\cancel{\mu_m}} \qquad \left.\begin{array}{l}\rho_0 = \rho_m \\ \mu_0 = \mu_m\end{array}\right\} \text{il liquido è lo stesso}$$

quindi si ottiene

$$V_0 \cdot D_0 = V_m \cdot D_m$$

$$\lambda = \text{scala delle lunghezze (del modello)} = \frac{D_m}{D_0} = \frac{V_0}{V_m}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{D_m}{D_0} = \frac{V_0}{V_m}}^{\,*} \longrightarrow \text{similitudine di Reynolds}$$

Questa relazione data la V_0 ci dice come bisogna condurre la prova sul modello, ovvero $V_m = \frac{V_0}{\lambda}$

VEDIAMO PER QUANTO RIGUARDA LE FORZE:

$$F_o = \rho_o V_o^2 D_o^2 \cdot \varphi(Re) \leftarrow \text{PROTOTIPO}$$

$$\begin{cases} \rho_o = \rho_m \leftarrow \text{il liquido è lo stesso} \\ V_o^2 = \lambda^2 V_m^2 \\ D_o = D_m / \lambda \end{cases}$$

SOSTITUISCO:

$$F_o = \rho_m \cancel{\lambda^2} V_m^2 \frac{D_m^2}{\cancel{\lambda^2}} \varphi(Re) = F_m \Rightarrow \boxed{F_o = F_m}$$

QUESTO ci dice che nella similitudine di Reynolds le forze nel prototipo sono uguali a quelle del modello

RIPRENDIAMO la ✱ con $V = \frac{\text{SPAZIO}}{\text{TEMPO}}$

$$\frac{D_m}{D_o} = \frac{V_o}{V_m} = \underbrace{\frac{D_o}{T_o}}_{V_o} \cdot \underbrace{\frac{T_m}{D_m}}_{\frac{1}{V_m}} \qquad \frac{D_m}{D_o} = \frac{D_o}{T_o} \cdot \frac{T_m}{D_m} \rightarrow T$$

$$\frac{D_m^2}{D_o^2} = T$$

DEFINIAMO T = SCALA DEI TEMPI $= \frac{T_m}{T_o}$

$$T = \frac{T_m}{T_o} = \left(\frac{D_m}{D_o}\right)^2 = \lambda^2 \Rightarrow \boxed{T = \lambda^2} \rightarrow \text{SCALA DEI TEMPI È UGUALE AL QUADRATO SCALA LUNGHEZZE.}$$

$$\boxed{b)\ Cr = \varphi(F_r)}$$

$$F = \varphi(\rho, V, D, g)$$

$$Cr_o = \varphi(Fr) = \varphi\left(\frac{V_o}{\sqrt{g D_o}}\right) \leftarrow \text{PROTOTIPO (AL VERO)}$$

$$Cr_m = \varphi(Fr) = \varphi\left(\frac{V_m}{\sqrt{g D_m}}\right) \leftarrow \text{modello}$$

PER ESEGUIRE LA PROVA SUL MODELLO $Cr_o = Cr_m$ QUINDI

$$\left(\frac{V_o}{\sqrt{\cancel{g} D_o}}\right) = \left(\frac{V_m}{\sqrt{\cancel{g} D_m}}\right)$$

ovvero:

$$\left(\frac{D_m}{D_o}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{V_m}{V_o}$$ che posso anche scrivere come:

$$\frac{D_m}{D_o} = \frac{V_m^2}{V_o^2}$$ ma $\frac{D_m}{D_o} = \lambda$ = scala delle lunghezze

quindi:

$$\boxed{\frac{D_m}{D_o} = \frac{V_m^2}{V_o^2} = \lambda}$$ ** ← similitudine di Froud

vediamo per quanto riguarda le forze:

$$F_o = \rho_o V_o^2 D_o^2 \varphi(Fr)$$ che fine fa??

$$\begin{cases} \rho_o = \rho_m \\ V_o^2 = \cancel{(\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot V_m)^2} = \cancel{\lambda V_m^2} \quad \cancel{\lambda} \quad V_o^2 = V_m^2 / \lambda \\ D_o^2 = \frac{D_m^2}{\lambda^2} \end{cases}$$

sostituendo:

$$F_o = \rho_m \cdot \frac{V_m^2}{\lambda} \cdot \frac{D_m^2}{\lambda^2} = \frac{F_m}{\lambda^3} \Rightarrow \boxed{F_o = \frac{F_m}{\lambda^3}}$$

nella similitudine di Froud le forze del modello sono molto più piccole delle forze nel prototipo.

riprendiamo la **

$$\frac{V_o}{\sqrt{g D_o}} = \frac{V_m}{\sqrt{g D_m}}$$ con $V = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}}$

$$\frac{D_o}{T_o \sqrt{g \cdot D_o}} = \frac{D_m}{T_m \cdot \sqrt{g D_m}}$$

ESSENDO $T = \frac{T_m}{T_0}$ = SCALA DEI TEMPI

$$T = \frac{T_m}{T_0} = \frac{\sqrt{D_0}}{\sqrt{D_m}} \cdot \frac{D_m}{D_0}$$

OVVERO:

$$T = \sqrt{\frac{D_0}{D_m} \cdot \frac{D_m^2}{D_0^2}} = \sqrt{\frac{D_m}{D_0}} = \sqrt{\lambda} = \lambda^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{T_1 = \lambda^{\frac{1}{2}}}$$

SCALA DEI TEMPI: LA RADICE Q. DELLA SCALA DELLA LUNGHEZZA.

$\boxed{c)\ C_r = \varphi(Re, Fr)}$

IN QUESTO CASO BISOGNA RISPETTARE SIA LA SIMILITUDINE DI Reynolds che LA SIMILITUDINE DI FROUD OVVERO:

$$\begin{cases} \frac{D_m}{D_0} = \frac{V_0}{V_m} & \leftarrow Re \\ \frac{D_m}{D_0} = \frac{V_m^2}{V_0^2} & \leftarrow Fr \end{cases} \Rightarrow$$ QUESTO È POSSIBILE SOLO SE $\boxed{\lambda = 1}$

OVVERO SOLO SE SI LAVORA IN SCALA REALE. SE NON È POSSIBILE BISOGNA VEDERE SE PREVALGONO LA VISCOSITÀ o LA TURBOLENZA (Re) O SE PREVALGONO gli EFFETTI DOVUTI ALLA TRASFORMAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE IN ENERGIA CINETICA (Fr).

SE GLI EFFETTI SONO PARAGONABILI (NESSUNO PREVALE NETTAMENTE SULL'ALTRO) DOBBIAMO TORNARE AL SISTEMA... COME LO RISOLVIAMO?

$$Re = \rho \frac{VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

- DOBBIAMO LAVORARE SUL FLUIDO OVVERO CAMBIANDO il FLUIDO (ν) POSSIAMO RISPETTARE SIA (Re) che (Fr).

Quindi:

$$\begin{cases} \frac{V_0 \cdot D_0}{\nu_0} = \frac{V_m \cdot D_m}{\nu_m} \longrightarrow (Re) \\ \frac{D_m}{D_0} = \left(\frac{V_m}{V_0}\right)^2 \longrightarrow (Fr) \end{cases}$$

ANDIAMO A RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ \dfrac{V_m \cdot D_m}{V_0 \cdot D_0} = \dfrac{\nu_m}{\nu_0} \\ \textcircled{2}\ \left(\dfrac{D_m}{D_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{V_m}{V_0} \end{cases}$$

PER CUI SI HA SOSTITUENDO LA ② NELLA ①

$$\begin{cases} \left(\dfrac{D_m}{D_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{D_m}{D_0} = \dfrac{\nu_m}{\nu_0} \\ / \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{D_m}{D_0}\right)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{\nu_m}{\nu_0} \\ / \end{cases}$$

• D_m/D_0 è la scala del modello; ν_0 lo conosciamo perché è la viscosità cinematica al vero; quindi possiamo trovare la ν_m e quindi il liquido che dobbiamo utilizzare durante la nostra prova:

$$\begin{cases} \underline{\nu_m = \lambda^{\frac{3}{2}} \cdot \nu_0} \\ / \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{D_m}{D_0} = \left(\dfrac{\nu_m}{\nu_0}\right)^{\frac{2}{3}} & \textcircled{1} \\ \left(\dfrac{D_m}{D_0}\right) = \left(\dfrac{V_m}{V_0}\right)^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

ADESSO NON CI RESTA ALTRO CHE TROVARE LA V_m:
sostituendo la ① nella ②

$$\begin{cases} / \\ \left(\dfrac{\nu_m}{\nu_0}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{V_m}{V_0}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} / \\ \underline{V_m = V_0 \left(\dfrac{\nu_m}{\nu_0}\right)^{\frac{1}{3}}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nu_m &= \lambda^{\frac{3}{2}} \nu_0 \\ V_m &= V_0 \left(\dfrac{\nu_m}{\nu_0}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}}$$

Unità di Misura conversioni

Lunghezza - Distanza		
metro	m	1 m = 0,001 km = 39,37 in = 3,28 ft = 1,09 yd
centimetro	cm	1 cm = 0,01 m = 0,3937 in = 0,0328 ft = 0,0109 yd
chilometro	km	1 km = 1000 m = 1093,61 yd = 0,5396 naut mi = 0,62137 mi
inch (pollice)	1", in	1 in = 0,0833 ft = 0,0278 yd = 2,54 cm = 0,0254 m
foot (piede)	1', ft	1 ft = 12 in = 0,333 yd = 30,48 cm = 0,3048 m
yard (iarda)	yd	1 yd = 3 ft = 36 in = 91,44 cm = 0,9144 m
miglio marino	naut mi	1 naut mi = 1,853 km = 1'853,18 m = 2'026,67 yd = 1,151 mi
miglio terrestre US	mi	1 mi = 1,609 km = 1'609,35 m = 1'760 yd = 0,868 naut mi
hand (palmo)	hand	1 hand = 4 in = 0,3332 ft = 0,111 yd = 10,16 cm = 0,1016 m
span (spanna)	span	1 span = 9 in = 0,7497 ft = 0,25 yd = 22,86 cm = 0,2286 m

Superficie		
metro quadrato	m^2	1 m^2 = 10'000 cm^2 = 0,0001 ha = 1.550 in^2 = 10,76 ft^2 = 1,196 yd^2
centimetro quadrato	cm^2	1 cm^2 = 0,0001 m^2 = 0,155 in^2 = 0,0011 ft^2 = 0,00012 yd^2
kilometro quadrato	km^2	1 km^2 = 1'000'000 m^2 = 100 ha = 0,386 mi^2 = 247,105 ac
ara	a	1a = 100 m^2 = 0,01 ha = 1'076,39 ft^2 = 119,599 yd^2 = 0,0000386 mi^2 = 0,024 ac
ettaro	ha	1 ha = 100 a = 10'000 m^2 = 0,01 km^2 = 107'639,1 ft^2 = 0,0039 mi^2 = 2,47 ac
square inch	in^2	1 in^2 = 0,00694 ft^2 = 6,4516 cm^2
square foot	ft^2	1 ft^2 = 0,092 m^2 = 144 in^2 = 0,111 yd^2
square yard	yd^2	1 yd^2 = 0,836 m^2 = 8'361,27 cm^2 = 9 ft^2 = 1'296 in^2 = 0,0002 ac
square mile	mi^2	1mi^2 = 2,59 km^2 = 259 ha = 640 ac
acre	ac	1 ac = 4'046,86 m^2 = 0,0040 km^2 = 0,40 ha = 40,47 a = 43.560 ft^2 = 4840 yd^2 = 0,00156 mi^2

Volume		
metro cubo	m^3	1 m^3 = 1'000 dm^3 = 35,3146 ft^3 = 61'023,744 in^3 = 1,308 yd^3 = 264,20 galUS = 219,97 galUK
decimetro cubo; litro	dm^3	1 dm^3 = 1 l = 0,001 m^3 = 61,024 in^3 = 0,0353 ft^3 = 0,00131 yd^3 = 0,26417 galUS = 0,21997 galUK
centimetro cubo	cm^3, cc	1 cm^3 = 0,001 dm^3 = 0,001 l = 0,061 in^3 = 0,000264 galUS = 0,00022gal UK
cubic inch	in^3	1 in^3 = 0,0000164 m^3 = 0,0164 dm^3 = 0,0005787 ft^3 = 0,0043 galUS = 0,0036 galUK
cubic foot	ft^3	1 ft^3 = 0,02832 m^3 = 28,32 dm^3 = 1'728 in^3 = 0,037 yd^3 = 7,48 galUS = 6,23 galUK
cubic yard	yd^3	1 yd^3 = 0,764 m^3 = 764,55 dm^3 = 46'656 in^3 = 27 ft^3 = 201,97 galUS = 168,18 galUK
gallon US	gal_{US}	1 galUS = 0,00378 m^3 = 3,785 dm^3 = 231 in^3 = 0,134 ft^3 = 0,0049 yd^3 = 0,833 galUK
gallon UK	gal_{UK}	1 galUK = 0,00455 m^3 = 4,546 dm^3 = 277,42 in^3 = 0,16 ft^3 = 0,0059 yd^3 = 1,2 galUS

Pressione - Forza/Superficie		
pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m^2 1 kPa = 0,01 bar = 0,1 N/cm^2 = 0,10 mH2O = 7,5 mmHg = 0,0099 atm =0,145 psi = 0,02088 lbf/ft^2 = 0,334 ftH2O
bar	bar	1 bar = 100'000 Pa = 100 kPa = 1,0197 kg/cm^2 = 10,198 mH2O = 750 mmHg = 0,987 atm = 14,5 psi = 33,455 ftH2O
millibar	mbar	1 mbar = 100 Pa = 0,010 mH2O = 0,750 mmHg = 0,00102 kg/cm^2 = 0,0145 psi = 2,088 ldf/ft^2 = 0,033 ftH2O
millimetri di mercurio	mm_{Hg}	1 mmHg = 133,322 Pa = 0,133 kPa = 0,00133 bar = 0,0136 mH2O = 0,00131 atm = 0,00136 kg/cm^2 = 0,01934 psi = 2,78 ldf/ft^2 = 0,045 ftH2O