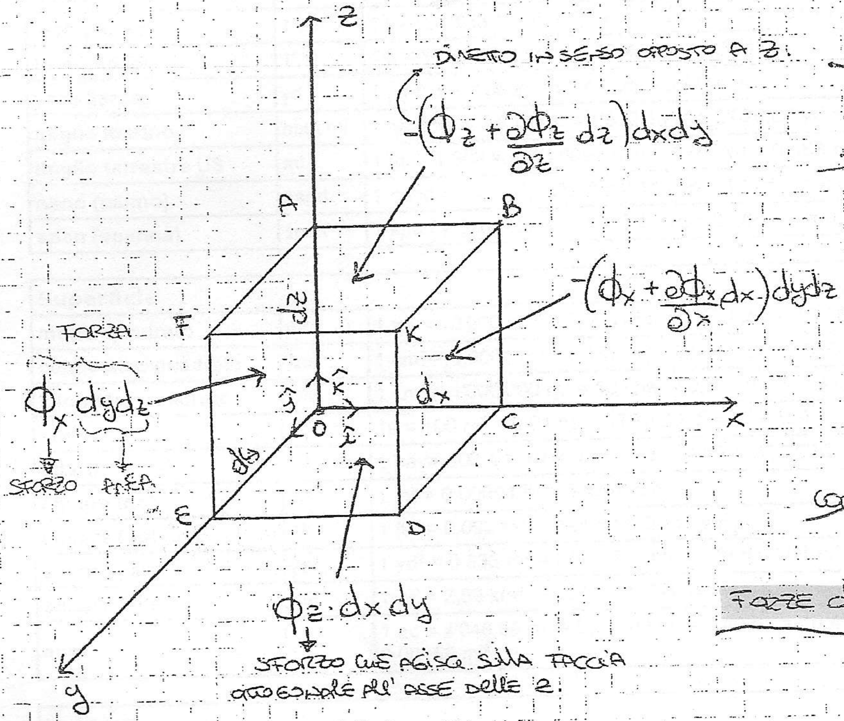
LEZIONE N° 11 — 31/03/2011

I Fluidi Reali

Ricaviamo l'equazione del moto dei fluidi reali esplicitando gli sforzi;
Consideriamo un volumetto infinitesimo il cui vertice nel punto "O" si muove con una accelerazione $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ e partiamo dalla 2ª legge della dinamica



nel caso di fluidi reali non è possibile prescindere dagli effetti degli sforzi tangenziali;

$d\vec{F} = dm \cdot \vec{A}$ 2° Newton

con F = forze di massa + forze di superficie

con $\vec{R}$ = risultante delle forze di massa per unità di massa (ha le dimensioni di $\vec{A}$)

forze di massa = $\rho \vec{R}\, dx\, dy\, dz$ (ρ densità, $dx\,dy\,dz$ volume)

Il volumetto è circondato da fluido per cui su ogni faccia agirà uno sforzo (che non è più ortogonale alla superficie considerata, così come lo era invece nel caso di fluidi ideali e nel caso idrostatico), che moltiplicato per l'area della superficie su cui agisce ci darà la forza su tale superficie.

Esplicitiamo la 2ª legge della dinamica:

$$\rho \vec{R}\, \cancel{dx\,dy\,dz} + \cancel{\vec{\Phi}_x\, dy dz} - \cancel{\vec{\Phi}_x\, dy dz} - \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} dx\, \cancel{dy}\, dz + \cancel{\vec{\Phi}_y\, dx dz} - \cancel{\vec{\Phi}_y\, dx dz} - \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} dy\, \cancel{dx}\, dz +$$

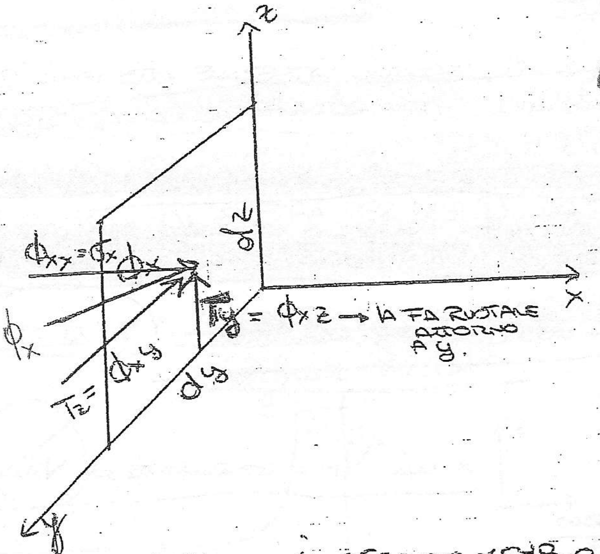
$$+ \cancel{\vec{\Phi}_z\, dx dy} - \cancel{\vec{\Phi}_z\, dx dy} - \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} dz\, \cancel{dx}\, dy = \vec{A} \cdot dm = \vec{A} \cdot \rho\, \cancel{dx\,dy\,dz}$$

Semplificando si ottiene:

$$\boxed{\rho\left(\vec{R} - \vec{A}\right) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}}$$

→ Equazione di equilibrio locale per un fluido reale (o equazione indefinita del moto).

ma la ϕ_x non è perpendicolare alla superficie considerata (proprio xké il fluido è reale), per cui avrà lungo una faccia 3 componenti:



Se il fluido fosse ideale:

$$\begin{cases} T_x = T_y = T_z = 0 \\ \phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \end{cases}$$

Consideriamo adesso il secondo membro dell'equazione indefinita:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} &= \frac{\partial P \cdot \hat{i}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} &= \frac{\partial P \cdot \hat{j}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_z}{\partial z} &= \frac{\partial P \cdot \hat{k}}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

Dal teorema di Cauchy → la somma di questi termini rappresenta il gradiente di P

$$\boxed{\rho(R-A) = \underbrace{\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}}_{\text{grad } P}}$$ ← Equazione di Eulero

Integrando sul volume finito e otteniamo l'equazione globale della dinamica dei fluidi reali:

$$\int_W \rho \vec{R}\, dw - \int_W \rho \vec{A}\, dw = \int_W \left(\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} \right) dw$$

$\vec{G}$ = forza peso del volume di fluido

Esplicitando $\vec{A}$: per la regola di derivazione euleriana dobbiamo tenere conto delle variazioni spaziali e temporali

$$A = \underbrace{\frac{\partial \vec V}{\partial t}}_{\text{VARIAZIONE TEMPORALE}} + \underbrace{u\frac{\partial \vec V}{\partial x} + v\frac{\partial \vec V}{\partial y} + w\frac{\partial \vec V}{\partial z}}_{\text{VARIAZIONE SPAZIALE}}$$

con u, v, w componenti del vettore velocità V nello spazio

PER CUI SOSTITUENDO QUESTA ESPRESSIONE E IL SECONDO INTEGRALE OTTENIAMO 3 TERMINI (FORZE): $\vec I + \vec M_1 - \vec M_2$

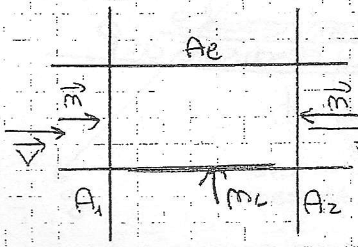
con $\vec I$ = INERZIA LOCALE E TIENE CONTO DELLA VARIAZIONE TEMPORALE DELLA VELOCITÀ;
$\vec M$ = QUANTITÀ DI MOTO $(\vec M_1 - \vec M_2)$ DELLA MASSA FLUIDA CHE ATTRAVERSA NELL'UNITÀ DI TEMPO LA SUP. DI CONTORNO A E TIENE CONTO DELLA VARIAZIONE SPAZIALE DELLA VELOCITÀ;

$$\vec I = -\int_W \rho \frac{\partial \vec V}{\partial t}\, dW$$ ← È NULLO NEL CASO DI MOTO PERMANENTE

$$\vec M_1 - \vec M_2 = \vec M = \int_A \rho \underbrace{V_m}_{m = \text{GENERICO VERSORE ORIENTATO} \perp \text{AD } A} \vec V\, dA$$

x cui V_m = COMPONENTE DI V LUNGO m

Ad $\boxed{\text{ESEMPIO}}$: CONSIDERIAMO UN TUBO E PRENDIAMO IN ESAME UN VOLUME FINITO:



con $m \perp A$

POSSO SPEZZARE L'INTEGRALE ESTESO AD A IN 3 INTEGRALI:

$$\vec M = \int_A \rho V_m \vec V\, dA = \underbrace{\int_{A_1} \sim}_{\vec M_1} \overset{\text{PERCHÉ } \vec m \text{ OPPOSTO A } \vec V}{(-)} \underbrace{\int_{A_2} \sim}_{\vec M_2} + \cancel{\int_{Ae} \sim} \to 0$$

0 PERCHÉ $V_m = 0$ PERCHÉ $\vec m \perp \vec V$

ANALIZZIAMO L'ULTIMO INTEGRALE:

$$\int_W \left(\frac{\partial \vec\Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec\Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec\Phi_z}{\partial z} \right) dW$$

ATTRAVERSO IL TEOREMA DI GREEN POSSO PASSARE DA UN INTEGRALE DI VOLUME AD UN INTEGRALE DI SUPERFICIE CON UN MENO DAVANTI:

PER CUI:

$$\int_W \left(\frac{\partial \vec\Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec\Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec\Phi_z}{\partial z} \right) dW = -\int_A \underbrace{\left(\vec\Phi_x \cos \hat{nx} + \vec\Phi_y \cos \hat{ny} + \vec\Phi_z \cos \hat{nz} \right)}_{\vec\Phi_m} dA = -\int_A \vec\Phi_m\, dA = -\vec\Pi$$

$\vec\Phi_m$ → TEOREMA DEGLI SFORZI DI CAUCHY

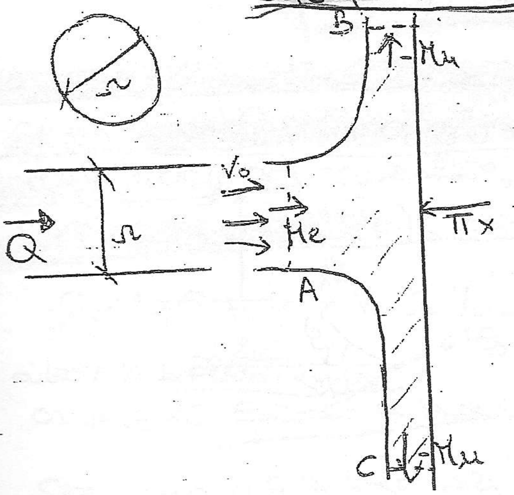
$\vec\Pi$: SFORZO CHE TUTTA LA SUP. DI CONTORNO ESERCITA SUL FLUIDO

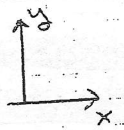
Riassumendo si ottiene che:

$$\boxed{\vec{G}+\vec{\Pi}+\vec{I}+\vec{M_e}-\vec{M_u}=0} \longrightarrow$$ **Equazione globale dell'equilibrio dinamico**

È relativa ad un fluido reale anche se stiamo trascurando le perdite di energia tra il fluido ed il volume di contorno, ovvero vale quando le dissipazioni di energia per attrito avvengono all'interno della massa fluida

Applicazione: Condotta da cui fuoriesce un getto di fluido che investe una superficie verticale.





con z ⊥ al foglio.

Scegliamo il volume di controllo e scriviamo l'equazione globale della dinamica

$$\underbrace{\cancel{\vec{G}}}_{\text{0 lungo x e y è nulla perché agisce lungo z.}}+\vec{\Pi}+\overbrace{\cancel{\vec{I}}}^{\text{0 permanente}}+\vec{M_e}-\vec{M_u}=0$$

Esplicito il termine Π:

$$\vec{\Pi}=\underbrace{\cancel{\Pi_1}+\cancel{\Pi_2}+\cancel{\Pi_3}}_{\text{a contatto con l'atmosfera}}+\Pi_x$$

$$M_e=\rho \overset{V\Omega}{Q} V=\rho\Omega V_0^2$$

Per quanto riguarda la M_u dobbiamo conoscere la velocità in B e in C quindi applichiamo Bernoulli:

$$\cancel{z_A}+\underset{\text{0 atm}}{\cancel{\frac{p_A}{\gamma}}}+\frac{V_A^2}{2g}=\cancel{z_B}+\underset{\text{0 atm}}{\cancel{\frac{p_B}{\gamma}}}+\frac{V_B^2}{2g}$$

$z_A=z_B$ perché $z \perp$ al foglio

Quindi

$$V_A=V_B=V_C$$

Per quanto riguarda la superficie di uscita: $\Omega_B=\frac{\Omega}{2}$ perché essendo in regime di moto permanente, la portata in ingresso è uguale alla somma delle due portate in uscita per cui se la velocità in ingresso è uguale, per il

TEOREMA di BERNOULLI, ALLA VELOCITÀ IN USCITA, LA SEZIONE DEVE ESSERE LA METÀ

$$Q_{in} = 2\,Q_{out}$$

$$\cancel{V_0}\,\Omega = 2\cancel{V_B}\cdot\Omega_B \Rightarrow \Omega_B = \frac{\Omega}{2}$$

PER CUI L'EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO DIVENTA:

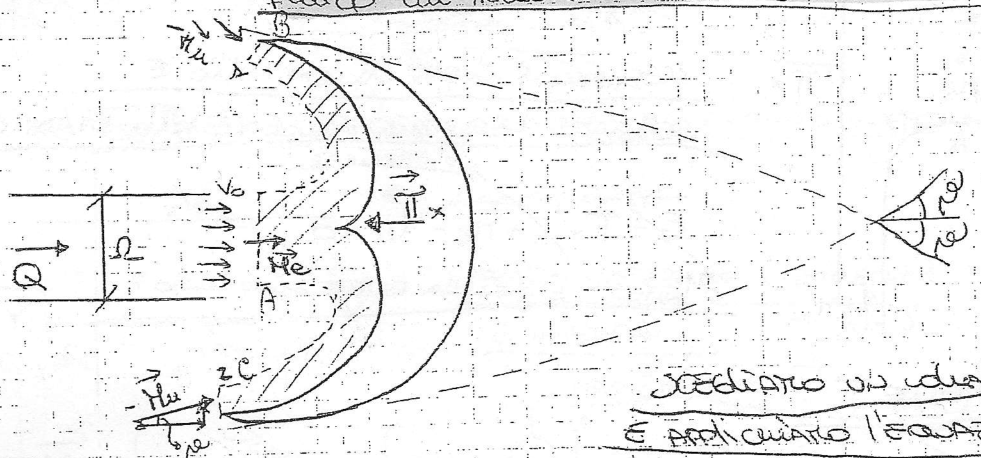
HANNO DIREZIONI OPPOSTE E MODULO UGUALE QUINDI SI SEMPLIFICANO

$$\Pi_x + M_e - (\cancel{M_{uB}} + \cancel{M_{uA}}) = 0$$

$$S = -\Pi_x = M_e = \rho V_0^2 \Omega$$

$$\boxed{S = \rho V_0^2 \Omega}$$

APPLICAZIONE: IMPIANTO IDROELETTRICO: CONDOTTA DA CUI FUORIESCE UN GETTO DI FLUIDO CHE INVESTE LE PALE DI UNA TURBINA PELTON.



Z ⊥ Al FOGLIO

SCEGLIAMO UN VOLUME DI CONTROLLO E APPLICHIAMO L'EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQ. DINAMICO

$$\vec{G_x} + \vec{\Pi_x} + \vec{M_{e_x}} - \vec{M_{ux}} = 0$$

AGISCE LUNGO Z QUINDI LUNGO X È NULLA

$$\vec{M_e} = \rho\,\Omega V_0^2$$

$$\vec{S} = -\vec{\Pi_x} = \vec{M_{ex}} - \vec{M_{ux}}$$

$M_{ux} = M_{u1} + M_{u2}$

$$M_{ux} = ②\,V_B^2\,\Omega_B\,\rho\cos\vartheta \qquad V_A = V_B = V_C$$

xchè consideriamo Mu proiettate su x.

con ϑ = ANGOLO DI DEVIAZIONE DEL FLUSSO D'ACQUA IN USCITA

$M_U = \rho\,\Omega V_0^2 = \rho\,\Omega_A V_A^2 + \rho\,\Omega_B V_B^2 = 2\rho\,\Omega_B V_B^2 = 2\rho\frac{\Omega}{2}V_0^2$

$V_B = V_0$ e $\Omega_B = \frac{\Omega}{2}$ → PER L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\vec{M_{ux}} = M_{u_{xA}} + M_{u_{xB}} = 2\rho\,V_B^2\,\Omega_B\cos\vartheta = \cancel{2}\rho\,V_0^2\,\frac{\Omega}{\cancel{2}}\cos\vartheta$$

$$M_{ux} = \rho V_0^2\,\Omega\cos\vartheta$$

LA M_{u1} NON SI PUÒ SEMPLIF. CON M_{u2} PERCHÉ HANNO DIREZIONI DIVERSE NON OPPOSTE MA INCLINATE DI UN ANGOLO ϑ.

Per cui si ha che la spinta:

$$S = \rho V_0^2 \Omega + \rho V_0^2 \Omega \cos\vartheta = \rho V_0^2 \Omega (1+\cos\vartheta)$$ l'abbiamo potenziato noi così

→ consideriamo M_u − M_{ux} quindi: $M_e - (-M_u) = M_e + M_u$

ϑ → $=0$ la spinta è doppia rispetto a quella su parete verticale ($\cos 0° = 1$)

→ $=90$ ritorniamo al caso precedente di spinta su parete verticale ($\cos 90° = 0$)

$$\boxed{S = \rho V_0^2 \Omega (1+\cos\vartheta)}$$

Si ha quindi una grande forza che investe una pala ferma il cui lavoro è nullo (forza per spostamento; se la pala è ferma il lavoro è nullo).

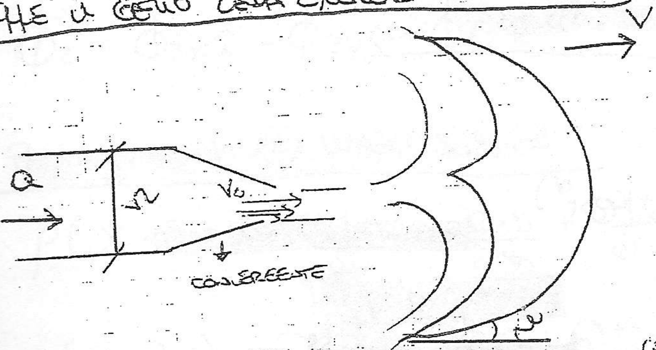
La potenza disponibile (legata al lavoro) della corrente:

$$P_D = \gamma Q \underbrace{H}_{\text{energia del getto = cinetica}} = \overset{\rho g}{\gamma} V_0 \Omega \frac{V_0^2}{2g} = \frac{\rho V_0^3 \Omega}{2}$$

$P = \frac{\text{lavoro}}{\text{tempo}}$

Ovviamente essendo il lavoro nullo la potenza non cede niente!

Supponiamo che la pala inizi a muoversi con una certa velocità pari a V così che il getto ceda energia alla pala:



Per cui:

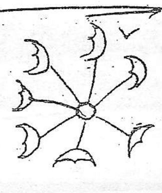
xchè sottraiamo la V alla V₀?

$$S = \rho \Omega (V_0 - V)^2 (1+\cos\vartheta)$$

con $V < V_0$

Come vediamo la spinta è diminuita rispetto a prima perché all'interno del quadrato sottraggo la V; diminuisce anche per un altro fattore: immaginiamo questa pala che si allontana dal getto con una velocità pari a V, quindi è come se il getto la dovesse inseguire per cui si ha una certa portata $Q = \Omega V$ che viene sprecata per allungare il getto.

Per ovviare a questo inconveniente vengono montate le pale su una ruota in modo tale che man mano che una pala si allontana si avvicina subito la pala successiva.



PER CUI:

$$S=\rho\Omega(V_0-V)^2(1+\cos\gamma)$$

LA POSSO SCRIVERE COME:

POICHÉ LA RUOTA SI ALLONTANA CON UNA VELOCITÀ PARI A V CON TERMINE LO POSSIAMO TRASCURARE

$$S=\rho\Omega(V_0-V)(V_0+\cancel{V})(1+\cos\gamma)$$

$$S=\rho\Omega(V_0-V)V_0(1+\cos\gamma)$$

LA POTENZA UTILE CHE IL GETTO CEDE ALLA RUOTA È UGUALE ALLA FORZA DELLA CORRENTE MOLTIPLICATA PER LA VELOCITÀ CON CUI LA PALA SI MUOVE:

$$\text{POTENZA}=\frac{\text{LAVORO}}{\text{TEMPO}}=\text{FORZA}\times\underbrace{\frac{\text{SPOSTAMENTO}}{\text{TEMPO}}}_{\text{VELOCITÀ}}=F\times V$$

$$P_u=\underbrace{\rho\Omega V_0(V_0-V)(1+\cos\gamma)}_{S}\cdot V=\rho\Omega V_0(V_0V-V^2)(1+\cos\gamma)$$

DOMANDA: CHE VALORE DEVE ASSUMERE LA V AFFINCHÉ LA POTENZA ASSUMA UN VALORE MASSIMO?

DERIVATA di $V^2=2V$

$$\frac{\partial P_u}{\partial V}=0 \longrightarrow \frac{\partial P_u}{\partial V}=\rho\Omega V_0(1+\cos\gamma)(V_0-2V)=0$$

PER $V=\frac{V_0}{2}$ SI ANNULLA LA DERIVATA

RISPOSTA: PER $V=\frac{V_0}{2}$ SI HA LA $P_{u\,max}$!

LA POTENZA MASSIMA:

$$P_{u\,max}=\rho\Omega V_0\frac{V_0}{2}\left(V_0-\frac{V_0}{2}\right)(1+\cos\gamma)$$

POTENZA UTILE MAX

$$P_{u\,max}=\rho\Omega\frac{V_0^3}{4}(1+\cos\gamma)$$

POTENZA DISPONIBILE GETTO

$$P_d=\rho\Omega\frac{V_0^3}{2}$$

IL RENDIMENTO DELL'IMPIANTO (DELLA TURBINA):

$$\eta=\frac{P_u}{P_d}=\frac{\cancel{\rho\Omega V_0^3}/4\,(1+\cos\gamma)}{\cancel{\rho\Omega V_0^3}/2}=\frac{(1+\cos\gamma)}{2}=0{,}95\div0{,}97\ ^{*}$$

* QUESTO VALORE È PROSSIMO A 1 MA MAI = 1 PERCHÉ IL GETTO SU UNA PALA ANDREBBE AD INTERFERIRE CON LA PALA SUCCESSIVA: $\frac{(1+\cos\gamma)}{2}=1 \Rightarrow \gamma=0$

LEZIONE N° 12 04/04/2011

EQUAZIONE di NAVIER-STOKES (EQ. MOTO fluidi REALI).

PARTIAMO DALL'EQUILIBRIO di un volumetto di fluido E CONSIDERIAMO l'EQUAZIONE LOCALE di EQUILIBRIO DINAMICO di un fluido REALE:

$$\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \quad (1)$$

Equazione indefinita del moto nel caso di fluidi reali (Equazione di equilibrio dinamico)

con:

$\vec{R} = X\hat{\imath} + Y\hat{\jmath} + Z\hat{k}$ ← COMPONENTI DELLA RISULTANTE DELLE FORZE di MASSA PER UNITÀ di MASSA LUNGO i 3 ASSI

$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ ← COMPONENTI DELL'ACCELERAZIONE LUNGO i 3 ASSI.

NON ESSENDO PIÙ NEL CASO IDROSTATICO LA Φ NON È PIÙ ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE CHE CONSIDERIAMO, MA AVRÀ 3 COMPONENTI:

$$\vec{\Phi}_x = \Phi_{xx}\hat{\imath} + \Phi_{xy}\hat{\jmath} + \Phi_{xz}\hat{k}$$

$$\vec{\Phi}_y = \Phi_{yx}\hat{\imath} + \Phi_{yy}\hat{\jmath} + \Phi_{yz}\hat{k}$$

$$\vec{\Phi}_z = \Phi_{zx}\hat{\imath} + \Phi_{zy}\hat{\jmath} + \Phi_{zz}\hat{k}$$

PROIETTIAMO LA (1) LUNGO x, y, z:

$$\left.\begin{aligned}
\rho(X-A_x) &= \frac{\partial \Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{xz}}{\partial z}\\
\rho(Y-A_y) &= \frac{\partial \Phi_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial z}\\
\rho(Z-A_z) &= \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ABBIAMO 9 COMPONENTI DEL TENSORE DEGLI SFORZI $\vec{\Phi}_n$

PER QUESTO TENSORE VALGONO DELLE CONDIZIONI di SIMMETRIA:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{xy} &= \Phi_{yx}\\
\Phi_{yz} &= \Phi_{zy}\\
\Phi_{xz} &= \Phi_{zx}
\end{aligned}\right\}$$

PER CUI DALLE 9 COMPONENTI DEL TENSORE DOPPIO DEGLI SFORZI NE RIMANGONO 6.

nel caso idrostatico $\longrightarrow$ $\phi_{xx} = \phi_{yy} = \phi_{zz} = P$ = modulo dello sforzo ($\perp A$)

è un invariante (pressione $\perp$ alla superficie) dipende solo dal punto e non dalla giacitura del piano

nel caso dinamico $\longrightarrow$ $\phi_{xx} \neq \phi_{yy} \neq \phi_{zz}$

ciò che non varia nel caso dinamico è la loro somma:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = cost$$

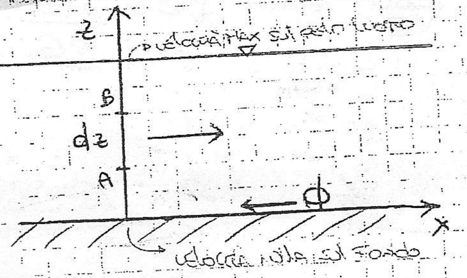
quindi nel caso dinamico la pressione è definita come la media degli sforzi normali:

$$P = \frac{\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}}{3}$$

Per ricavare l'equazione di Navier dobbiamo esplicitare le 3 espressioni scalari (2), quindi legare le componenti normali e tangenziali (6 componenti del tensore degli sforzi) con le componenti del vettore velocità (u, v, w).

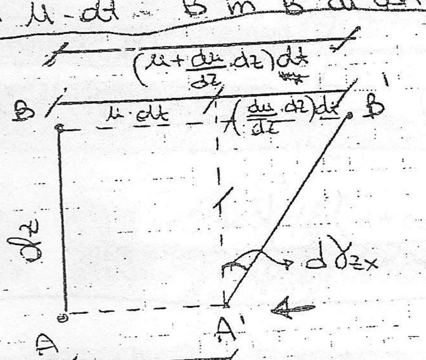
- Analizziamo le componenti tangenziali:

Consideriamo un moto piano in un fluido che scorre in un canale



Hp:
- regime di moto laminare (traiettorie rettilinee e //)
- moto piano (lamine che scorrono l'una sull'altra)
- delle componenti di $V(u, v, w)$ esiste solo la u diretta lungo z: $u = u(z)$

Consideriamo una fila di particelle AB che in un determinato istante si trovano allineate; dopo un intervallo dt infinitesimo la A si sposta in A' di $u \cdot dt$, B in B' di una quantità più grande essendo più vicino al pelo libero



Quando B si sposta in B' essendo la velocità di B + grande di A la fila A'B' ruoterà di un angolo infinitesimo $d\gamma_{zx}$

Poiché l'angolo è infinitesimo possiamo approssimare:

$$d\gamma_{zx} \cong tg\, d\gamma_{zx}$$

** si considera la derivata totale (d) e non quella parziale (∂) perché u dipende solo da z

CONSIDERIAMO LA $-d\gamma_{zx}$ PERCHÉ C'È STATA UNA DIMINUZIONE

UN CATETO = ~~ALTRO~~ altro CATETO PER LA TANGENTE DELL'ANGOLO OPPOSTO; QUINDI LA tg ANGOLO È UGUALE AL RAPPORTO DEI 2 CATETI:

$$\left(\frac{du}{dz}\cdot dz\right)dt = dz \cdot A'B'$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{\left(u + \frac{du}{dz}dz\right)dt - u\,dt}{dz}$$

$$A'B' = -d\gamma_{zx} = \frac{\left(\frac{du}{dz}dz\right)dt}{dz}$$

SEMPLIFICANDO SI HA:

$$d\gamma_{zx} = \frac{\frac{du}{dz}\cancel{dz}\,dt}{\cancel{dz}} = \frac{du}{dz}dt$$

DIVIDIAMO PER dt AMBO I MEMBRI:

$$\underbrace{-\frac{d\gamma_{zx}}{dt}}_{\text{VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE ANGOLARE}} = \frac{du}{dz} \ (*) \rightarrow \text{VELOCITÀ DELLA COMPONENTE } \mu \text{ LUNGO L'ASSE DELLE } z$$

ADESSO $\boxed{\text{DOBBIAMO LEGARE LO SFORZO ALLA VELOCITÀ}}$:

- IL FLUIDO È REALE ED È IN MOVIMENTO; SE ABBIAMO DELLE VELOCITÀ PER LA LEGGE DI NEWTON NASCONO DELLE TENSIONI TANGENZIALI LA CUI LEGGE È:

$\boxed{\text{Hp: } \exists \text{ UNA PROPORZ. DIRETTA TRA } T \text{ e } d\gamma_{zx}}$

$$\underbrace{T = \mu\frac{du}{dn}}_{\text{LEGGE DEI FLUIDI NEWTONIANI}}$$

NASCERÀ UNO SFORZO CHE SI OPPORRÀ AL MOTO DEL FLUIDO QUINDI:

$\Phi_{zx} \rightarrow$ SFORZO $\perp$ A z DIRETTO LUNGO x (T_y)

PER CUI IN MODULO LO SFORZO:

$$|\Phi_{zx}| = \mu\frac{du}{dz} \rightarrow \text{CONSIDERO IL MODULO PERCHÉ LO SFORZO È NEGATIVO PERCHÉ NATURALMENTE È DIRETTO IN VERSO OPPOSTO ALLA } x.$$

PER CUI POSSO SCRIVERE:

$$\Phi_{zx} = T_y = -\mu\frac{du}{dz} \overset{(A)}{=} \mu\frac{d\gamma_{zx}}{dt}$$

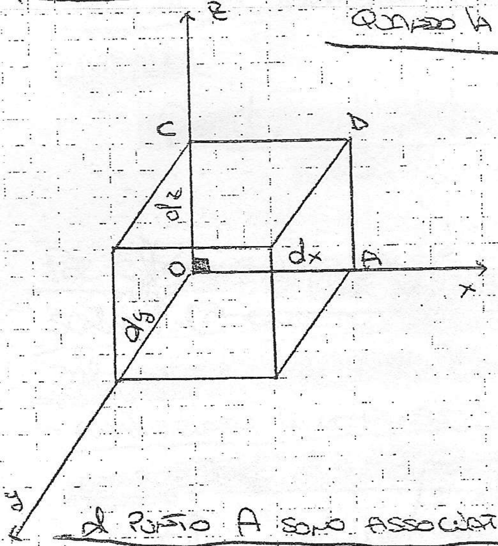
(A) se prendo la (*) la moltiplico per μ ambo i membri

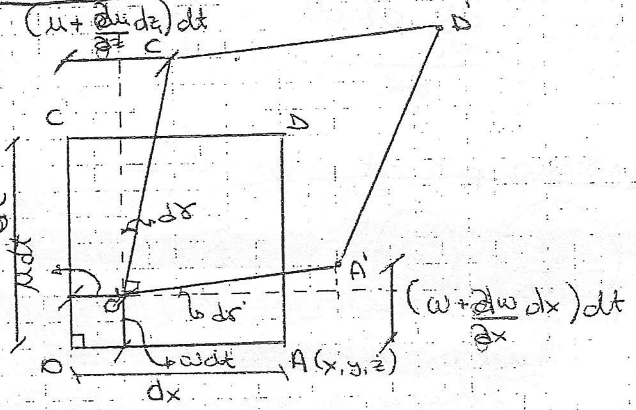
$$-\mu\frac{d\gamma_{zx}}{dt} = \mu\frac{du}{dz} \quad \text{ottengo che} \quad \mu\frac{d\gamma_{zx}}{dt} = -\mu\frac{du}{dz}$$

Questa relazione ci dice che esiste una diretta proporzionalità tra le componenti tangenziali e la variazione della velocità di deformazione angolare. Quanto ricavato è valido nell'ipotesi di moto piano laminare, ma vale anche per un moto qualsiasi: le componenti degli sforzi di origine viscosa sono funzioni lineari della velocità di deformazione angolare.

Troviamo quindi il legame tra gli sforzi tangenziali e la velocità di deformazione angolare nel caso di moto qualsiasi:

Consideriamo un elemento di fluido in movimento e vediamo cosa succede quando la faccia OADC si muove e vediamo come essa si deforma:





Al punto A sono associate componenti $(x+dx, y, z)$, il punto O (diversamente dal caso precedente) ha componenti di $V = V(u, v, w)$.

Il punto A che si trova ad una distanza dx dal punto O avrà componenti di $V = V\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\ v+\frac{\partial v}{\partial x}dx,\ w+\frac{\partial w}{\partial x}dx\right)$.

Il punto C avrà componenti del vettore $V = V\left(u+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\ v+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\ w+\frac{\partial w}{\partial z}dz\right)$

Riassumendo: in un istante di tempo t generico

u + la variazione lungo x della componente u

$$\begin{cases} O \rightarrow V = V(u, v, w) \\ A \rightarrow V = V\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx,\ v+\frac{\partial v}{\partial x}dx,\ w+\frac{\partial w}{\partial x}dx\right) \\ C \rightarrow V = V\left(u+\frac{\partial u}{\partial z}dz,\ v+\frac{\partial v}{\partial z}dz,\ w+\frac{\partial w}{\partial z}dz\right) \end{cases}$$

Dopo un istante di tempo pari a $t+dt$ (intervallo infinitesimo) il punto O si sposta in O', A in A', D in D' e C in C'; la maglia si deforma e l'angolo retto $C\hat{O}A$ subirà una diminuzione (i punti si spostano sia lungo x che lungo z):

diminuisce

$$-d\gamma_{zx} = d\gamma + d\gamma'$$

$d\gamma \cong tg\, d\gamma$ perché γ molto piccolo

$$-d\gamma_{zx} = \underbrace{\frac{(u+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz)dt - u\,dt}{dz}}_{d\gamma} + \underbrace{\frac{(w+\frac{\partial w}{\partial x}dx)dt - w\,dt}{dx}}_{d\gamma'}$$

POSSO SCRIVERE:

$$-d\gamma_{zx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot \cancel{dz}\, dt}{\cancel{dz}} + \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\cancel{dx}\, dt}{\cancel{dx}} = \frac{\partial u}{\partial z}dt + \frac{\partial w}{\partial x}dt$$

Quindi:

$$\frac{d\gamma_{zx}}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \rightarrow$$ VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE ANGOLARE PER MOTO NON LAMINARE

STESSO RAGIONAMENTO PER GLI ALTRI ANGOLI

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$d\gamma_{xy} \rightarrow$ COMPONENTE DI x È u DERIVATA LUNGO y, COMPONENTE DI y È v DERIVATA LUNGO x

$$\frac{d\gamma_{yz}}{dt} = -\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$d\gamma_{yz} \rightarrow$ COMPONENTE DI y È v DERIVATA LUNGO z, COMPONENTE DI z È w DERIVATA LUNGO y

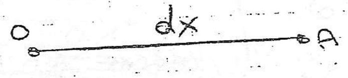
RIPRENDIAMO LA LEGGE RICAVATA PRIMA: $\Phi_{zx} = \mu \frac{d\gamma_{zx}}{dt}$

SOSTITUENDO SI HA:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{zx} &= -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
\Phi_{xy} &= -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
\Phi_{yz} &= -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}$$

LEGAME TRA LE COMPONENTI TANGENZIALI DEGLI SFORZI E LE COMPONENTI DEL VETTORE V (velocità)

PER TROVARE IL LEGAME TRA LE COMPONENTI NORMALI E LE COMPONENTI DEL VETTORE V CONSIDERO UNA FILA DI PARTICELLE LUNGO L'ASSE DELLE x (CONSIDERO UN LATO DEL PARALLELEPIPEDO)



$O \rightarrow u$

$A \rightarrow u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$

$\Rightarrow$ POICHÉ LE COMPONENTI DEL VETTORE VELOCITÀ DEL PUNTO O E DEL PUNTO A SONO DIVERSE, IL CORPO OLTRE ALLA ROTAZIONE SUBIRÀ UN ALLUNGAMENTO

Quindi:

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dt - u\,dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dt = \text{ALLUNGAMENTO}$$

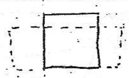
DEFINISCO: $d\mathcal{E}_x$ = ALLUNGAMENTO UNITARIO $= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}} \cdot dt = \frac{\partial u}{\partial x} dt$

DIVIDO PER dt E OTTENGO:

$$\frac{d\mathcal{E}_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$ → QUESTO TERMINE CONTRIBUISCE ALL'ALLUNG. LUNGO x, PERÒ BISOGNA TENERE PRESENTE L'AZIONE COMBINATA DEI 6 SFORZI

→ VELOCITÀ DI DILATAZIONE

· GLI SFORZI ⊥ A x y LO ALLUNGANO LUNGO z ECC.



(PER ESEMPIO) ???

DALLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = \frac{1}{E}\left(\Phi_{xx} - \frac{\Phi_{yy} + \Phi_{zz}}{m}\right) \\ \mathcal{E}_y = \frac{1}{E}\left(\Phi_{yy} - \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{zz}}{m}\right) \\ \mathcal{E}_z = \frac{1}{E}\left(\Phi_{zz} - \frac{\Phi_{yy} + \Phi_{xx}}{m}\right) \end{cases}$$

E = MODULO DI ELASTICITÀ (DI YOUNG)

$\frac{1}{m}$ = COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE

$\boxed{H_p = \exists \text{ UNA PROP. DIRETTA TRA GLI SFORZI NORMALI E LA VELOCITÀ DI DILATAZIONE}}$

↓

LEGAME TRA GLI ALLUNGAMENTI UNITARI E GLI SFORZI NORMALI

COME FATTO IN PRECEDENZA PER GLI SFORZI TANGENZIALI, ANCHE PER GLI SFORZI NORMALI POSSIAMO IPOTIZZARE CHE ESISTA UNA PROPORZIONALITÀ DIRETTA TRA QUESTI ULTIMI E LA VELOCITÀ DI DILATAZIONE:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\text{RAPPORTO DI PROPORZIONALITÀ}}\left(\Phi_{xx} - \frac{\Phi_{yy} + \Phi_{zz}}{m}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\lambda}\left(\Phi_{yy} - \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{zz}}{m}\right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\lambda}\left(\Phi_{zz} - \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy}}{m}\right) \end{aligned}\right\}$$

CON

$$\lambda = \mu \frac{(m+1)2}{m}$$ → FATTORE DI PROPORZIONALITÀ

$$p = \frac{\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}}{3}$$ → MODULO DELLO SFORZO NEL CASO DI ARRIVO

SOSTITUENDO: ???!! come facciamo ad avere questo risultato sostituendo!!!

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\mu}\left(\Phi_{xx} - p\right) \longrightarrow \Phi_{xx} = p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{2\mu}\left(\Phi_{yy} - p\right) \longrightarrow \Phi_{yy} = p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{2\mu}\left(\Phi_{zz} - p\right) \longrightarrow \Phi_{zz} = p - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

LEGAME TRA GLI SFORZI NORMALI E LE COMPONENTI DI V. (CON GLI ALLUNGAMENTI)

RIASSUMENDO:

$$\begin{cases} \Phi_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \Phi_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \Phi_{yz} = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases} + \begin{cases} \Phi_{xx} = p - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ \Phi_{yy} = p - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ \Phi_{zz} = p - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\circ)$$

ABBIAMO, QUINDI, I LEGAMI CHE CERCAVAMO!

RIPRENDIAMO ADESSO L'EQUAZIONE LOCALE DELL'EQUILIBRIO:

$$\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \frac{\partial\vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\Phi}_z}{\partial z} \quad (3)$$

PROIETTIAMO LUNGO x E CONSIDERIAMO L'ESPRESSIONE SCALARE

$$\rho(X-A_x) = \frac{\partial\Phi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_{zx}}{\partial z}$$

SOSTITUIAMO LE $(\circ)$ (RELAZIONE DEGLI SFORZI)

$$\rho(X-A_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

VARIAZIONE DELLA PRESSIONE LUNGO L'ASSE x

$$\rho(X-A_x) = \frac{\partial p}{\partial x} - 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}$$

Queste non sono ?!

RACCOGLIAMO I TERMINI SOTTOLINEATI

C'È UN 2 DAVANTI E RACCOGLIAMO UN TERMINE IN UN MODO E L'ALTRO IN UN ALTRO!

$$\rho(X-A_x) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)}_{\Delta_2 = \text{laplaciano}} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\mathrm{div}\,\vec{V}}$$

IN FINE OTTENIAMO:

$$\rho(X-A_x) = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu\Delta_2 u - \cancelto{0}{\mu\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,\vec{V})}$$

xchè

nel caso di fluido incomprimibile dall'equazione di continuità:

$$\cancelto{0}{\frac{d\rho}{dt}} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \implies \mathrm{div}\,\vec{V} = 0$$

PROIETTANDO LA (3) LUNGO GLI ALTRI ASSI E SOSTITUENDO LE $(\circ)$ SI OTTIENE:

$$\left.\begin{aligned}\rho(X-A_x) &= \frac{\partial P}{\partial x} - \mu\Delta_2 u\\ \rho(Y-A_y) &= \frac{\partial P}{\partial y} - \mu\Delta_2 v\\ \rho(Z-A_z) &= \frac{\partial P}{\partial z} - \mu\Delta_2 \omega\end{aligned}\right\}$$

EQUAZIONE DI NAVIER IN FORMA SCALARE

PER OTTENERE LA FORMA VETTORIALE BASTA MOLTIPLICARE OGNI ESPRESSIONE PER I RISPETTIVI VERSORI:

$$\rho(X-A_x)\hat{i} = \frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} - \mu\Delta_2 u\cdot\hat{i}$$

$$\rho(Y-A_y)\hat{j} = \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} - \mu\Delta_2 v\hat{j}$$

$$\rho(Z-A_z)\hat{k} = \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k} - \mu\Delta_2 \omega\hat{k}$$

SOMMANDO SI OTTIENE:

$$\boxed{\underbrace{\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \operatorname{grad} P}_{\text{EQUAZIONE DI EULERO}} - \underbrace{\mu\Delta_2\vec{V}}_{\text{RISULTANTE DELLE FORZE PER UNITÀ DI VOLUME ORIGINATE DALLA VISCOSITÀ E SONO PRESENTI IN OGNI PUNTO DELLA MASSA FLUIDA}}}$$

$\rightarrow$ EQUAZIONE INDEFINITA PER UN FLUIDO VISCOSO E INCOMPRIMIBILE (EQ DI NAVIER)

INTEGRANDO QUESTA ESPRESSIONE AD UN VOLUME FINITO W E OTTENIAMO L'EQ. GLOBALE:

$$\underbrace{\int_W \rho\vec{R}\,dW}_{\vec{G}} - \underbrace{\int_W \rho\vec{A}\,dW}_{(\vec{I}+\vec{M}_e-\vec{M}_u)} = \underbrace{\int_W \operatorname{grad} P\,dW}_{\vec{\Pi}\ *} - \mu\int_W \Delta_2\vec{V}\,dW$$

$$*\int_W \operatorname{grad} P\,dW = -\int_A P\,dA\,\vec{n} = \vec{\Pi}$$

ANALIZZIAMO L'ULTIMO TERMINE:

$$-\mu\int_W \Delta_2\vec{V}\,dW = \mu\int_A\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\cos\hat{nx} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\cos\hat{ny} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\cos\hat{nz}\right)dA = \int_A \mu\frac{\partial\vec{V}}{\partial n}\,dA$$

TRASFORMIAMO L'INTEGRALE DI VOLUME IN UN INTEGRALE DI SUPERFICIE CAMBIANDO IL SEGNO.

PER CUI SOSTITUENDO SI OTTIENE

$$\vec{G} - \int_W \frac{\rho \vec{V}}{dt} dW + \int_A \rho V_n \vec{V} dA + \int_A P_n dA - \mu \int_A \frac{\partial V}{\partial n} dA = 0$$

$\int_W$ → I = INERZIA LOCALE

$\int_A \rho V_n \vec{V} dA$ → M = QUANTITÀ di MOTO

$\int_A P_n dA$ → Π = RISULTANTE FORZE di SUPERFICIE

$\mu \int_A \frac{\partial V}{\partial n} dA$ → FORZE di NATURA VISCOSA CON A sup. di CONTORNO DEL VOLUME

OVVERO:

$$\boxed{\vec{G} + \Pi + M_e - M_u + I - \mu \int_A \frac{\partial V}{\partial n} dA = 0}$$ ⟹ EQ GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO PER UN FLUIDO VISCOSO

POICHÉ L'ULTIMO TERMINE È UN INTEGRALE ESTESO ALLA SUPERFICIE DI CONTORNO, QUESTO CI DICE CHE L'EQUILIBRIO È INDIPENDENTE DAGLI SFORZI CHE AVVENGONO ALL'INTERNO DELLA MASSA FLUIDA, MA È LEGATO UNICAMENTE AGLI SFORZI AGENTI SULLA SUPERFICIE DI CONTORNO.

SE NON CI SONO VARIAZIONI DELLA VELOCITÀ LUNGO LA NORMALE $\frac{\partial V}{\partial n} \to 0$ QUINDI L'ULTIMO INTEGRALE È NULLO.

RIPRENDIAMO L'EQUAZIONE DI NAVIER:

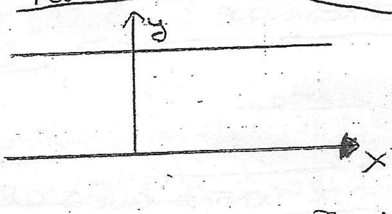
$$\rho(\vec{R} - \vec{A}) = \text{grad} P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

E APPLICHIAMOLA AD UN PARTICOLARE TIPO DI MOTO:

• REGIME DI MOTO LAMINARE → MOTO UNIFORME CON TRAIETTORIE RETTILINEE E //

$$\text{con } \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0}_{\text{NON CI SONO VARIAZIONI DI VELOCITÀ NELLO SPAZIO E NEL TEMPO.}}$$

PROVIAMO A DEFINIRE IL MOTO LAMINARE ATTRAVERSO L'EQ. DI NAVIER:



SE IL MOTO È UNIFORME $\vec{A} = 0$;

$\vec{R} = -g \,\text{grad}\, z$;

QUINDI:

$$\rho(-g \,\text{grad}\, z) = \text{grad} P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$ moltiplico PER ρ (AL PRIMO MEMBRO) E CAMBIO DI SEGNO

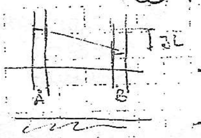
$$\gamma \,\text{grad}\, z + \text{grad} P = \mu \Delta_2 \vec{V}$$ ESSENDO IL FLUIDO INCOMPRIMIBILE POSSO PORTARE γ SOTTO IL SEGNO DI GRADIENTE

$$\text{grad}(\gamma z + P) = \mu \Delta_2 \vec{V}$$ divido TUTTO PER γ

$$grad\left(z + \frac{P}{\gamma}\right) = \frac{\mu}{\gamma} \Delta_2 \vec{V}$$

Essendo x la direzione del moto ~~proiettato lungo x~~:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right)}_{J = \text{variazione del carico piezometrico lungo x}} = \frac{\mu}{\gamma} \Delta_2 u$$ con $V = V(y)$



con l'unica componente di velocità che è la u.

$$-J = \frac{\partial}{\partial x}\left(z + \frac{P}{\gamma}\right)$$

segno "-": in A avrò h_A, in B " h_B $\Rightarrow h_A > h_B$

$-J = \frac{h_B - h_A}{\partial x} \Rightarrow J = \frac{h_A - h_B}{\partial x}$

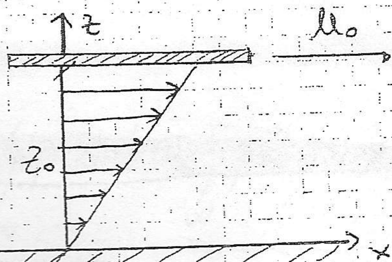
$$J = -\frac{\partial h}{\partial x}$$ → percorso

Quindi: $J = -\frac{\mu}{\gamma} \Delta_2 u$ da cui: $\boxed{\Delta_2 u = -\frac{\gamma J}{\mu}}$ → distribuzione delle velocità nei vari punti per un moto uniforme

Abbiamo visto come è possibile gestire un moto laminare dal punto di vista analitico (utilizzando l'eq. di Navier).

Lezione N° 13 05/04/2011

Applicazione N° 1



Immaginiamo di avere un canale sopra il quale vi è una piastra estesa indefinitivamente che viene trascinata da una forza F con una velocità U_0 costante. Vogliamo calcolare la distribuzione delle velocità utilizzando la seguente espressione: $\Delta_2 U = -\frac{\gamma J}{\mu}$, quello che sappiamo è:

- $V = 0$ sul fondo;
- $V = U_0$ sulla piastra;

non sappiamo al centro che succede, analizziamo l'espressione scritta sopra: il secondo membro è nullo perché $J = 0$ ovvero non abbiamo perdite piezometriche (è come una macchina che viene trascinata e non consuma benzina; la piastra è trascinata dalla forza F).

Quindi:

$$\Delta_2 U = 0$$

ESPLICITIAMO QUESTO TERMINE IN COORDINATE CARTESIANE:

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}^{\,0} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

→ IN REGIME DI MOTO LAMINARE OVVERO IN MOTO UNIFORME, QUESTO VUOL DIRE CHE LA u VARIA SOLO LUNGO z E LA SUA VARIAZIONE LUNGO x E y È NULLA [$u = u(z)$].

PER CUI POSSIAMO PASSARE ALLA DERIVATA TOTALE:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = 0$$ → EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2^ ORDINE

INTEGRO LA 1^ VOLTA → $\frac{du}{dz} = A$ ← 1^a COSTANTE DI INTEGRAZIONE

INTEGRO LA 2^ VOLTA → $u = Az + B$ (a) ← 2^a COSTANTE DI INTEGRAZIONE

PER TROVARE LE 2 COSTANTI DI INTEGRAZIONE È NECESSARIO CONSIDERARE LE CONDIZIONI AL CONTORNO:

$z = 0 \longrightarrow u = 0$ ①

$z = z_0 \longrightarrow u = u_0$ ②

SOSTITUIAMO NELLA (a) LA (1) E TROVIAMO LA B, POI LA (2) E TROVIAMO LA A.

$0 = A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0$

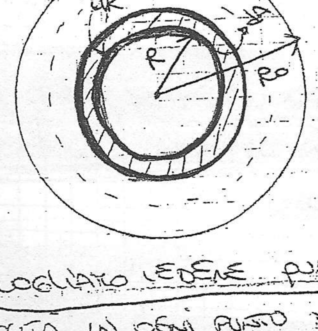
$u_0 = A \cdot z_0 + 0 \Rightarrow A = u_0 / z_0$

ADESSO POSSIAMO SOSTITUIRE I VALORI DI A E B NELLA (a):

$$\boxed{u = \frac{u_0}{z_0} \cdot z}$$ ← LA VELOCITÀ HA UNA DISTRIBUZIONE LINEARE LUNGO Z.

APPLICAZIONE N° 2

CONSIDERIAMO UNA CONDOTTA CILINDRICA E VEDIAMO COM'È LA DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ IN TALE CONDOTTA; CONSIDERIAMO UNA SEZIONE CIRCOLARE, SIAMO SEMPRE IN REGIME DI MOTO LAMINARE, PER CUI AVREMO UNO SCORRIMENTO DI CILINDRI COASSIALI. UTILIZZIAMO SEMPRE L'ESPRESSIONE:



$$\Delta_2 u = \frac{-\gamma J}{\mu}$$

+ VOGLIAMO VEDERE QUANTO VALE LA VELOCITÀ IN OGNI PUNTO DEL RAGGIO.

ESPLICITIAMO IL $\Delta_2 U$ IN COORDINATE CILINDRICHE:

$$\Delta_2 u = \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dR}\left(R \frac{du}{dR}\right)$$

SOSTITUENDO SI HA:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR}\left(R \frac{du}{dR}\right) = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

MOLTIPLICO AMBO I MEMBRI PER R

$$\frac{d}{dR}\left(R \frac{du}{dR}\right) = -\frac{\gamma J R}{\mu}$$

← EQUAZIONE differenziale del 2° ordine

INTEGRO LA 1ª VOLTA ⟶ $R \frac{du}{dR} = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{R^2}{2} + A$ → 1° COST. di INTEGRAZIONE

DIVIDO TUTTO PER R:

$$\frac{du}{dR} = -\frac{\gamma J R}{\mu \cdot 2} + \frac{A}{R}$$

INTEGRO LA 2ª VOLTA ⟶ $u = -\frac{\gamma J}{\mu} \cdot \frac{R^2}{4} + A \ln R + B$ → 2° COST. di INTEGRAZ.

PER TROVARE LE COSTANTI di INTEGRAZIONE CONSIDERO LE condizioni al CONTORNO:

$0 \cdot \infty$ = FORMA INDETERMINATA ???

① $R \to 0 \Rightarrow A = 0$ PERCHÉ $A \cdot \ln R = A \ln 0 \Rightarrow u = -\infty$ MA NON È POSSIBILE CHE LA VELOCITÀ SIA $-\infty$ PERCIÒ L'UNICA SOLUZIONE È CHE $A = 0$.

② $R = R_0 \Rightarrow U = 0$ PERCHÉ SIAMO SULLA PARETE E LE PARTICELLE SONO FERME.

SOSTITUISCO LA ② PER TROVARE LA B:

il termine $A \ln R$ che fine fa!!! lo cancelliamo xché dalla prima condizione troviamo $A=0$???

$-\frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{-1+4}{4}$

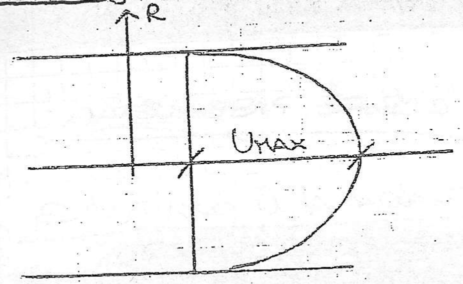
$$u = -\frac{\gamma J R_0^2}{\mu \cdot 4} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma J R_0^2}{\mu}$$

SOSTITUENDO:

$$\boxed{u = \frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma J}{\mu}\left(R_0^2 - R^2\right)}$$

← LA VELOCITÀ HA UN ANDAMENTO di TIPO PARABOLICO IN FUNZIONE DEL RAGGIO AL QUADRATO.

RAPPRESENTANDO L'ANDAMENTO LUNGO IL RAGGIO:



- IN REGIME di MOTO LAMINARE IL MASSIMO DELLA VELOCITÀ SI HA PER $R=0$ OVVERO A METÀ.

Quindi:

$$u_{max} = \frac{1}{4}\frac{J\gamma}{\mu} R_0^2$$

con $R=0$ → IN CORRISPONDENZA DELL'ASSE DELLA CONDOTTA.

CI INTERESSA LA VELOCITÀ MEDIA:

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R_0^2}$$

A → AREA DELLA SEZIONE

CONSIDERIAMO UNA CORONA CIRCOLARE (IN ROSSO NEL DISEGNO PRECEDENTE) DI AMPIEZZA PARI A dR DI AREA INFINITESIMA dA

$$dA = 2\pi R dR \qquad \text{con } dQ = \mu \cdot dA$$

dQ → PORTATA DELLA SEZ. CIRCOLARE; μ → VELOCITÀ PER L'AREA INFINITESIMA

Q → PORTATA DI TUTTA LA SEZIONE

$$Q = \int_0^{R_0} \mu \cdot dA \qquad \text{Quindi}$$

$$V_m = \frac{Q}{\pi R_0^2} = \frac{\int_0^{R_0} \frac{1}{\cancel{4}2}\frac{\gamma J}{\mu}(R_0^2 - R^2)\cdot \cancel{2\pi} R \cdot dR}{\cancel{\pi} R_0^2}$$

$$V_m = \frac{1}{R_0^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma J}{\mu}\left[\int_0^{R_0} R_0^2 R dR - \int_0^{R_0} R^3 dR\right]$$

$$V_m = \frac{1}{R_0^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma J}{\mu}\left[\frac{R_0^4}{2} - \frac{R_0^4}{4}\right] = \frac{1}{\cancel{R_0^2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\gamma J}{\mu}\cdot\frac{R_0^{\cancel{4}\,2}}{4}$$

INFINE:

$$\boxed{V_m = \frac{1}{8}\frac{\gamma J}{\mu} R_0^2}$$

← IN CONDIZIONI DI MOTO LAMINARE IN UNA SEZIONE CIRCOLARE LA VELOCITÀ MEDIA È LA METÀ DELLA VELOCITÀ MASSIMA

$$V_m = \frac{1}{2} V_{max}$$

SE SOSTITUIAMO NELL'ESPRESSIONE DELLA VELOCITÀ MEDIA $R = \frac{D}{2}$ SI HA:

$$V_m = \frac{1}{32}\cdot\frac{\gamma J D^2}{\mu}$$ DA CUI POSSIAMO RICAVARE LA CADENTE PIEZOMETRICA:

$$\boxed{J = 32\frac{\mu V_m}{\gamma D^2}}$$ ← VARIAZIONE DEL CARICO PIEZOMETRICO RICAVATA PER VIA ANALITICA POSSIBILE SOLO IN REGIME DI MOTO LAMINARE

CALCOLIAMO ADESSO L'INDICE DI RESISTENZA λ CHE ESPRIME IL RAPPORTO TRA LE PERDITE DI CARICO PIEZOMETRICO PER UN TRATTO DI TUBAZIONE DI LUNGHEZZA PARI AL DIAMETRO D E IL CARICO CINETICO, OVVERO:

$$\lambda = \frac{D \cdot J}{U_m^2/2g}$$

FORMULA DI DARCY-WEISBACH

LJ = PERDITA DI CARICO IN UN TRATTO DI LUNGHEZZA L

DJ = PERDITA DI CARICO IN UN TRATTO DI LUNGHEZZA D

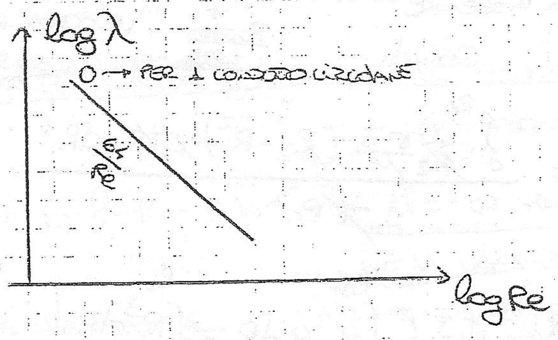
IN QUESTA ESPRESSIONE SOSTITUISCO IL VALORE DI J:

$$\lambda = \frac{D \cdot 32\frac{\mu U_m}{\gamma D^2}}{U_m^2/2g} = \frac{\cancel{D}\cdot 32\,\mu\,\cancel{U_m}\cdot 2g}{\gamma D^{\cancel{2}}\cdot U_m^{\cancel{2}}} = \frac{64\,\mu}{\rho\, U_m\cdot D} \rightarrow \frac{1}{Re} \quad \text{con } \frac{\mu}{\rho} = \nu$$

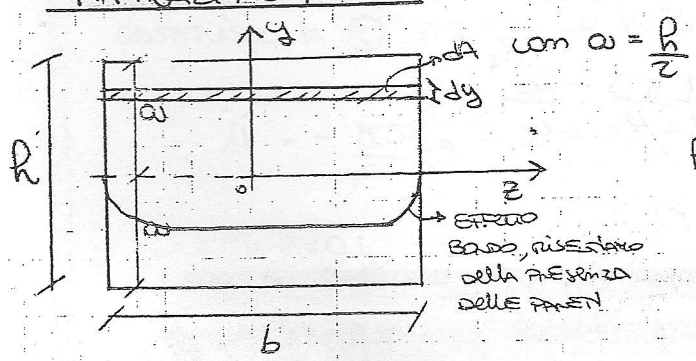
$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}}$$

↓

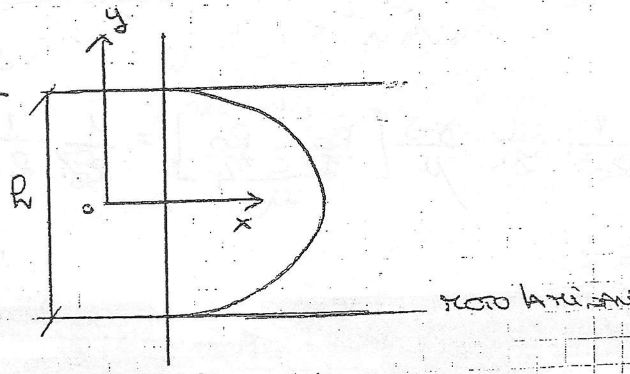
INDICE DI RESISTENZA PER UN CONDOTTO CIRCOLARE IN REGIME DI MOTO LAMINARE



APPLICAZIONE N° 3



SEZIONE TRASVERSALE



SEZIONE LONGITUDINALE

CONSIDERIAMO UN CONDOTTO DI FORMA RETTANGOLARE; IL FLUSSO È LUNGO L'ASSE X, QUINDI NELLA SEZIONE TRASVERSALE ESCE FUORI DAL FOGLIO. VOGLIAMO ANALIZZARE LA DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ IN TALE CONDOTTO UTILIZZANDO ANCORA l'espressione $\Delta_2 u = -\frac{\gamma S}{\mu}$

Esplicitiamo il laplaciano:

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{\,0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{\,0} = -\frac{\gamma S}{\mu}$$

non si hanno variazioni di velocità (direzione del moto)

se $b \gg h$ si può trascurare l'effetto bordo dovuto alla presenza delle pareti

Quindi si può passare alla derivata totale:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma S}{\mu} \quad \leftarrow \text{eq. diff. del 2° ordine}$$

Integro 1^a volta $\longrightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\gamma S}{\mu} \cdot y + A$ — 1° cost. di integraz.

?? Come abbiamo integrato qui?? Consideriamo $\frac{1}{dy}$ costante??

Integro 2^a volta $\longrightarrow u = -\frac{J\gamma}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + Ay + B$ — 2° cost. di integr.

Per trovare A e B devo porre delle condizioni al contorno:

per $y = \pm a \longrightarrow u = 0$ inoltre $A = 0$ perché siccome la distribuzione delle velocità è simmetrica rispetto all'asse della condotta, u deve essere una funzione "pari" e questo è possibile solo se $A = 0$

a

Vedi grafico relativo nella pagina a fianco.

Calcoliamo B:

$y = \pm a \Rightarrow y^2 = a^2$

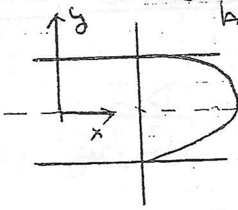
$$0 = -\frac{\gamma S}{\mu} \cdot \frac{a^2}{2} + B \Rightarrow B = \frac{\gamma S}{\mu} \frac{a^2}{2}$$

Sostituendo:

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \cdot \frac{J\gamma}{\mu}\left(a^2 - y^2\right)}$$

← distribuzione di tipo parabolico il cui massimo si ha per $y = 0$ (asse condotta)

regime di moto laminare



Ci interessa sapere la velocità media:

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2 \cdot a \cdot b}$$

CONSIDERIAMO UNA STRISCIOLINA INFINITESIMA DI AMPIEZZA PARI A dy E AREA PARI A dA

$$dA = b\, dy$$

velocità in corrispondenza della strisciolina infinitesima dy

LA PORTATA INFINITESIMA $dQ = v \cdot dA$

quindi la velocità media:

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{1}{2ab}\int_{-a}^{+a} \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\gamma J}{\mu}\left(a^2-y^2\right)}_{v} \cdot \underbrace{b\, dy}_{dA}$$

sommatoria portate infinitesime

$$V_m = \frac{1}{2a}\left[\int_{-a}^{+a} \frac{1}{2}\frac{\gamma J}{\mu} a^2\, dy - \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2}\frac{\gamma J}{\mu} y^2\, dy\right]$$

$$V_m = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2}\frac{\gamma J}{\mu}\left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-a}^{+a}$$

$$V_m = \frac{1}{4a}\frac{J\gamma}{\mu}\left(a^3 + a^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{4a}\frac{J\gamma}{\mu}\left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right)$$

$$V_m = \frac{1}{\cancel{4a}}\frac{J\gamma}{\mu}\left(\frac{\cancel{4}a^{\cancel{3}\,2}}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\gamma J}{\mu} a^2$$

IN FUNZIONE DI h, con $a = h/2$ SI HA:

$$\boxed{V_m = \frac{1}{12}\frac{\gamma J}{\mu} \cdot h^2}$$

← velocità media in condizioni di moto laminare nel caso di sezione rettangolare

RIPRENDIAMO L'ESPRESSIONE DELL'INDICE DI RESISTENZA:

$$\lambda = \frac{D \cdot J}{V_m^2/2g}$$

POICHÉ AL NUMERATORE COMPARE IL DIAMETRO (CONDOTTA CIRCOLARE) INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI RAGGIO IDRAULICO PER SVINCOLARCI DALLA FORMA DEL CONDOTTO → $R = \frac{\text{AREA}}{\text{PERIMETRO BAGNATO}}$

raggio idraulico

$$R_{circolare} = \frac{\pi D^2}{\pi D\, 4} = D/4 \Rightarrow 4R_{ide} \qquad \boxed{D = 4R}$$

PER CUI $\lambda_{circolare} = \frac{4R \cdot J}{V_m^2/2g}$ con $Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{\rho V_m 4R}{\mu}$

$$R_{rettang} = \frac{b\cdot h}{2b+\cancel{2h}} \cong \frac{h}{2}$$

$2h \cong 0$ se $b \gg h$

xké riusiamo anche qui $4R_{idr}$ che ricaviamo per un condotto circolare?!?

Quindi $4R_{idr} = \cancel{4}\frac{h}{\cancel{2}} = 2h$

Sostituendo si ha:

$$\lambda_{rett} = \frac{2h\cdot J}{V_m^2/2g}$$

Ricavando il valore di J dall'espressione della velocità media si ha:

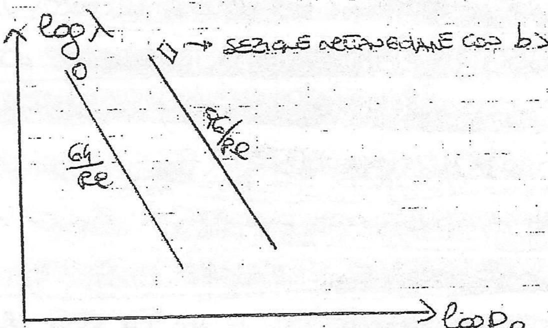
$$J = \frac{12\,\mu\cdot V_m}{\gamma\cdot h^2}$$

Sostituendo sopra:

$$\lambda = \frac{2\cancel{h}\cdot 12\,\mu\cdot \cancel{V_m}\cdot 2g}{\gamma\, h^{\cancel{2}}\cdot V_m^{\cancel{2}}} \qquad \text{con } \frac{g}{\gamma} = \frac{1}{\rho}$$

$$\lambda = \frac{48\,\mu}{\rho V_m h}$$ divido e moltiplico per 2

$$\lambda = \frac{96\,\mu}{\rho V_m\cdot 2h} = \frac{96\,\mu}{\rho V_m\cdot 4R} \rightarrow \frac{1}{Re}$$



$$\boxed{\lambda = \frac{96}{Re}}$$

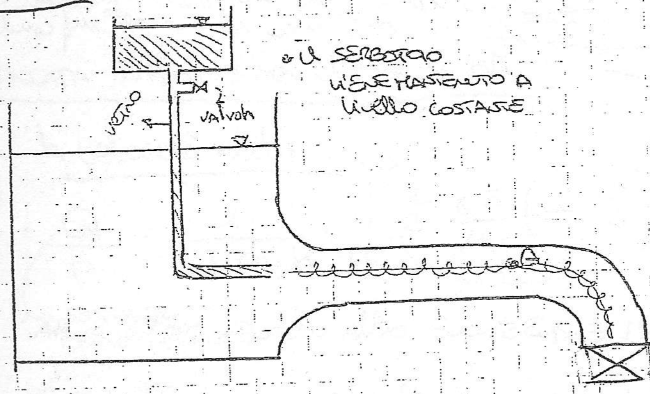
↓

Indice di resistenza nel caso di moto laminare in un condotto di forma rettangolare con $b \gg h$ (molto largo).

Fine moto laminare!

MOTO TURBOLENTO

Il primo a studiare il moto turbolento fu Reynolds 1883 attraverso questa esperienza:



Dato un serbatoio riempito di acqua con un tubo in vetro ben raccordato con all'estremità una valvola che serviva a regolare la portata di liquido e di conseguenza la velocità all'interno del tubo e nella parte superiore del tubo un serbatoio più piccolo contenente un liquido colorato con le stesse caratteristiche del liquido all'interno del serbatoio più grande, egli variando il grado di apertura della valvola studiò il diverso comportamento del liquido colorato.

Aprendo di poco la valvola, ovvero facendo transitare una piccola portata e quindi velocità basse, notò che il fluido colorato era ben distinto dalla restante massa fluida ovvero traiettorie rettilinee e parallele, non vi è scambio di massa all'interno del tubo (non vi sono componenti normali della velocità, alla traiettoria che stiamo considerando), quindi ci troviamo in un regime di moto laminare (non si hanno variazioni temporali del vettore velocità).

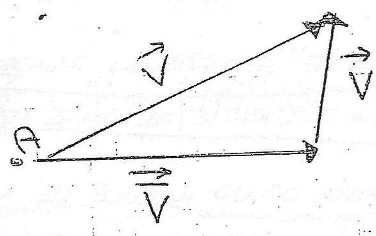
Aprendo ulteriormente il rubinetto notò che il filetto di fluido colorato iniziò ad avere delle ondulazioni; questo vuol dire che stiamo entrando in un regime di moto di transizione (tra il regime di moto laminare e il regime di moto che avremo aumentando ancora la velocità).

Facendo aumentare ancora la portata (e quindi la velocità) notò che il filetto colorato scompariva e vi era una completa fusione tra quest'ultimo e la restante massa fluida; in pratica nascono delle componenti irregolari della velocità (che variano nello spazio e nel tempo da punto a punto) che provocano, appunto, lo scambio di massa da zona a zona del nostro campo di moto: ci troviamo quindi nel regime di moto turbolento (irregolare perché la velocità varia nello spazio e nel tempo).

A rigori il moto turbolento (può essere considerato come un moto vario) si può studiare come se fosse un moto uniforme o un moto permanente però in media: questo vuol dire che possiamo utilizzare le espressioni del moto

CONTINUITÀ E DEL MOTO PERMANENTE CONSIDERANDO, PERÒ, NON I VALORI ISTANTANEI MA I VALORI MEDI.

AD ESEMPIO: CONSIDERIAMO UNA PARTICELLA A CHE IN UN DETERMINATO ISTANTE AVRÀ UNA CERTA VELOCITÀ CON UNA CERTA DIREZIONE E IN UN ISTANTE DI TEMPO SUCCESSIVO AVRÀ UN'ALTRA DIREZIONE; QUESTO VALORE DI VELOCITÀ LO POSSO PENSARE COME LA SOMMA DI 2 VALORI:



$$\vec V = \vec{\bar V} + \vec V'$$

$\vec{\bar V}$ = VALORE MEDIO DELLA VELOCITÀ = MEDIA DEI VALORI ISTANTANEI IN UN CERTO ISTANTE DI TEMPO t, CHE COMPIE IL MOTO DI TRASPORTO DELL'INTERA MASSA FLUIDA

con $\vec V = u\hat i + v\hat j + w\hat k$

quindi $u = \bar u + u'$

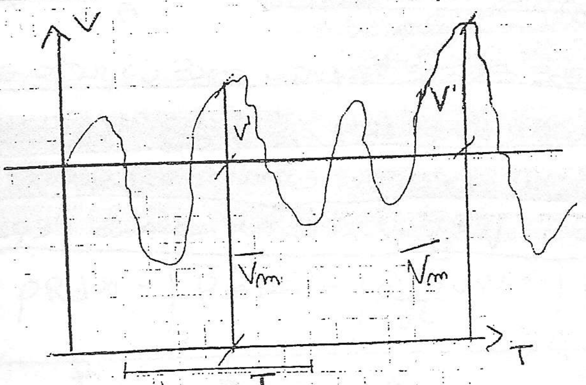
$\vec V'$ = TERMINE OSCILLANTE (IRREGOLARE) CHE VARIA NEL TEMPO, RAPPRESENTA LA COMPONENTE DI AGITAZIONE

$\vec V$ = VALORE ISTANTANEO DELLA VELOCITÀ.

QUINDI TUTTE LE GRANDEZZE LE POSSIAMO ESPRIMERE AD ES: COME: $P = \bar P + P'$ (PRESSIONE), QUINDI TUTTE LE GRANDEZZE CHE ENTRANO IN GIOCO NEL MOTO TURBOLENTO POSSONO ESSERE SCOMPOSTE COME LA PRESSIONE, LA VELOCITÀ ECC...

NATURALMENTE ESSENDO $\vec V'$ VARIABILE NEL TEMPO IL SUO VALORE MEDIO È NULLO, QUINDI $\overline{\vec V'} = 0$

• INTRODUCIAMO UN VALORE $\boxed{T = \text{TEMPO CARATTERISTICO DELLA TURBOLENZA}}$



IMMAGINIAMO DI ESEGUIRE DELLE REGISTRAZIONI DELLA VELOCITÀ V IN UN PUNTO

SE CONSIDERO UN INTERVALLO DI TEMPO PICCOLO AVRÒ UNA OSCILLAZIONE RISPETTO AL VALORE MEDIO; SE PRENDO UN $t > T$ (CIOÈ È GRANDE) NOTERÒ CHE LE GRANDEZZE SI RIPETONO IDENTICHE MEDIAMENTE, PER CUI $\exists$ UN T CARATTERISTICO DELLA TURBOLENZA PER CUI $\bar V$ = cost. QUELLO CHE VARIA È V' CIOÈ IL TERMINE OSCILLANTE.

$$\underbrace{\vec{\bar V}}_{\text{VALORE MEDIO}} = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\vec V}_{\text{TERMINE ISTANTANEO}}\,dt$$

TRASPORTO DELLA MASSA

[STESSA COSA PER LA PRESSIONE, PER LO SFORZO, ECC...]

$$\overline{\vec{V}'}^{\,\text{AGITAZIONE}} = \frac{1}{T}\int_0^T (\vec{V}-\overline{\vec{V}})\,dt$$

INTEGRAZIONE [illegible] COSTANTE QUANDO SI ARRESTI ANCORA [illegible] TUTTE LE [illegible] È INUTILE CONCLUDERE CHE SI SONO [illegible] il vettore V POSSIBILE [illegible] CHE PUÒ ESSERE ASSOGGETTATO [illegible] durante POSSIBILI [illegible] SUCCESSIVO INTERVALLO DI TEMPO [illegible] E CHE [illegible] ESSE SI [illegible] E [illegible] IDENTICHE

ovvero:

$$\overline{\vec{V}'} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \vec{V}\,dt}_{\overline{\vec{V}}} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \overline{\vec{V}}\,dt} = \overline{\vec{V}} - \overline{\vec{V}} = 0$$

LA MEDIA DEL VALORE MEDIO È ANCORA LA MEDIA $\overline{\vec{V}}$

PER CUI PER GESTIRE UN MOTO TURBOLENTO ATTRAVERSO LE ESPRESSIONI RICAVATE IN PRECEDENZA PER UN MOTO LAMINARE O PERMANENTE BASTA RIFERIRLE AI VALORI MEDI.

MP

- Reynolds attraverso varie esperienze vide che si passa da un regime di moto all'altro al variare del diametro (D), della velocità (V) e delle caratteristiche del fluido:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Quindi per:

- $Re < 2000 \div 2400 \longrightarrow$ MOTO LAMINARE
- $2000 \div 2400 < Re < 4000 \longrightarrow$ REGIME DI MOTO DI TRANSIZIONE
- $Re > 4000 \longrightarrow$ REGIME DI MOTO TURBOLENTO.

LEZIONE N° 14 — 07/04/2011

ESTENSIONE DELL'EQ. DI NAVIER AL MOTO TURBOLENTO

A RIGORE IL MOTO TURBOLENTO DOVREBBE ESSERE TRATTATO COME UN MOTO VARIO, IL CHE DAL PUNTO DI VISTA ANALITICO È MOLTO COMPLICATO; POSSIAMO, PERÒ, TRATTARE IL MOTO TURBOLENTO COME UN MOTO UNIFORME IN MEDIA, ESPRIMENDO TUTTE LE GRANDEZZE CON UN'ESPRESSIONE DEL TIPO: $\vec{V} = \overline{\vec{V}} + \vec{V}'$. RIPRENDIAMO L'EQUAZIONE DI NAVIER:

$$\rho(\vec{R}-\vec{A}) = \text{grad}\,P - \mu \Delta_2 \vec{V}$$

CHE ESTESA AD UN VOLUME FINITO:

$$\int_W \overset{\vec{G}}{\rho \vec{R}\,dW} + \int_A \overset{\vec{\Pi}}{P\hat{n}\,dA} - \int_W \overset{\vec{I}}{\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t}}\,dW + \int_A \overset{\vec{M}}{\rho V_n \vec{V}\,dA} - \mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n}\,dA = 0$$

NON VARIA AL VARIARE DEL REGIME DI MOTO PERCHÉ DIPENDE DALLA MASSA.

DATO UN T = TEMPO CARATTERISTICO DELLA TURBOLENZA (ABBASTANZA AMPIO)

E SIA: $\overline{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$

PRENDO quindi l'ESPRESSIONE di NAVIER E LA RIFERISCO AI VALORI MEDI:

$$\overrightarrow{\overline{\Pi}} = \frac{1}{T}\int_0^T\int_A p\cdot\hat{m}\,dA\,dt$$

POICHÉ A e T SONO COSTANTI POSSO INVERTIRE l'ordine di INTEGRAZIONE

$$\overrightarrow{\overline{\Pi}} = \int_A \frac{1}{T}\int_0^T p\hat{m}\,dA\,dt$$

MA $p = \overline{p} + p'$

Quindi:

$$\overrightarrow{\overline{\Pi}} = \int_A\Big[\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \overline{p}\,dt\,\vec{m}}_{\overline{p} = \text{MEDIA DEL VALORE MEDIO}} + \cancel{\frac{1}{T}\int_0^T p'\,dt\,\vec{m}}^{\,0\,\to\,\text{LA MEDIA DELLA COMPONENTE di AGITAZIONE È NULLA}}\Big]dA = \int_A \overline{\overline{p}}\,\hat{m}\,dA$$

VALORE MEDIO di p

Quindi BASTA MANTENERE il VALORE MEDIO A TUTTI I TERMINI; ANDIAMO COSA SUCCEDE ALLA QUANTITÀ di MOTO:

$$\overrightarrow{\overline{M}} = \frac{1}{T}\int_0^T\int_A \rho V_m\vec{V}\,dA\,dt \qquad \text{con} \begin{cases} V_m = \overline{V}_m + V_m' & \text{con } m \perp A \\ \vec{V} = \overrightarrow{\overline{V}} + \vec{V}' \end{cases}$$

Quindi SOSTITUENDO SI HA:

$$\overrightarrow{\overline{M}} = \rho\int_A\big(\overline{V}_m\overrightarrow{\overline{V}} + \overline{V_m'\vec{V}'}\big)\,dA$$

SINGOLARMENTE il VALORE MEDIO DEI TERMINI OSCILLANTI È NULLO; il VALORE MEDIO DEL PRODOTTO DEI TERMINI OSCILLANTI È $\neq 0$.

PER CUI l'EQUAZIONE GLOBALE di EQUILIBRIO DINAMICO ESTESA AL MOTO TURBOLENTO DIVENTA:

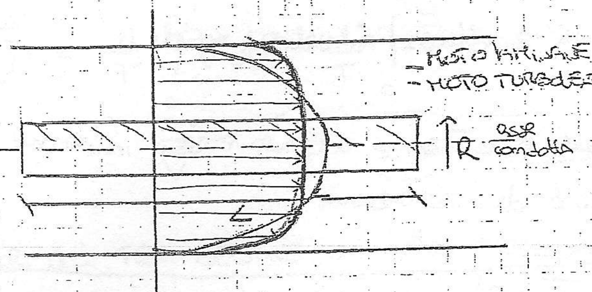
$$\underbrace{\int_W \rho R\,dw}_{\vec{G}} + \underbrace{\int_A \overline{p}\,\hat{m}\,dA}_{\overrightarrow{\overline{\Pi}}} - \underbrace{\int_W \frac{\partial \rho\overrightarrow{\overline{V}}}{\partial t}dw}_{\overrightarrow{\overline{I}}} + \underbrace{\int_A \rho\overline{V}_m\overrightarrow{\overline{V}}\,dA}_{\overrightarrow{\overline{M}}} + \underbrace{\int_A \rho\overline{V_m'\vec{V}'}\,dA}_{\overrightarrow{\overline{M}}'\text{ (È UNA FORZA, RESISTENZA IN PIÙ)}} - \mu\int_A \frac{\partial\vec{V}}{\partial m}\,dA = 0$$

$\overrightarrow{\overline{M}}'$ = QUANTITÀ di MOTO dei TERMINI OSCILLANTI (PORTATA di q. di m. = UNA FORZA)

CON:

$$\int_A \rho\overline{V_m'\vec{V}'}\,dA = \overrightarrow{\overline{M}}' \leftarrow$$

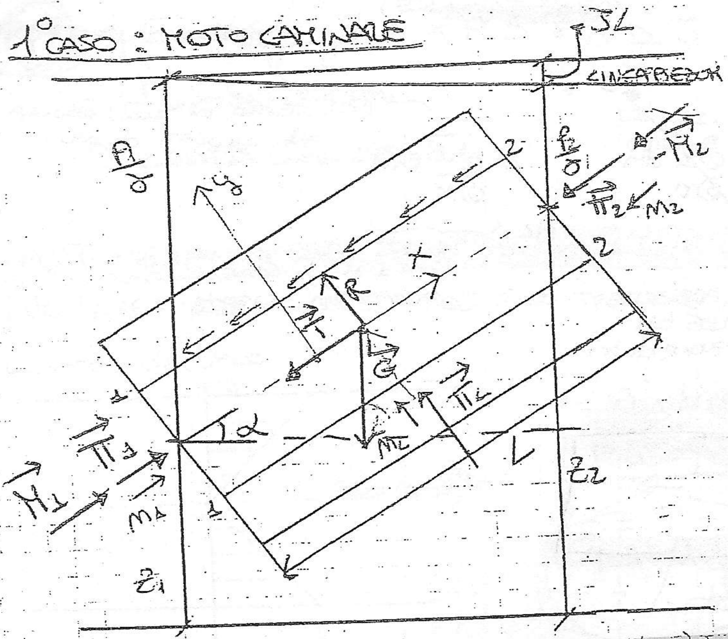
ESPRIME lo SCAMBIO di QUANTITÀ di MOTO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE di CONTORNO DEL VOLUME CONSIDERATO, CONSEGUENTE ALLA PRESENZA DELLA COMPONENTE di AGITAZIONE DELLA VELOCITÀ vediamo perché c'è quel termine in più; consideriamo una condotta circolare in cui vi è un moto uniforme di tipo turbolento; prendiamo in esame un cilindretto di fluido di lunghezza pari a L e raggio pari a R.



Lungo l'asse della condotta il cilindretto si sta muovendo di moto turbolento per cui esistono sempre quelle componenti di agitazione descritte in precedenza ovvero delle componenti normali al senso del moto che producono uno scambio di massa da zona a zona del nostro campo di moto per cui le particelle che si trovano nella parte centrale si spostano nelle zone periferiche e viceversa. Però le particelle che si trovano nella parte centrale hanno una velocità maggiore di quelle che si trovano nella zona periferica (distr. velocità in verde), addirittura le particelle a contatto col tubo sono ferme; per cui le particelle che si spostano dalla zona centrale alla zona periferica e che quindi hanno velocità maggiori, vanno a sostituire particelle che avevano velocità minori per cui tendono ad aumentare di poco la velocità delle zone periferiche. Viceversa le particelle della zona periferica che si spostano in quella centrale, avendo una velocità minore di quelle nella zona centrale tendono a diminuire la velocità di tale zona, ovvero hanno un'azione ritardatrice. Otteniamo quindi una distribuzione delle velocità più appiattita (linea blu). Per quanto riguarda lo scambio di massa delle particelle che dalla zona centrale si portano in quella periferica e viceversa, per l'equazione di continuità è nullo; se invece consideriamo un bilancio di quantità di moto non è nullo, essendo il prodotto di una massa per una velocità, per cui particelle che in un determinato istante occupano la zona centrale avranno una quantità di moto più grande rispetto alle particelle che nello stesso istante di tempo considerato occupano la parte periferica e quindi le particelle della zona centrale che hanno un "eccesso" di quantità di moto, nel spostarsi verso la zona periferica cederanno quantità di moto all'ambiente, mentre quelle della zona periferica nel spostarsi verso la zona centrale acquistano quantità di moto dall'ambiente. Ecco perché il valore medio della quantità di moto dovuta ai termini oscillanti è diverso da zero.

DETERMINAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI IN UNA CONDOTTA CIRCOLARE

1° CASO: MOTO LAMINARE



CONSIDERIAMO UNA CONDOTTA INCLINATA DI UN ANGOLO α RISPETTO ALL'ORIZZONTALE. VEDIAMO COSA SUCCEDE ALL'INTERNO DI UN CILINDRETTO DI FLUIDO DI RAGGIO PARI A R. (I VALORI SONO RIFERITI ALL'ASSE DELLA CONDOTTA).
IL FLUIDO È REALE PERCIÒ A CAUSA DELLE PERDITE LA PIEZOMETRICA NON È ORIZZONTALE.
PER CALCOLARE LO SFORZO TOTALE APPLICHIAMO L'EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO PER UN FLUIDO REALE AL CILINDRETTO DI FLUIDO:

$$\int_W \rho R\, dW - \underbrace{\int_W \rho \cancel{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}\, dW}_{\text{MOTO STAZIONARIO} \to 0} + \underbrace{\int_A p_m \vec{n}\, dA}_{\Pi} + \underbrace{\int_A \rho V_m \vec{V}\, dA}_{M} - \underbrace{\mu \int_A \frac{\partial \vec{V}}{\partial n}\, dA}_{T} = 0$$

LO SFORZO TOTALE È LA RISULTANTE DEGLI SFORZI TANGENZIALI SULLA SUPERFICIE LATERALE PERCHÉ IL FLUIDO È REALE QUINDI ESISTONO DEGLI SFORZI CHE SI OPPONGONO AL MOTO DEL CILINDRETTO.
ESPLICITIAMO I VARI TERMINI:

$$G = \gamma \underbrace{L \cdot A}_{W} \quad \to \text{APPLICATO AL BARICENTRO}$$

$$\vec{\Pi} = \int_A p_m \vec{n}\, dA = \int_{A_1} p_{m_1} \vec{n}\, dA + \int_{A_2} p_{m_2} \vec{n}\, dA + \int_{A_L} p_{m_L} \vec{n}\, dA = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_L$$

↓ RISULTANTE DELLE SPINTE IDROSTATICHE SULLA SUPERFICIE DI CONTORNO CON $\Pi \perp A$

$$\vec{M} = \int_A \rho V_m \vec{V}\, dA = \underbrace{\int_{A_1} \rho V_m \vec{V}\, dA}_{M_1} + \underbrace{\int_{A_2} \rho V_m \vec{V}\, dA}_{(-) M_2} + \int_{A_L} \cancel{\rho V_m \vec{V}}\, dA \to 0 \quad \text{PERCHÉ } \vec{m} \perp \vec{V}$$

$(-) M_2$ → PERCHÉ $\vec{m}$ OPPOSTA A $\vec{V}$

M_1 ↓ PORTATA QUANTITÀ DI MOTO MASSA ENTRANTE

$$T = \mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}\, dA \quad \begin{cases} +T \rightarrow \text{TRASCINAMENTO} \\ -T \rightarrow \text{RESISTENZA (AZIONE FRENANTE)} \end{cases}$$

DOVUTA ALLE COMPONENTI TANGENZIALI SULLA SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRETTO DI FLUIDO

$$-\mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = -\cancel{\int_{A_1} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA}^{\,0} - \cancel{\int_{A_2} \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA}^{\,0} - \int_{A_L} \mu \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial n}}_{} dA$$

→ RESISTENZA AL MOTO DOVUTA ALLA VISCOSITÀ DINAMICA

MOTO UNIFORME, NON ABBIAMO VARIAZIONI LUNGO L'ASSE DEL MOTO ($\vec{n}$ STESSA DIREZIONE DI x)

$\vec{n} \perp x$ CI SONO VARIAZIONI LUNGO y.

RIASSUMENDO ABBIAMO:

$$\boxed{\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_L + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 + \vec{T} = 0}$$

PROIETTIAMO LUNGO L'ASSE DEL MOTO:

$$-G \operatorname{sen}\alpha + \Pi_1 - \Pi_2 + \cancel{M_1} - \cancel{M_2} - T = 0$$

[Π_L NON HA COMPONENTI LUNGO L'ASSE DELLA CONDOTTA]

SONO UGUALI E DIRETTE IN VERSO OPPOSTO (CILINDRO A SEZIONE COSTANTE)

$$-G \operatorname{sen}\alpha + P_1 A - P_2 A - T = 0$$

RICAVIAMO LA RESISTENZA AL MOTO

$$T = -\gamma L A \operatorname{sen}\alpha + (P_1 - P_2) A \qquad \text{con } L \operatorname{sen}\alpha = (z_2 - z_1)$$

QUINDI:

$$T = -\gamma A (z_2 - z_1) + (P_1 - P_2) A \qquad \text{METTO IN EVIDENZA } \gamma A$$

$$T = \gamma A \underbrace{\Big[\underbrace{\Big(z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\Big)}_{h_1} - \underbrace{\Big(z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\Big)}_{h_2} \Big]}_{JL}$$

JL = PERDITA DI CARICO PIEZOMETRICO TRA 1 E 2, OVVERO NEL TRATTO DI CONDOTTA PARI A L

PER CUI L'AZIONE DI TRASCINAMENTO:

$$T = \gamma A J L = \gamma J W \qquad \text{con } A \cdot L = W$$

PER CUI LA RISULTANTE DEGLI SFORZI (È UNA PRESSIONE PER CUI $P=\frac{F}{A}$):

$$\tau = \frac{T}{\underbrace{L\cdot P}_{\text{area laterale su cui agisce la } T}} = \frac{\gamma \cdot A \cdot L \cdot J}{L \cdot P} = \gamma R J = \gamma \frac{D}{4} J = \boxed{\gamma \frac{R_c}{2} J}$$

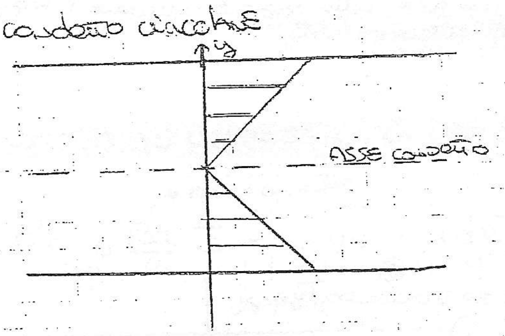
→ R → RAGGIO IDRAULICO

P → PERIMETRO BAGNATO

$D/4$ → PER LA SEZ. CIRCOLARE

R_c → RAGGIO DEL CONDOTTO

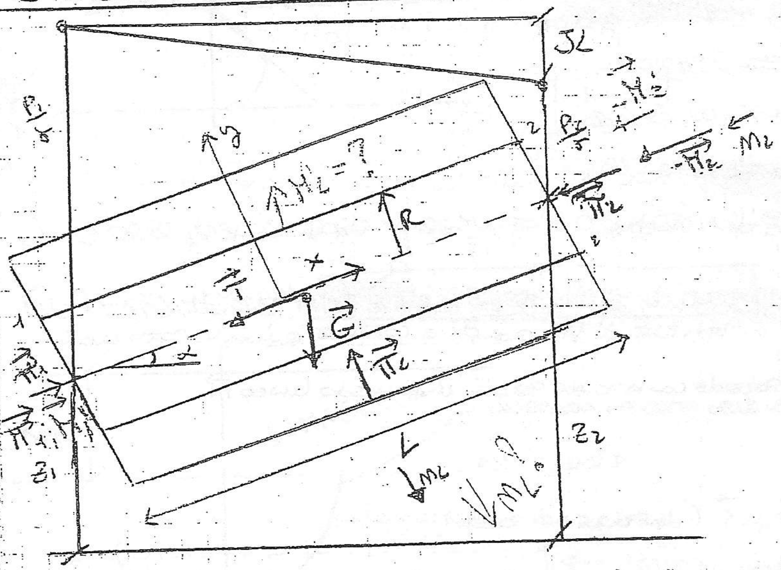
CON T = RISULTANTE DEGLI SFORZI SOLO DI ORIGINE VISCOSA PROPORZIONALE A μ. DALLA LEGGE APPENA SCRITTA POSSIAMO TRACCIARE LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI IN UN CONDOTTO CIRCOLARE



← VARIA LINEARMENTE CON IL RAGGIO, ED È SIMMETRICO

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}$$

2° CASO: MOTO TURBOLENTO



CONSIDERIAMO SEMPRE UNA CONDOTTA DI LUNGHEZZA L INCLINATA DI UN ANGOLO α RISPETTO ALL'ORIZZONTALE; CONSIDERIAMO IL VOLUMETTO DI FLUIDO DI RAGGIO R COMPRESO TRA LE SEZ. 1-1 E 2-2; FLUIDO REALE, CALCOLIAMO LA DISTRIBUZIONE DEGLI SFORZI TANGENZIALI NEL CASO DI REGIME DI MOTO TURBOLENTO; A TAL PROPOSITO APPLICHIAMO SEMPRE L'EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO DINAMICO

PER UN FLUIDO REALE NEL CASO DI REGIME DI MOTO TURBOLENTO (RIFERITA QUINDI AI VALORI MEDI):

→ QUANTITÀ DI MOTO TERMINI OSCILLANTI

$$\overline{\vec G} + \overline{\vec \Pi_1} + \overline{\vec \Pi_2} + \overline{\vec \Pi_L} + \overline{\vec M_1} - \overline{\vec M_2} + \overline{\vec M'} + \overline{\vec T} = 0$$

$$\text{con } \vec M' = \rho \int_A \overline{V'_m \vec V'}\, dA = \underbrace{\int_{A_1} \rho \overline{V'_m \vec V'}\, dA}_{\vec M'_1} + \underbrace{\int_{A_2} \rho \overline{V'_m \vec V'}\, dA}_{\vec M'_2} + \underbrace{\int_{A_L} \rho \overline{V'_m \vec V'}\, dA}_{\vec M'_L}$$

SOSTITUENDO:

PER L'UNIFORMITÀ DEL MOTO
I VALORI MEDI DEI TERMINI OSCILLANTI SONO UGUALI IN TUTTE LE SEZIONI
TRASVERSALI ESSENDO ANCHE OPPOSTE SI SEMPLIFICANO

$$\vec{G}+\vec{\Pi}_1+\vec{\Pi}_2+\vec{\Pi}_L+\underbrace{\cancel{\vec{M}_1}-\cancel{\vec{M}_2}}_{\substack{\text{Cilindro a}\\ \text{sez. costante}\\ \text{quindi sono uguali}\\ \text{e opposte.}}}+\cancel{\vec{M}'_1}+\cancel{\vec{M}'_2}+\vec{M}'_L+\vec{T}=0$$

PER CUI RIMANE:

$$\vec{G}+\vec{\Pi}_1+\vec{\Pi}_2+\vec{\Pi}_L+\vec{M}'_L+\vec{T}=0$$

con $\vec{M}'_L=\int_{A_L}\rho\overline{V'_n\vec{V}'}\,dA$ ← POICHÉ TALE VALORE È COSTANTE NELLA SEZIONE CIRCOLARE (∀ PUNTO) POSSO PORTARLO FUORI DALL'INTEGRALE

QUINDI:

$$\vec{M}'_L=\rho\overline{V'_n\vec{V}'}A_L$$

PROIETTANDO LUNGO L'ASSE DEL MOTO (ASSE x)

TOLGO IL SIMBOLO DI VETTORE PERCHÉ STO PROIETTANDO LUNGO x.

$$(\overline{M'_L})_x=\rho\overline{V'_n u'}A_L \qquad \text{con } V'=V'(u',v',w')$$

e $V'_n=-v'$ ← IL VETTORE V LUNGO LA NORMALE ALLA DIREZIONE DEL MOTO CIOÈ $\vec{n}_L$ LUNGO L'ASSE y.

y OPPOSTO A n? SÌ! boh

QUINDI

$$(\overline{M'_L})_x=-\rho\overline{v'u'}A_L \;;$$

CALCOLIAMO L'AZIONE DI TRASCINAMENTO

$$\vec{T}=\mu\int_{A_L}\frac{\partial\vec{V}}{\partial n}dA$$

μ = COMPONENTE DI V LUNGO x

PERCHÉ LA SEZ. È CIRCOLARE

LA U È UGUALE IN TUTTI I PUNTI DI A_L QUINDI È COSTANTE QUINDI LO PORTO FUORI

SOSTITUISCO LA DERIVATA PARZIALE CON LA TOTALE PERCHÉ U VARIA SOLO LUNGO $\vec{n}$

$$\vec{T}=\mu\frac{d\bar{u}}{dn}A_L=-\mu\frac{d\bar{u}}{dr}A_L$$

$\vec{n}$ OPPOSTO A $\vec{r}$ (DIREZIONE DEL RAGGIO)

SOSTITUIAMO SOPRA E PROIETTIAMO LUNGO L'ASSE DEL MOTO:

$$-\bar{G}\,\mathrm{sen}\,\alpha+\bar{P}_1A-\bar{P}_2A+(\overline{M'_L})_x-\bar{T}=0$$

$$\underbrace{-\bar{G}\,\mathrm{sen}\,\alpha+\bar{P}_1A-\bar{P}_2A}_{\gamma LAJ}=-(\overline{M'_L})_x+\bar{T}$$

γLAJ ← VISTO NEL CASO DI REGIME DI MOTO LAMINARE

Sostituendo:

$$\underbrace{\gamma A_L J}_{\tau \cdot A_L} = \rho \overline{u'v'} A_L - \mu \frac{d\bar{u}}{dr} A_L$$

$\tau \cdot A_L$ da $\tau = \frac{T}{A}$ ← vedi caso precedente

Quindi

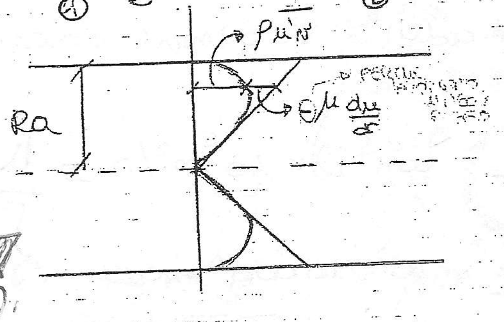
$$\tau \cdot \cancel{A_L} = \cancel{A_L} \left(\underbrace{\rho \overline{u'v'}}_{\text{sforzo dovuto alla turbolenza}} - \overbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dr}}^{\text{sforzo di natura viscosa proporzionale a } \mu} \right)$$

i due termini si annullano perché ↑ Re ⇒ ↓ μ ⇒ $\frac{d\bar u}{dr}$ … laminare … viscosa

Lo sforzo complessivo nel caso di moto turbolento

$$\tau = \underset{①}{\gamma \frac{Ra}{2} J} \;(Ra \to \text{raggio condotta}) = \underset{②}{\rho \overline{u'v'} - \mu \frac{d\bar{u}}{dr}}$$

per cui la distribuzione degli sforzi:

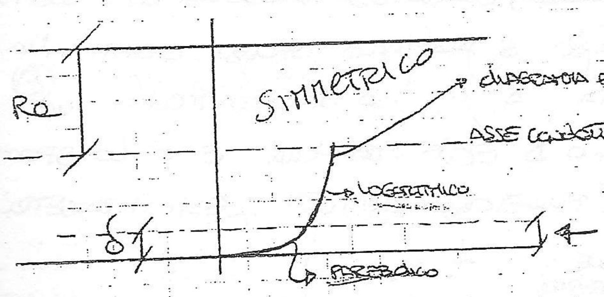


← lo sforzo varia ancora linearmente con il raggio ① ma è dato dalla differenza di due termini ②

- in corrispondenza delle pareti si annulla v' quindi lo sforzo turbolento = 0
- nell'asse della condotta si annullano sia v' che u' = 0

Gli sforzi viscosi sono massimi in prossimità delle pareti.

Qualitativamente la $\boxed{\text{distribuzione delle velocità}}$ nel moto turbolento è:



← strato limite viscoso di ampiezza pari a δ in cui gli sforzi sono di tipo viscoso e prevale un moto laminare piuttosto che turbolento perché la velocità è molto piccola.

- In un moto laminare abbiamo perdite di energia esclusivamente di natura viscosa; in un moto turbolento (in un fluido reale) le perdite di energia sono sia di natura viscosa che dovute all'agitazione. IMP.

Anche per il moto turbolento ci interessa calcolare J così come abbiamo fatto per il moto laminare:

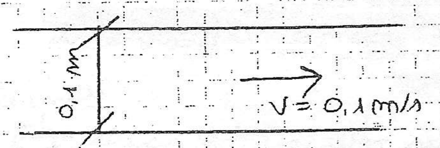
Moto laminare ⟶
$$\begin{cases} J = \dfrac{32 \mu V_m}{\gamma D^2} & \text{con } V_m = \dfrac{1}{32} \dfrac{\gamma J D^2}{\mu} \\ \lambda = \dfrac{64}{Re} = \dfrac{D J}{\frac{V_m^2}{2g}} & \leftarrow \text{condotto circolare} \end{cases}$$

Moto turbolento:

J = cadente piezometrica = perdita di energia per unità di percorso

$$\tau = \gamma \underbrace{\frac{D}{4}}_{\text{raggio idraulico condotta circolare}} J = \Big(\underbrace{\rho \overline{u'v'}}_{\text{sforzo turbolento}} - \underbrace{\mu \frac{d\bar{u}}{dr}}_{\text{sforzo viscoso}} \Big)$$

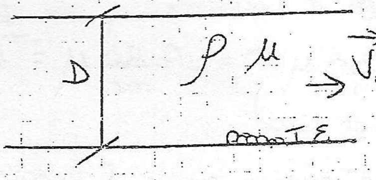
Poiché non sappiamo quanto vale $\overline{u'v'}$ non è possibile calcolare J per via analitica. Nel caso di moto laminare (vedi sopra) è più semplice, ma in una condotta il moto non è mai laminare perché in genere passa acqua (non nafta) e per l'acqua quando Reynolds è maggiore di 4000 il moto è turbolento; immaginiamo di avere un condotto di diametro 0,1 m (piccolo) e V = 0,1 m/s (velocità molto bassa)



$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} \quad \text{con } \nu = 10^{-6}\, m^2/s = \frac{\mu}{\rho}$$

$$Re = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}1}{10^{-6}} = 10^4 = 10.000 > 4000 \ \to \text{moto turbolento}$$

Quindi il moto è quasi sempre turbolento.
Come calcoliamo, quindi, J nel moto turbolento? Applichiamo il teorema Π.
Noi abbiamo un fenomeno fisico complesso, ovvero una condotta dove scorre del fluido, e abbiamo sforzi dovuti alla viscosità, a ρ, una velocità media, un diametro D e la scabrezza ε e lo sforzo τ.



τ è funzione di tutti questi parametri

ovvero:

$$\tau = f(\rho, \mu, V, D, \underbrace{\varepsilon}_{\text{dimensione delle asperità}})$$

Scegliamo ρ, V, D come grandezze fondamentali e troviamo il legame tra τ e le altre grandezze.

$$\frac{\tau}{\rho^{\alpha} V^{\beta} D^{\gamma}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\gamma_1}}, \frac{\varepsilon}{\rho^{\alpha_2} V^{\beta_2} D^{\gamma_2}} \right)$$

TROVIAMO I COEFFICIENTI $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ AFFINCHÉ I RAPPORTI SIANO NUMERI PURI:

$$T = \frac{kg\, m\, s^{-2}}{m^2} = kg\, m^{-1}\, s^{-2}$$

$$\rho = kg\, m^{-3}$$

$$D = m$$

$$V = m\, s^{-1}$$

$$\mu = kg\, m^{-1}\, s^{-1}$$

$$\varepsilon = m$$

(1) $$kg\, m^{-1}\, s^{-2} = (kg\, m^{-3})^{\alpha} (m\, s^{-1})^{\beta}\, m^{\gamma}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ -1 = -3 + \beta + \gamma \\ -2 = -\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(2) $$kg\, m^{-1}\, s^{-1} = (kg\, m^{-3})^{\alpha_1} (m\, s^{-1})^{\beta_1}\, m^{\gamma_1}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

(3) $$m = (kg\, m^{-3})^{\alpha_2} (m\, s^{-1})^{\beta_2}\, m^{\gamma_2}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

SOSTITUENDO SI HA:

$$\frac{T}{\rho V_m^2} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho V D}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

MA $T = \gamma \frac{D}{4} J$

Sostituiamo e moltiplichiamo e dividiamo per due il primo membro

$$\frac{2}{2}\left(\frac{\cancel{\gamma}^{\,g}\,\frac{D}{4}J}{\cancel{\rho}\,V_m^2}\right)=\varphi\left(\frac{\mu}{\rho V D},\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

quindi:

$$\frac{DJ}{8\,\frac{V_m^2}{2g}}=\varphi\left(\frac{\mu}{\rho V D},\frac{\varepsilon}{D}\right)$$ moltiplichiamo tutto per 8

λ = un'altra funzione

$$\underbrace{\frac{DJ}{\frac{V_m^2}{2g}}}_{\lambda\ =\ \text{parametro di scala}}=\overset{\lambda}{8\varphi}\left(\underbrace{\frac{\mu}{\rho V D}}_{Re},\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

con $\lambda=\dfrac{DJ}{\frac{V_m^2}{2g}}$ = parametro di scala

cioè:

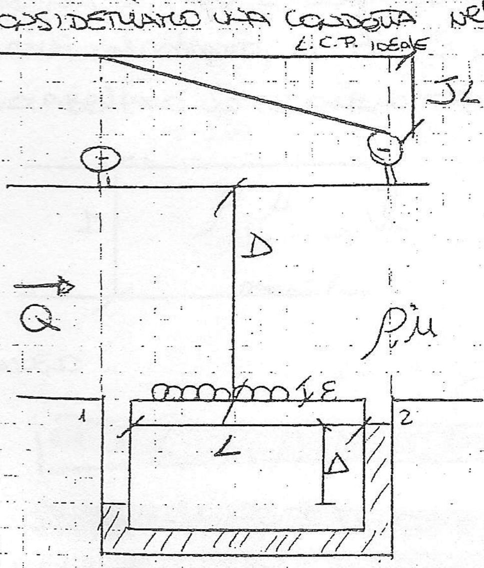
$$\lambda=\lambda\left(Re,\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Applicando il teorema Π abbiamo trovato un legame tra numeri puri (3) riducendo il numero di variabili di partenza (6).

LEZIONE N° 15 (continuazione) 11/04/2011

L'obiettivo è calcolare J; col teorema Π abbiamo trovato il legame tra i numeri puri, per trovare il valore della funzione dobbiamo andare in laboratorio. Inizialmente lavoriamo su un tubo liscio:

Consideriamo una condotta nella quale transita una portata Q regolata



da un rubinetto. Dal valore della portata è possibile ricavare la velocità $\rightarrow V=\frac{Q}{A}$.

Del liquido che transita sono note le caratteristiche (ρ,μ); per calcolare la cadente piezometrica abbiamo bisogno di uno strumento che ci indichi il carico piezometrico (piezometri, manometri), possiamo utilizzare un manometro differenziale: se il fluido fosse ideale i due menischi si porterebbero alla stessa quota, poiché il fluido è reale ci saranno delle perdite per cui i due menischi avranno un dislivello pari a Δ.

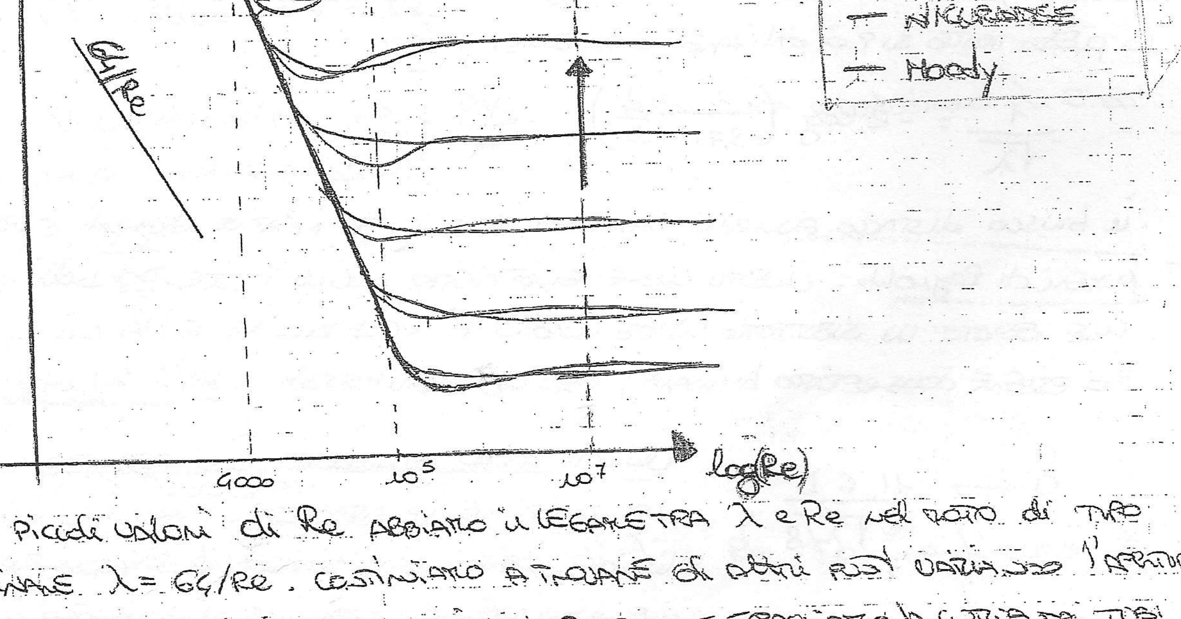
$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = 52 \rightarrow \text{perdite continue}$$

↓ differenza di quote piezometriche

PER CUI:

$$J = \frac{\delta}{L} \quad \text{DATI} \quad Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad e \quad \lambda = \frac{D J}{\frac{V_m^2}{2g}}$$

PER UN CERTO VALORE di Q E QUINDI di V POSSIAMO STABILIRE IL LEGAME TRA λ e Re, OVVERO IN UN DIAGRAMMA RIPORTIAMO PER PUNTI LE COORDINATE di λ ~~e Re~~ e Re



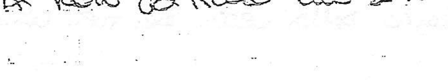
PER PICCOLI VALORI di Re ABBIAMO IL LEGAME TRA λ e Re NEL MOTO di TIPO LAMINARE $\lambda = 64/Re$. CONTINUIAMO A TROVARE ALTRI PUNTI VARIANDO L'APERTURA DELLA VALVOLA E QUINDI FACENDO VARIARE LA PORTATA E TRACCIAMO LA CURVA DEI TUBI LISCI, PER UN MOTO di TIPO TURBOLENTO;

PER $Re < 10^5 \longrightarrow \lambda = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$ ← FORMULA di BLASIUS

PER $Re > 10^7 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}$

MA λ È FUNZIONE NON SOLO DEL NUMERO di Reynolds MA ANCHE DELLA SCABREZZA:

$$\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$



CIOÈ LE RESISTENZE SONO DOVUTE AL MOTO VORTICOSO CHE SI HA IN CORRISPONDENZA DELLA delle asperità; è necessario trovare il legame tra questi numeri puri attraverso delle esperienze in laboratorio per potere tracciare (sempre per tubi) delle altre curve:

NIKURADSE → ha creato delle scabrezze relative artificiali, mettendo sul tubo della sabbia di granulometria costante di diametro pari a d. (nei tubi passa acqua). Fece delle prove su diversi tubi (diverse curve) variando il diametro della sabbia.
Per una certa scabrezza relativa pari a d/D, variando la portata Q, si ottengono dei valori di λ e Re

Inizialmente il tubo si comporta come liscio, ovvero la curva segue quella dei tubi lisci; dopo un certo valore di Reynolds la curva è indipendente da Re e in questo tratto si può utilizzare l'espressione:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{1}{3{,}71}\cdot\frac{d}{D}\right)$$

Il brusco distacco avviene prima per scabrezze relative grandi e per bassi numeri di Reynolds. Questo viene giustificato anche partendo dall'ipotesi che esiste un substrato limite viscoso δ (che ricopre ε) in cui il moto può essere considerato laminare; per via sperimentale si ha:

$$\delta \longrightarrow \frac{11{,}6\, D}{Re\sqrt{\lambda/8}}$$

Quindi fino a quando δ è abbastanza grande da ricoprire le asperità il tubo si comporta come liscio, ovvero non si hanno quei fenomeni turbolenti che aumentano la resistenza al moto. Per cui una volta superato lo strato δ le asperità vengono fuori tutte in una volta per cui si ha il brusco distacco dalla retta dei tubi lisci, essendo δ inversamente proporzionale a Re quindi se Re aumenta δ diminuisce, essendoci un brusco aumento della resistenza al moto.
Questo diagramma è stato tracciato per asperità artificiali ovvero di diametro costante pari a d; i tubi commerciali hanno asperità di diametro variabile per cui indichiamo con ε l'asperità media

↓

Moody → essendo le asperità con diametro variabile, man mano che Re aumenta δ diminuisce e vengono fuori le asperità più alte, per cui l'abaco di Moody ci rappresenta questa situazione, ovvero si evidenzia un distacco dalla retta dei tubi lisci più "dolce" e non si ha più la

La parte in cui la curva rivolge la concavità verso il basso (rosso).

Per il calcolo di λ si può utilizzare:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3{,}71}\cdot\frac{\varepsilon}{D}\right)} \leftarrow \text{Colebrook}$$

oppure si ricava direttamente dall'abaco di Moody

Applicazione n°1

Supponiamo di conoscere: Q, D, ε e di voler calcolare $J = ?$

Da Q e D ci ricaviamo $V = \dfrac{Q}{\pi\frac{D^2}{4}}$

Nota la V ci calcoliamo $Re = \dfrac{\rho V D}{\mu}$ e dalla curva ci calcoliamo λ e da λ troviamo J dall'espressione:

$$\lambda = \frac{DJ}{\frac{V_m^2}{2g}}$$

Applicazione n°2

Q, D, J assegnati $\quad \varepsilon = ?$

Entriamo nel diagramma con i valori di λ e Re, troviamo la curva $\frac{\varepsilon}{D}$, moltiplichiamo per D e troviamo ε.

Moto assolutamente turbolento

Nel moto assolutamente turbolento, invece di utilizzare l'abaco di Moody possiamo utilizzare delle formule pratiche per il calcolo della cadente piezometrica; si parte sempre da:

raggio idraulico

$$\lambda = \frac{DJ}{\frac{V_m^2}{2g}} \quad \text{con } R = \frac{D}{4} \text{ per cui } D = 4R$$

Quindi:

$$\lambda = \frac{4RJ}{\frac{V_m^2}{2g}} = \frac{8gRJ}{V_m^2}$$

da cui si ha:

$$V^2 = \frac{8g\,RJ}{\lambda} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{8g\,RJ}{\lambda}} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{RJ}$$

← si può anche in funzione di λ

$\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ → C = coefficiente di scabrezza

$$V = C\sqrt{RJ} \Rightarrow V^2 = C^2RJ$$ ← formula di Chezy

ovvero:

$$\boxed{J = \frac{V^2}{C^2R}}$$

con C =

- Strikler (k) → $C = kR^{\frac{1}{6}}$
- Kutter (m) → $C = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$
- Bazin (γ) → $C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$

con K, m, γ tabellati

Un'altra espressione per calcolare J:

$$\boxed{J = \frac{\beta Q^2}{D^5}}$$ ← Darcy

vale per tubi in ghisa e acciaio inferiori a 500 mm con $\beta = f(D)$

β =
- $0{,}00164 + 0{,}000042/D$ per tubi nuovi
- per tubi usati si raddoppiano i coefficienti.

Lezione n° 16   12/04/2011

Moti di filtrazione

È il movimento di un fluido attraverso un corpo poroso in cui il moto si verifica anche sotto l'azione di lievi differenze di pressione (permeabili). I corpi porosi si dividono in corpi impermeabili (argilla) e corpi permeabili (sabbia: si fa attraversare dal liquido). In realtà non esistono corpi completamente impermeabili, perché con alte pressioni anche questi ultimi si fanno attraversare dal fluido. La capacità di lasciarsi attraversare da un fluido è legata dalla dimensione dei granuli del terreno.
Il moto di filtrazione è un moto di tipo laminare (regolare) perché è un moto molto lento (velocità bassa).