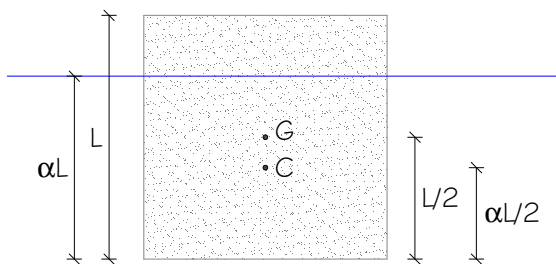


1. Un cubo di lato L e peso specifico γ' è immerso in un fluido di peso specifico γ . Determinare il grado di affondamento α del lato del cubo e la condizione di stabilità del cubo.



Per determinare il **grado di affondamento** è necessario imporre la condizione di galleggiamento, che si ottiene eguagliando la spinta di Archimede S , che dipende dal volume immerso, al peso del corpo P :

$$\left. \begin{array}{l} P = \gamma' L^3 \\ S = \gamma \alpha L^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma' L^3 = \gamma \alpha L^3 \Rightarrow \alpha = \gamma' / \gamma.$$

La condizione di stabilità è espressa da

$$\frac{I}{V_c} > \overline{CG},$$

in cui

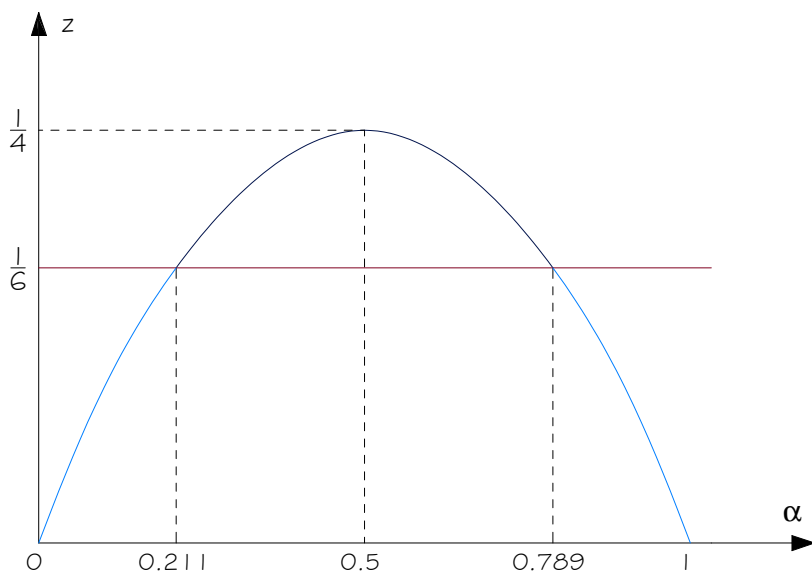
$$I = \frac{L^4}{12}$$

è il momento d'inerzia della sezione di galleggiamento rispetto all'asse baricentrico,

$$V_c = \alpha L^3$$

è il volume di carena, G è il baricentro del cubo, mentre C è quello della sola parte immersa, che si trova a metà di αL :

$$\begin{aligned} \frac{I}{V_c} &= \frac{L}{12\alpha} \\ \overline{CG} &= \frac{L}{2} - \alpha \frac{L}{2} = \frac{L}{2}(1 - \alpha) \\ &\Downarrow \\ \frac{I}{6} &> \alpha(1 - \alpha) \end{aligned}$$



Quindi bisogna valutare per quali valori di α la funzione

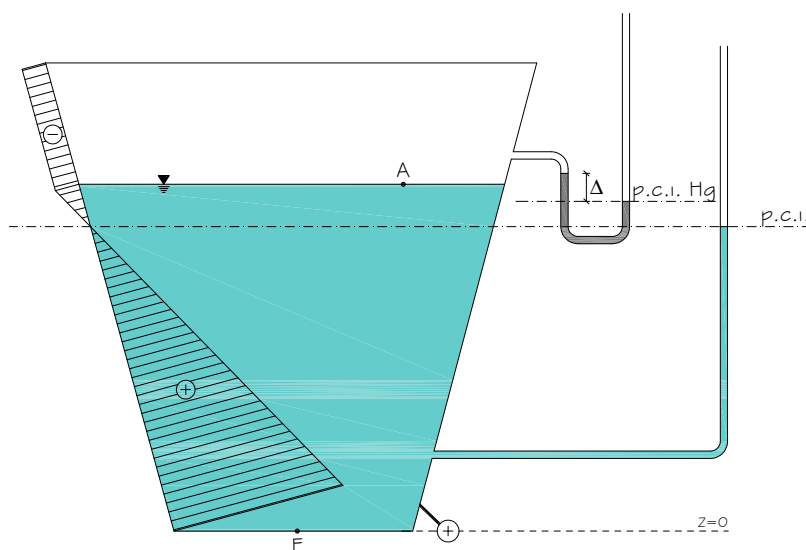
$z = \alpha(1 - \alpha)$ è minore di $1/6$; dal diagramma della funzione e individuando quali sono i punti di intersezione con $z = 1/6$ per via matematica si ottiene

$$\frac{1}{6} = \alpha(1 - \alpha) \Rightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.211 \\ \alpha = 0.789 \end{cases}$$

L'equilibrio è quindi instabile per $0.211 < \alpha < 0.789$, mentre è stabile per $0 < \alpha < 0.211$ e per $0.789 < \alpha < 1$.

2. Il recipiente chiuso schematizzato in figura contiene acqua per un'altezza $H=2$ m dal fondo e superiormente aria. L'indicazione del manometro a mercurio, con la presa nella parte occupata dall'aria, è Δ .

Determinare l'indicazione n , in kg/cm^2 , del manometro metallico il cui centro si trova alla quota del fondo del recipiente. Indicare l'altezza h dal fondo del recipiente a cui si porta il menisco del piezometro e tracciare il diagramma delle pressioni lungo una parete laterale del serbatoio.



$$\begin{aligned} \gamma &= 9800 \text{ N/m}^3 \\ \gamma_M &= 133300 \text{ N/m}^3 \\ z_A &= H = 2 \text{ m} \\ \Delta &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dall'indicazione del manometro a mercurio si deduce facilmente che il serbatoio è in depressione; poiché infatti la quota del mercurio è più alta nel ramo di sinistra, allora la spinta esercitata dall'aria esterna sul mercurio sarà più forte della spinta esercitata dall'aria che sta all'interno del serbatoio.

Nota il dislivello Δ e il piano dei carichi idrostatici del mercurio è possibile determinare la pressione sul pelo libero del fluido, cioè nel punto A, supponendo che la pressione dell'aria che si trova aldisopra sia costante:

$$p_A = \gamma_M (-\Delta) = 133300 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} (-0,06 \text{ m}) = -7998 \text{ Pa}$$

Nota la pressione in corrispondenza della superficie libera, mediante la legge di Stevino

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}$$

è possibile ricavare quella che si ha in corrispondenza del fondo:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_F + \frac{p_F}{\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$p_F = p_A + \gamma H = -7998 \text{ Pa} + 9800 \cdot 2 \text{ Pa} = 11602 \text{ Pa}$$

Poiché si vuole sapere qual è l'indicazione del manometro è necessario esprimere questa pressione in kg/cm^2 ; basta ricordare che

$$1 \text{ kg}_{\text{forza}} = 9.81 \text{ N}$$

$$n = 11602 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 11602 \frac{\text{kg}}{9.81 \cdot 10^4 \text{cm}^2} = 11827 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Anche per individuare la **quota alla quale si porta il menisco** nel piezometro è possibile sfruttare la legge di Stevino:

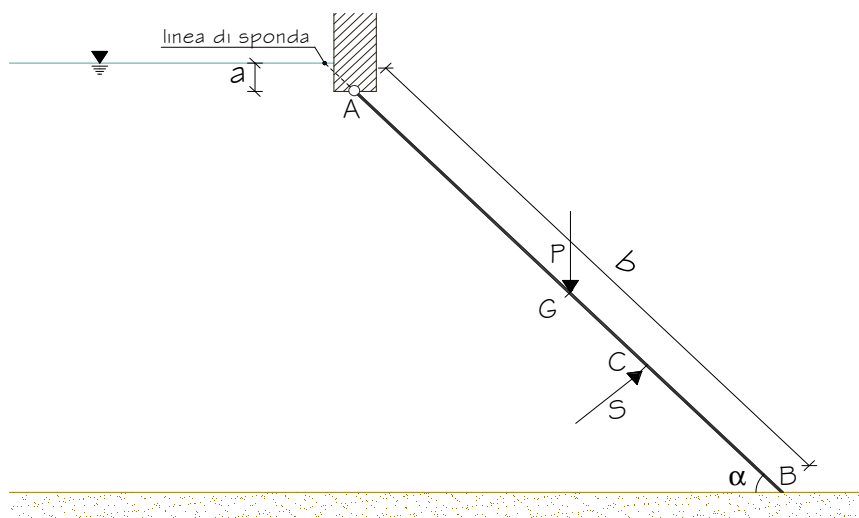
$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z_f + \frac{p_f}{\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$z_0 = \frac{p_f}{\gamma} = \frac{11602}{9800} \text{ m} = 1.184 \text{ m}$$

3. Determinare la minima forza verticale P da applicare nel baricentro G per assicurare l'equilibrio della paratia piana di traccia AB incernierata in A ed appoggiata in B , noti il battente d'acqua a , l'inclinazione α , e le dimensioni della paratia (profondità unitaria perpendicolarmente al disegno).

Se la cerniera fosse in B e l'appoggio in A , quale valore avrebbe la forza?



$$\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$$

$$a = 0.1 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Nota l'affondamento h_c del baricentro rispetto al piano dei carichi idrostatici, è possibile determinare la spinta esercitata dall'acqua sull'opera di sbarramento:

$$h_c = a + \frac{b}{2} \sin \alpha$$

$$S = \gamma h_c A = \gamma h_c b \cdot 1 \text{ m} = 15819 \text{ N.}$$

Il centro di spinta C sarà posto ad una distanza x_c dalla linea di sponda pari a

$$x_c = \frac{I}{M} = \frac{I_0}{M} + x_G,$$

in cui I è il momento d'inerzia della paratia rispetto all'asse passante per il centro di spinta, I_0 quello calcolato rispetto all'asse baricentrico, mentre M è il momento statico:

$$M = x_G A = \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{\sin \alpha} \right) b \cdot 1 \text{ m} = 2.28 \text{ m}^3 \quad I_0 = \frac{1}{12} (1 \text{ m}) b^3 = \frac{2}{3} \text{ m}^4$$

$$x_c = \frac{2}{3 \cdot 2.28} \text{ m} + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{\sin \alpha} \right) = 1.434 \text{ m}.$$

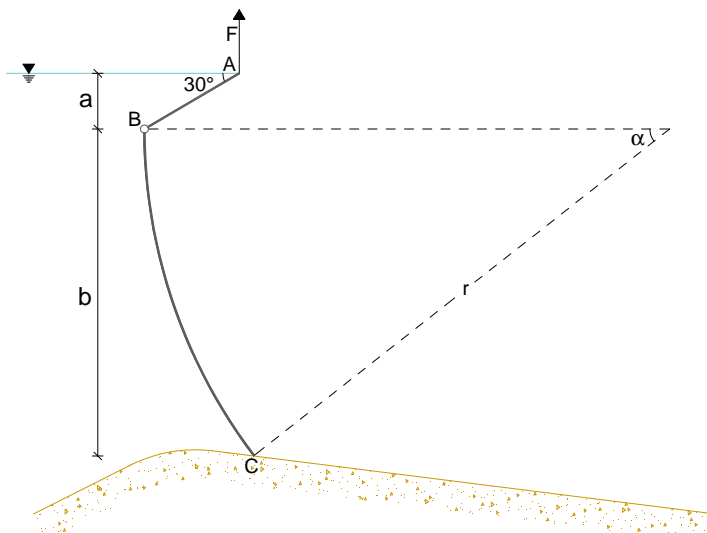
Affinché la paratia sia in equilibrio deve risultare

$$S \cdot \overline{AC} = P \cdot \overline{AG} \cos \alpha \Rightarrow P = \frac{S \cdot \overline{AC}}{\overline{AG} \cos \alpha} = \frac{S \cdot \left(x_c - \frac{a}{\sin \alpha} \right)}{\frac{b}{2} \cos \alpha} = 28917 \text{ N}.$$

Se la cerniera fosse in B si avrebbe

$$S \cdot \overline{CB} = P \cdot \overline{GB} \cos \alpha \Rightarrow P = \frac{S \cdot \overline{CB}}{\overline{GB} \cos \alpha} = \frac{S \cdot \left(b - x_c + \frac{a}{\sin \alpha} \right)}{\frac{b}{2} \cos \alpha} = 15826 \text{ N}.$$

4. Lo schema riportato in figura rappresenta la sezione di una traversa fluviale. Per la paratoia e la sottostante ventola, lo schema e le dimensioni sono come segue:



$$\begin{aligned} \gamma &= 9800 \text{ N/m}^3 \\ a &= 2.5 \text{ m} \\ b &= 14.7 \text{ m} \\ r &= 24 \text{ m} \\ \overline{AB} &= 5 \text{ m} \\ \alpha &= 37.7^\circ \end{aligned}$$

Calcolare con riferimento ad una lunghezza unitaria le seguenti forze: la spinta sulla paratoia piana AB, lo sforzo F sul tirante ammettendo la paratoia AB incernierata in B. Per ultimo determinare la spinta sulla paratoia a settore BC.

La spinta su AB è pari a

$$S = \gamma h_c A = \gamma \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \sin 30^\circ \cdot \overline{AB} \cdot 1 \text{ m} = 61250 \text{ N}$$

Il diagramma delle pressioni è di tipo lineare ed assume valore nullo in A, quindi il centro di spinta si trova a $\frac{2}{3} \overline{AB}$ da A.

Affinché la paratoia sia in equilibrio sotto l'azione della forza F deve risultare verificata la seguente uguaglianza

$$S_{AB} \cdot \frac{\overline{AB}}{3} = F \cdot \overline{AB} \cos 30^\circ \Rightarrow F = \frac{S_{AB}}{3 \cdot \cos 30^\circ} = 23575 \text{ N}.$$

La porzione BC è un arco di cerchio. Per calcolare la spinta è possibile applicare al volume di controllo l'equazione globale di equilibrio statico

$$\bar{G} + \bar{\Pi} = 0$$

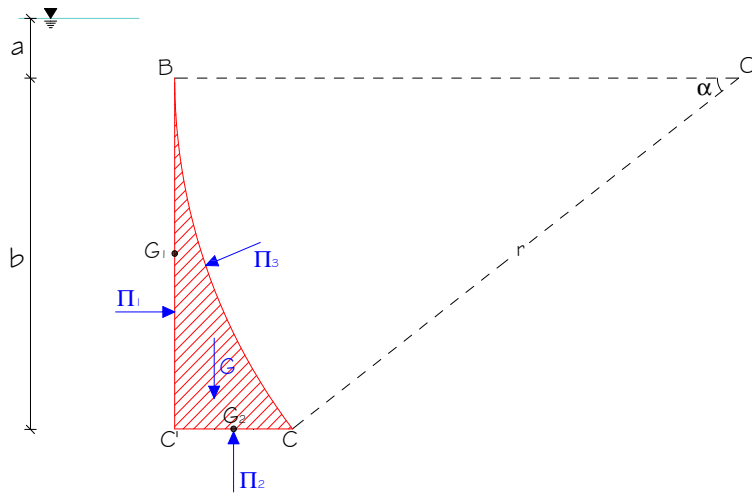
↓

$$\bar{G} + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_3 = 0$$

$\bar{\Pi}_3$ è la spinta che la superficie esercita sul volume di controllo, quindi ciò che bisogna determinare è

$$\bar{S} = -\bar{\Pi}_3 = \bar{G} + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2.$$

La forza peso \bar{G} ha modulo $G = \gamma V$, in cui V è il volume di controllo, che è possibile determinare sommando il volume dei triangoli OBC e BC'C e sottraendo quello relativo alla porzione di cerchio:



$$V = \left(\frac{1}{2} CC' \cdot BC' + \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha - \frac{1}{2180} \frac{\pi \alpha}{r^2} \right) \cdot 1 \text{ m} = 18.94 \text{ m}^3$$

↓

$$G = \gamma V = 185612 \text{ N}$$

$$\Pi_1 = \gamma h_{G1} A_1 = \gamma \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) \cdot b \cdot 1 \text{ m} = 1418991 \text{ N}$$

$$\Pi_2 = \gamma h_{G2} A_2 = \gamma \cdot (a + b) \cdot CC' \cdot 1 \text{ m} = \gamma \cdot (a + b) \cdot AB \sin 30^\circ \cdot 1 \text{ m} = 729864 \text{ N}$$

Considerando un sistema di riferimento come quello indicato e proiettando lungo le due direzioni la spinta, i moduli delle sue componenti risultano

$$S_y = \Pi_2 - G = 544252 \text{ N}$$

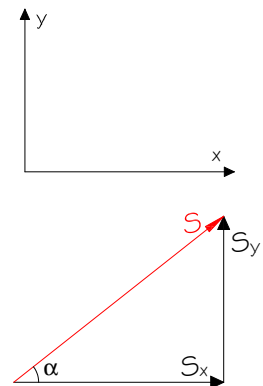
$$S_x = \Pi_1 = 1418991 \text{ N}$$

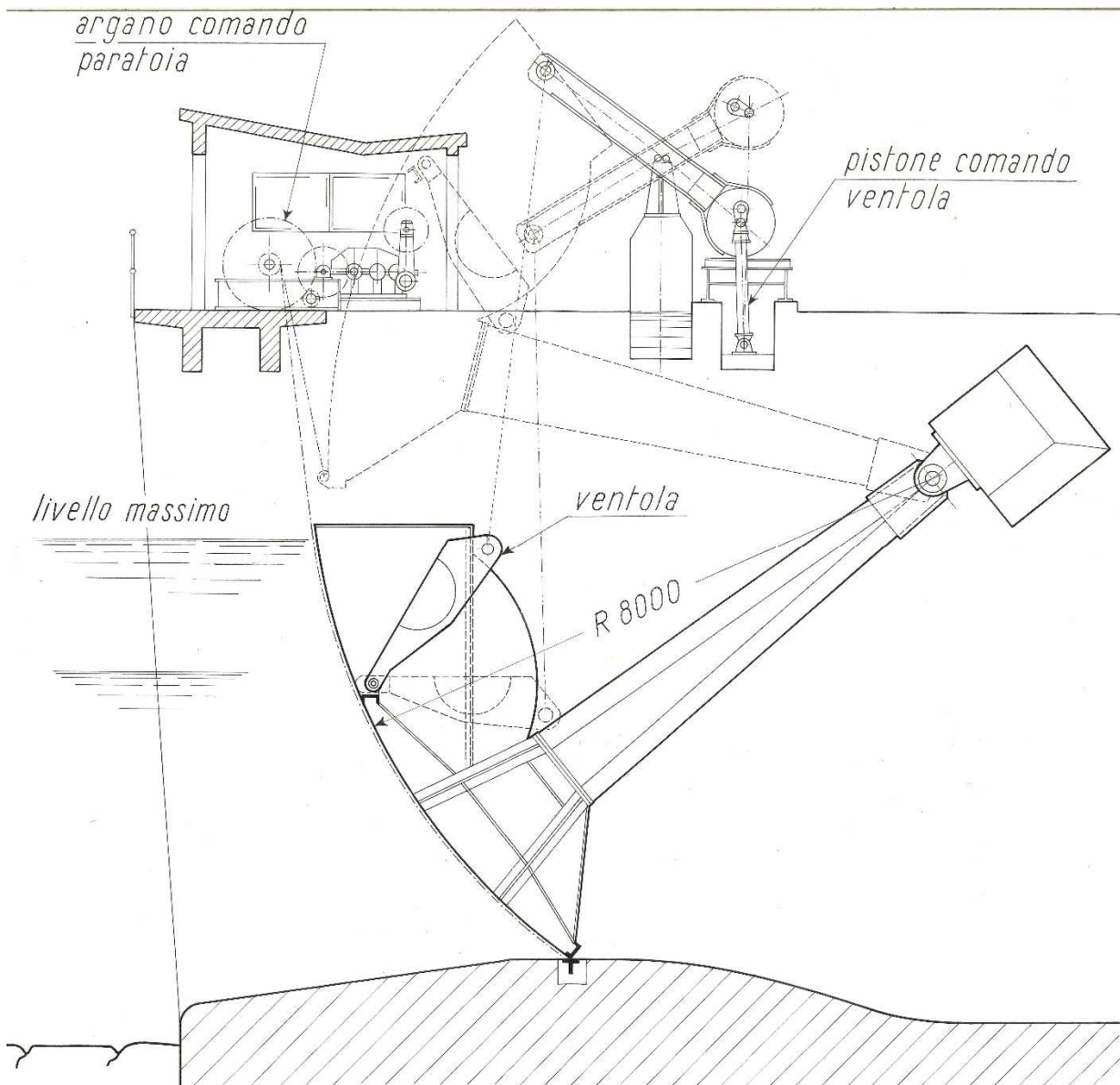
La spinta ha quindi modulo pari a

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 1519868 \text{ N}$$

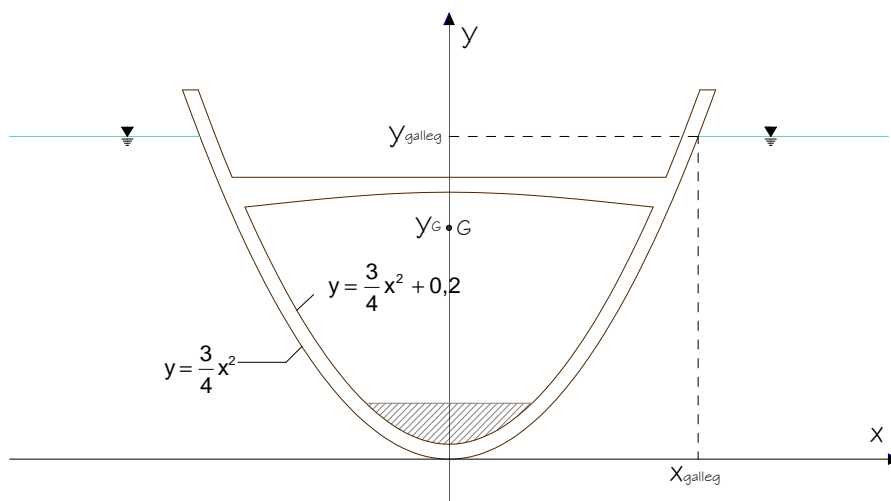
e direzione

$$\text{tg} \alpha = S_y / S_x = 0.38 \Rightarrow \alpha = 21^\circ.$$





5. Assegnata la sezione Ω di uno scafo come in figura, nell'ipotesi che il peso per metro



$$P = 26950 \text{ N}$$

$$y_G = 1,75 \text{ m}$$

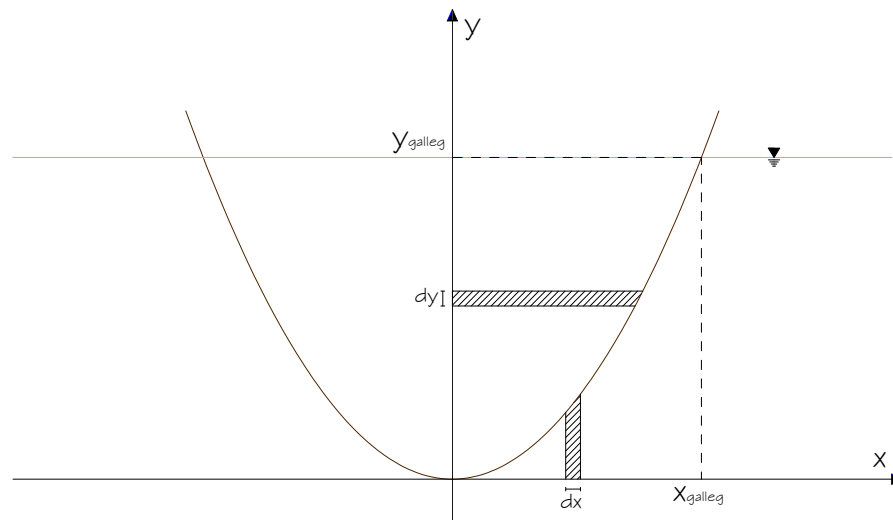
$$\gamma_c = 24500 \text{ N/m}^3$$

lineare dello scafo e delle sovrastrutture

sia di 26950 N e che il baricentro G si trovi a 1,75 m dalla generatrice inferiore della chiglia, determinare la posizione del piano di galleggiamento per cui vi è equilibrio e l'altezza

metacentrica corrispondente. Verificare la stabilità dell'equilibrio e, se risulta instabile, individuare lo spessore di calcestruzzo da disporre sul fondo per renderlo stabile.

Innanzitutto è necessario individuare il piano di galleggiamento, quindi sapere di quanto affonda la barca rispetto alla superficie libera. L'equilibrio si ha quando $P = \gamma V$ (cioè il corpo galleggia quando il suo peso eguaglia la spinta di Archimede), in cui V è il volume di carena. Tale volume si determina come differenza tra l'area del rettangolo avente dimensioni x e y e l'area sottesa dalla curva che individua il volume di carena, cioè



$$V = 2 \left(xy - \int_0^x y dx \right),$$

in quanto la figura è simmetrica. Poiché l'equazione della y è nota, si ha

$$V = 2 \left(\frac{3}{4} x^3 - \int_0^x \frac{3}{4} x^2 dx \right) = 2 \left(\frac{3}{4} x^3 - \frac{1}{4} x^3 \right) = x^3 \Rightarrow P = \gamma x^3.$$

Sfruttando questa uguaglianza si possono determinare la x e la y di galleggiamento:

$$P = \gamma x_{galleg}^3 \Rightarrow x_{galleg} = \left(\frac{P}{\gamma} \right)^{1/3}$$

↓

$$y_{galleg} = \frac{3}{4} \left(\frac{P}{\gamma} \right)^{2/3} = 1.47 \text{ m}$$

Ciò vuol dire che la generatrice inferiore della chiglia è affondata rispetto al livello di medio mare di 1.47 m.

Il metacentro M dista dal baricentro C del volume di carena di una quantità pari a:

$$CM = y_M - y_C = \frac{l_0}{V_c} \Rightarrow y_M = y_C + \frac{l_0}{V_c},$$

Per determinarne la posizione di C consideriamo che il momento statico di una generica superficie è $M = y_C A$, quindi $y_C = M/A$:

$$y_C = \frac{M}{A} = \frac{\int_0^{y_{galleg}} 2y dA}{\int_0^{y_{galleg}} dA} = \frac{\int_0^{y_{galleg}} 2yx dy}{\int_0^{y_{galleg}} 2x dy} = \frac{\int_0^{y_{galleg}} 2y \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} y^{1/2} dy}{\int_0^{y_{galleg}} 2 \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} y^{1/2} dy} = \frac{\int_0^{y_{galleg}} y^{3/2} dy}{\int_0^{y_{galleg}} y^{1/2} dy} = \frac{3}{5} y_{galleg}$$

$$y_C = 0.882 \text{ m}$$

Il momento di inerzia I_0 si determina ragionando sempre su un metro di profondità, come se avessimo una sezione rettangolare di dimensioni 1 m e $2x_{galleg}$:

$$I_0 = \frac{1}{12} b l^3 = \frac{1}{12} \cdot 1 \text{ m} \cdot (2x_{galleg})^3 = \frac{2}{3} x_{galleg}^3 \cdot 1 \text{ m},$$

mentre

$$V = x_{galleg}^3,$$

quindi

$$\frac{I_0}{V_c} = \frac{2}{3} \text{ m}$$

Nota l'altezza metacentrica

$$y_M = y_C + \frac{2}{3} \text{ m} = 1.55 \text{ m},$$

è possibile anche verificare la stabilità del natante.

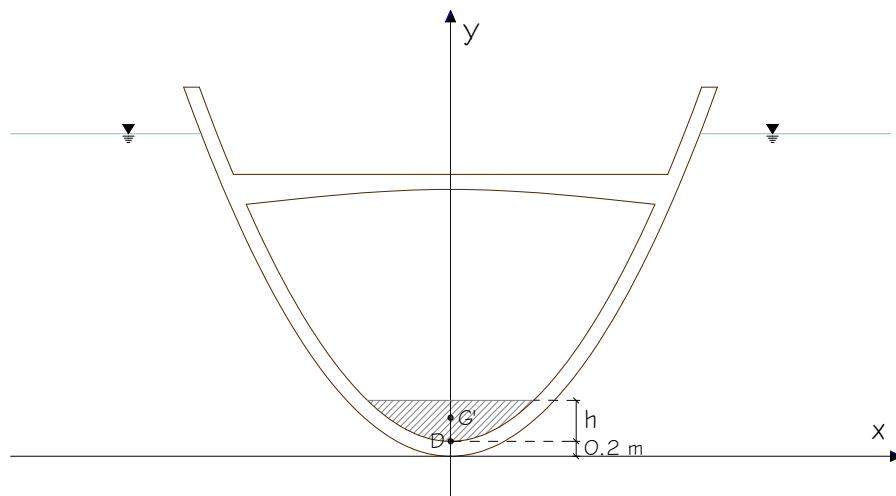
La condizione di stabilità per tutti i corpi galleggianti è espressa dalla disuguaglianza

$$\frac{I_0}{V_c} > \overline{CG} \quad \frac{I_0}{V_c} > y_G - y_C.$$

Nel nostro caso risulta

$$\frac{I_0}{V_c} = 0.667 \text{ m} \quad y_G - y_C = 1.75 \text{ m} - 0.882 \text{ m} = 0.862 \text{ m},$$

quindi la condizione di stabilità non risulta soddisfatta perché il baricentro si trova troppo in alto. Per ottenere la verifica della condizione di stabilità è possibile zavorrare il natante e individuare lo spessore h di calcestruzzo da disporre sul fondo al fine di raggiungere tale scopo.



Il peso del calcestruzzo che costituisce la zavorra è

$$P' = \gamma_c V',$$

in cui

$$V' = 2 \int_0^h x dy = 2 \int_0^h \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} y^{1/2} dy = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} h^{3/2},$$

quindi

$$P' = \gamma_c \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} h^{3/2} = Ah^{3/2}$$

avendo posto

$$A = \gamma_c \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}.$$

Questo volume di calcestruzzo avrà un suo baricentro G' . Sappiamo che

$$y_C = \frac{3}{5} y_{galleg},$$

quindi analogamente

$$DG' = \frac{3}{5} h \quad y_{G'} = \frac{3}{5} h + 0.2 \text{ m}.$$

L'aggiunta della zavorra modifica la posizione del baricentro. La nuova posizione y'_G del baricentro si determina a partire dalla relazione

$$(P + P') y'_G = P' y_{G'} + P y_G$$

⇓

$$y'_G = \frac{P' y_{G'} + P y_G}{P + P'} = \frac{P' \left(\frac{3}{5} h + 0.2 \text{ m}\right) + P y_G}{P + P'} = \frac{Ah^{3/2} \left(\frac{3}{5} h + 0.2 \text{ m}\right) + P y_G}{P + Ah^{3/2}}.$$

Inoltre, con l'aggiunta della zavorra, anche la x e la y di galleggiamento, e quindi la posizione del centro di carena si modificano. Si avrà:

$$P + P' = \gamma \left(x'_{galleg}\right)^3 \Rightarrow x'_{galleg} = \left(\frac{P + P'}{\gamma}\right)^{1/3}$$

⇓

$$y'_{galleg} = \frac{3}{4} \left(\frac{P + P'}{\gamma}\right)^{2/3}$$

⇓

$$y'_c = \frac{3}{5} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{P + P'}{\gamma}\right)^{2/3} \right] = \frac{9}{20} \left(\frac{P + Ah^{3/2}}{\gamma}\right)^{2/3}.$$

Imponiamo la condizione di stabilità:

$$\frac{l'_0}{V'_c} > \overline{C'G'} \quad \frac{l'_0}{V'_c} > y'_G - y'_c.$$

Si ha

$$l'_0 = \frac{2}{3} \left(x'_{galleg}\right)^3 \cdot \text{lm} \quad V = \left(x'_{galleg}\right)^3,$$

quindi

$$\frac{2}{3} m > y'_G - y'_c$$

$$\frac{2}{3} m > \frac{Ah^{3/2} \left(\frac{3}{5} h + 0.2 \text{ m}\right) + P y_G}{P + Ah^{3/2}} - \frac{9}{20} \left(\frac{P + Ah^{3/2}}{\gamma}\right)^{2/3}$$

Abbiamo così un'equazione nell'unica incognita h. Ponendo

$$\frac{Ah^{3/2} \left(\frac{3}{5}h + 0.2 \text{ m} \right) + Py_G}{P + Ah^{3/2}} - \frac{9}{20} \left(\frac{P + Ah^{3/2}}{\gamma} \right)^{2/3} = \delta(h),$$

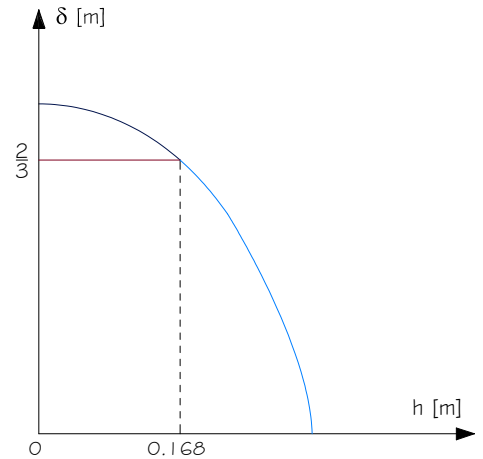
e diagrammando δ in funzione di h, si deduce che il campo in cui

$$\delta < \frac{2}{3} \text{ m}$$

è quello a destra di

$$h = 0.168 \text{ m},$$

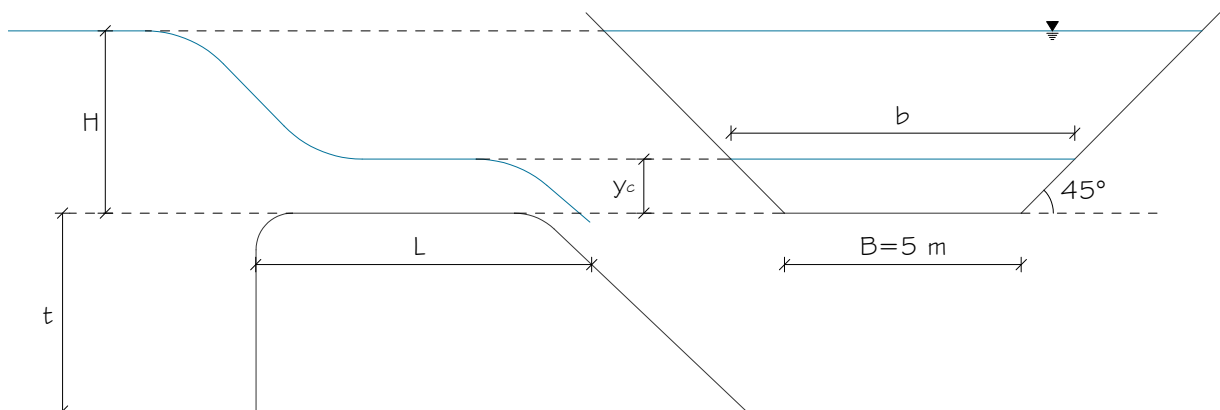
che quindi rappresenta lo spessore minimo di calcestruzzo necessario per garantire la stabilità del natante.



Peso blocco calcestruzzo $P' = \gamma_c \left(\frac{4}{3} \right)^{3/2} h^{3/2} = Ah^{3/2} = 2600 \text{ N/m}^3$

$V'_c = 3.17 \text{ m}^3$, $y'_{galleg} = 1.62 \text{ m}$, $x'_{galleg} = 1.47 \text{ m}$, $y'_c = 0.97 \text{ m}$, nuova altezza metacentrica $y'_M = 1.63 \text{ m}$.

6. Dato lo stramazzo trapezoidale in parete grossa, come indicato in figura, determinare la scala delle portate dello stesso



Questo tipo di stramazzo, detto anche stramazzo a larga soglia, è un dispositivo che viene spesso utilizzato per la misura della portata nei canali. Consiste in uno sbarramento dell'alveo, che ne occupa l'intera larghezza; gli spigoli della soglia sono ben arrotondati per impedire un distacco di vena e quindi una perdita di carico localizzata. La larghezza L della soglia deve essere sufficiente perché la vena che su di essa si adagia possa essere assimilata ad una corrente a pelo libero: basta perciò che essa sia un po' maggiore del massimo valore che può assumere il carico H a monte, misurato a partire dalla quota del piano della soglia. L'altezza t della soglia sul fondo del canale d'arrivo deve a sua volta essere tale che la corrente risulti sicuramente influenzata dalla presenza dello stramazzo: ciò è necessario, perché solo in tal caso H dipende univocamente dalla portata e quindi la sua misura può servire a determinarla.

In una certa sezione, imprecisata, sopra la soglia, la corrente passa attraverso lo stato critico, cioè l'altezza della corrente è pari a y_c , che costituisce l'altezza critica, quella in corrispondenza della quale si realizza il massimo valore di portata che può fluire attraverso

la soglia considerata. Nei profili a monte e a valle di y_c si hanno rispettivamente corrente lenta e corrente veloce, mentre in corrispondenza di y_c si hanno traiettorie rettilinee e parallele

È possibile applicare il teorema di Bernoulli tra un punto generico a monte della soglia e un punto che si trova in corrispondenza di una sezione della soglia; a monte la linea dei carichi totali coincide con il pelo libero, perché le velocità sono molto piccole, quindi

$$H = y + \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{2g(H-y)}.$$

La portata Q che transita attraverso la soglia è pari a

$$Q = \Omega \cdot v = \Omega \sqrt{2g(H-y)},$$

in cui Ω è la sezione di passaggio.

y_c , cioè il valore di y per cui la portata Q è massima, è quello in corrispondenza del quale

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dy} &= \frac{d[\Omega \sqrt{2g(H-y)}]}{dy} = \\ &= \frac{d\Omega}{dy} \sqrt{2g(H-y)} - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{2g(H-y)}} 2g = \\ &= \frac{d\Omega}{dy} \sqrt{2g(H-y)} - \frac{g\Omega}{\sqrt{2g(H-y)}} \end{aligned}$$

si annulla.

$d\Omega/dy$ indica di quanto cresce la superficie Ω quando l'altezza idrica è incrementata di dy .

Considerando la nostra sezione trapezoidale

$$d\Omega = b dy \Rightarrow \frac{d\Omega}{dy} = b,$$

quindi

$$\frac{dQ}{dy} = b\sqrt{2g(H-y)} - \frac{g\Omega}{\sqrt{2g(H-y)}}.$$

$$\text{Poniamo } \frac{dQ}{dy} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = y_c \\ b = b_c \\ \Omega = \Omega_c \\ Q = Q_{\max} \end{cases} :$$

$$b_c \sqrt{2g(H-y_c)} - \frac{g\Omega_c}{\sqrt{2g(H-y_c)}} = 0,$$

da cui

$$H = y_c + \frac{\Omega_c}{2b_c}$$

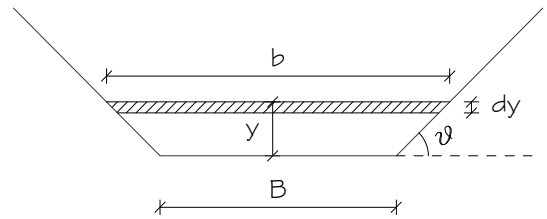
$$Q_{\max} = \Omega_c \sqrt{2g(H-y_c)}.$$

Nota l'altezza critica y_c è allora possibile ricavare b_c e Ω_c :

$$b_c = B + 2 \cdot y_c \cot g\vartheta$$

$$\Omega_c = \frac{(b_c + B) \cdot y_c}{2}$$

e quindi H e Q_{\max} .



Fissando dei valori di y_c e determinando il carico H e la portata Q corrispondenti, è possibile ottenere la scala delle portate dello stramazzo, cioè il legame tra H e Q . In questo modo, misurato il valore di H a monte della soglia, mediante il diagramma è possibile ricavare il valore di portata massima corrispondente.

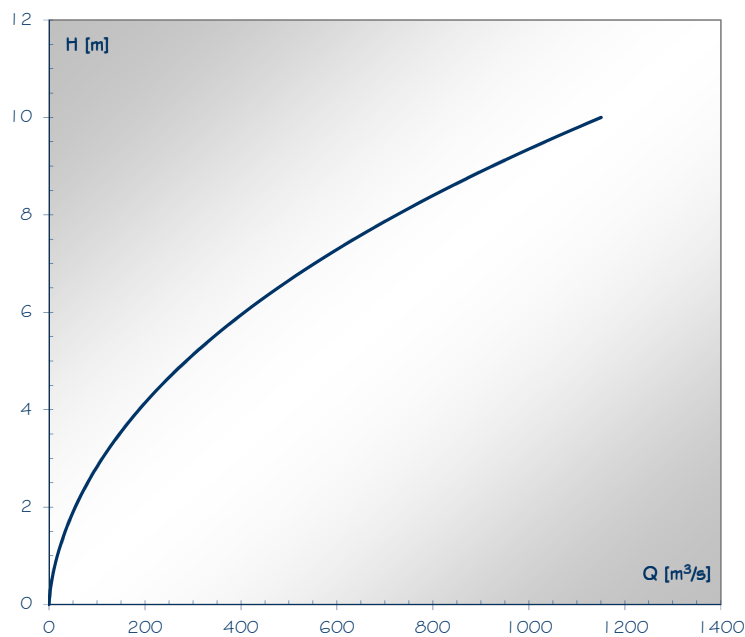
Considerando la geometria del nostro stramazzo, cioè

$$B=5m \quad \vartheta=45^\circ$$

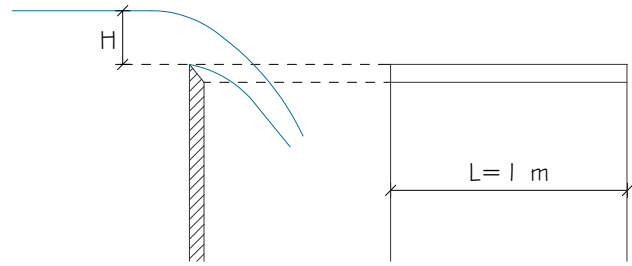
sono stati ottenuti i seguenti risultati:

| y_c [m] | b_c [m] | Ω_c [m] | H [m] | Q [m ³ /s] |
|-----------|-----------|----------------|---------|-------------------------|
| 0.25 | 5.5 | 1.313 | 0.369 | 2.008 |
| 0.5 | 6 | 2.75 | 0.729 | 5.83 |
| 0.75 | 6.5 | 4.313 | 1.082 | 11 |
| 1 | 7 | 6 | 1.429 | 17.39 |
| 1.25 | 7.5 | 7.813 | 1.771 | 24.97 |
| 1.5 | 8 | 9.75 | 2.109 | 33.71 |
| 1.75 | 8.5 | 11.81 | 2.445 | 43.61 |
| 2 | 9 | 14 | 2.778 | 54.68 |
| 2.25 | 9.5 | 16.31 | 3.109 | 66.94 |
| 2.5 | 10 | 18.75 | 3.438 | 80.4 |
| 2.75 | 10.5 | 21.31 | 3.765 | 95.08 |
| 3 | 11 | 24 | 4.091 | 111 |
| 3.25 | 11.5 | 26.81 | 4.416 | 128.2 |
| 3.5 | 12 | 29.75 | 4.74 | 146.7 |
| 3.75 | 12.5 | 32.81 | 5.063 | 166.5 |
| 4 | 13 | 36 | 5.385 | 187.6 |
| 4.25 | 13.5 | 39.31 | 5.706 | 210.1 |
| 4.5 | 14 | 42.75 | 6.027 | 233.9 |
| 4.75 | 14.5 | 46.31 | 6.347 | 259.2 |
| 5 | 15 | 50 | 6.667 | 285.9 |

| y_c [m] | b_c [m] | Ω_c [m] | H [m] | Q [m ³ /s] |
|-----------|-----------|----------------|---------|-------------------------|
| 5.25 | 15.5 | 53.81 | 6.986 | 314 |
| 5.5 | 16 | 57.75 | 7.305 | 343.6 |
| 5.75 | 16.5 | 61.81 | 7.623 | 374.6 |
| 6 | 17 | 66 | 7.941 | 407.2 |
| 6.25 | 17.5 | 70.31 | 8.259 | 441.3 |
| 6.5 | 18 | 74.75 | 8.576 | 477 |
| 6.75 | 18.5 | 79.31 | 8.894 | 514.2 |
| 7 | 19 | 84 | 9.211 | 553.1 |
| 7.25 | 19.5 | 88.81 | 9.527 | 593.5 |
| 7.5 | 20 | 93.75 | 9.844 | 635.6 |
| 7.75 | 20.5 | 98.81 | 10.16 | 679.3 |
| 8 | 21 | 104 | 10.48 | 724.7 |
| 8.25 | 21.5 | 109.3 | 10.79 | 771.8 |
| 8.5 | 22 | 114.8 | 11.11 | 820.7 |
| 8.75 | 22.5 | 120.3 | 11.42 | 871.2 |
| 9 | 23 | 126 | 11.74 | 923.5 |
| 9.25 | 23.5 | 131.8 | 12.05 | 977.6 |
| 9.5 | 24 | 137.8 | 12.37 | 1033 |
| 9.75 | 24.5 | 143.8 | 12.68 | 1091 |
| 10 | 25 | 150 | 13 | 1151 |



7. Per lo stramazzo in parete sottile (stramazzo Bazin) con $L=1\text{ m}$ rappresentato in figura sono stati determinati sperimentalmente i valori di portata riportati nella tabella seguente in funzione del carico H :



| H [10^{-2}m] | Q [$10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$] |
|-------------------------|------------------------------------|
| 2 | 5.26 |
| 4 | 14.88 |
| 6 | 27.34 |
| 8 | 42.10 |
| 10 | 58.83 |
| 12 | 77.33 |
| 14 | 97.45 |
| 16 | 119.06 |
| 18 | 142.07 |
| 20 | 166.40 |

Elaborare razionalmente i dati sperimentali e valutare il coefficiente di portata m .

La legge di efflusso per uno stramazzo di questo tipo è la seguente:

$$Q = mLH\sqrt{2gH}.$$

Per valutare quanto vale il coefficiente di contrazione (o coefficiente di portata) m possiamo sfruttare il teorema Π , secondo cui se in un determinato fenomeno fisico intervengono m grandezze, e se n è il numero delle grandezze fondamentali, il legame tra le m grandezze si riduce ad un legame tra $(m-n)$ numeri puri.

Sappiamo che le grandezze fondamentali del SI sono massa, lunghezza e tempo, e tutte le altre derivano da queste, quindi una generica grandezza Q_k può essere espressa come

$$Q_k = [kg^\alpha m^\beta s^\gamma],$$

in cui α , β , γ sono le dimensioni della grandezza Q_k rispetto a massa, lunghezza e tempo.

È possibile considerare come grandezze fondamentali altre terne diverse dalla terna (M, L, T) . Si può infatti dimostrare che, considerata la terna (Q_1, Q_2, Q_3) , se il determinante della matrice costituita dalle dimensioni di queste tre grandezze rispetto alla terna (M, L, T) è diverso da zero, allora è possibile assumere come terna fondamentale (Q_1, Q_2, Q_3) ed esprimere tutte le altre grandezze, comprese massa, lunghezza e tempo, in funzione di Q_1 , Q_2 e Q_3 .

Se osserviamo un certo fenomeno fisico in cui una grandezza è funzione di un certo numero di altre grandezze Q_k , possiamo scegliere tra le Q_k una terna di grandezze dimensionalmente indipendenti ed esprimere le altre Q_k in funzione di questa terna, cioè, supponendo che Q_1 , Q_2 , Q_3 siano dimensionalmente indipendenti, la generica grandezza Q_k può essere espressa come

$$\frac{Q_k}{Q_1^{\alpha_k} Q_2^{\beta_k} Q_3^{\gamma_k}} = Q_1^{\alpha_k} Q_2^{\beta_k} Q_3^{\gamma_k},$$

determinando le potenze α_k , β_k e γ_k in modo tale che

$$\frac{Q_k}{Q_1^{\alpha_k} Q_2^{\beta_k} Q_3^{\gamma_k}}$$

sia un numero puro, o, equivalentemente, che

$$Q_1^{\alpha_k} Q_2^{\beta_k} Q_3^{\gamma_k}$$

abbia le dimensioni di Q_k .

Nel nostro caso la relazione che intercorre tra Q e le altre grandezze fisiche è

$$Q = f(L, H, g).$$

Non è possibile scegliere la terna (L, H, g) come terna di grandezze fondamentali, in quanto il determinante della matrice costituita dalle dimensioni di queste tre grandezze rispetto alla terna (M, L, T) è uguale a zero; ciò è dovuto al fatto che g , H e L sono tutte grandezze indipendenti dalla massa:

$$[g] = [kg^0 \cdot m^1 \cdot s^{-2}]$$

$$[H] = [kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0]$$

$$[L] = [kg^0 \cdot m^1 \cdot s^0]$$

È possibile allora considerare due grandezze fondamentali, anziché tre, cioè:

$$[g] = [m^1 \cdot s^{-2}]$$

$$[H] = [m^1 \cdot s^0]$$

in questo modo g e H possono essere assunte come grandezze dimensionalmente indipendenti e il legame tra le quattro grandezze Q , L , H e g si riduce ad un legame tra

$$m-n=4-2=2$$

numeri puri.

Avremo allora

$$\frac{Q}{H^\alpha g^\beta} = f\left(\frac{L}{H^\alpha g^\beta}, H, g\right),$$

Ponendo

$$\frac{Q}{H^\alpha g^\beta} = N_Q \quad \frac{L}{H^\alpha g^\beta} = N_L,$$

si ha

$$N_Q H^\alpha g^\beta = f(N_L H^\alpha g^\beta, H, g)$$

↓

$$N_Q H^\alpha g^\beta = f(N_L, H, g).$$

N_Q e N_L sono due numeri puri, quindi il prodotto $N_Q H^\alpha g^\beta$ ha le dimensioni di Q . Per omogeneità dimensionale il secondo membro deve avere le stesse dimensioni del primo, quindi

$$N_Q H^\alpha g^\beta = H^\alpha g^\beta \varphi(N_L)$$

↓

$$N_Q = \varphi(N_L)$$

↓

$$\frac{Q}{H^\alpha g^\beta} = \varphi\left(\frac{L}{H^\alpha g^\beta}\right).$$

Affinché si abbiano due numeri puri deve risultare:

$$- [Q] = [H^\alpha g^\beta]$$

$$[m^3 \cdot s^{-1}] = [(m^1 \cdot s^0)^\alpha (m^1 \cdot s^{-2})^\beta]$$

$$[m^3 \cdot s^{-1}] = [m^{\alpha+\beta} \cdot s^{-2\beta}]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha + \beta \\ 1 = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

$$- [L] = [H^\alpha g^\beta]$$

$$[m^1 \cdot s^0] = [(m^1 \cdot s^0)^\alpha (m^1 \cdot s^{-2})^\beta]$$

$$[m^1 \cdot s^0] = [m^{\alpha+\beta} \cdot s^{-2\beta}]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ 0 = -2\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Quindi il legame

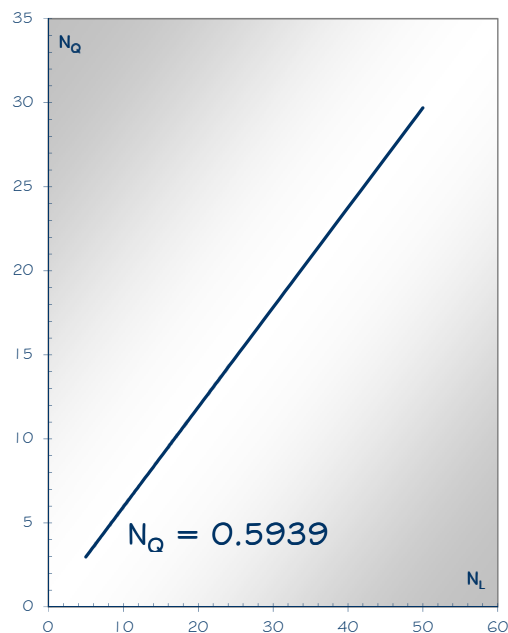
$$Q = f(L, H, g)$$

diventa

$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = \Phi \left(\frac{L}{H} \right)$$

Abbiamo così due numeri puri legati tramite una funzione che non conosciamo, ma abbiamo a nostra disposizione i valori di Q e H rilevati sperimentalmente. A partire da questi calcoliamo i nostri due numeri puri:

| H [m] | Q [m ³ /s] | N _Q | N _L |
|-------|-----------------------|----------------|----------------|
| 0.02 | 0.00526 | 29.69 | 50 |
| 0.04 | 0.01488 | 14.85 | 25 |
| 0.06 | 0.02734 | 9.901 | 16.67 |
| 0.08 | 0.0421 | 7.427 | 12.5 |
| 0.1 | 0.05883 | 5.941 | 10 |
| 0.12 | 0.07733 | 4.95 | 8.333 |
| 0.14 | 0.09745 | 4.243 | 7.143 |
| 0.16 | 0.11906 | 3.713 | 6.25 |
| 0.18 | 0.14207 | 3.3 | 5.556 |
| 0.2 | 0.1664 | 2.971 | 5 |



Il legame tra i due numeri puri è di tipo lineare, quindi la funzione è pari al coefficiente angolare della retta individuata dalle coppie di numeri, cioè

$$\Phi = \operatorname{tg} \gamma,$$

avendo indicato con γ l'angolo formato dalla retta con la direzione positiva dell'asse delle ascisse. Abbiamo allora:

$$\frac{Q}{H^{5/2} g^{1/2}} = \operatorname{tg} \gamma \frac{L}{H}$$

$$Q = H^{5/2} \sqrt{g} \operatorname{tg} \gamma \frac{L}{H} = H^{3/2} \sqrt{g} \operatorname{tg} \gamma L \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = H \sqrt{gH} \operatorname{tg} \gamma L \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{2}} LH \sqrt{2gH}$$

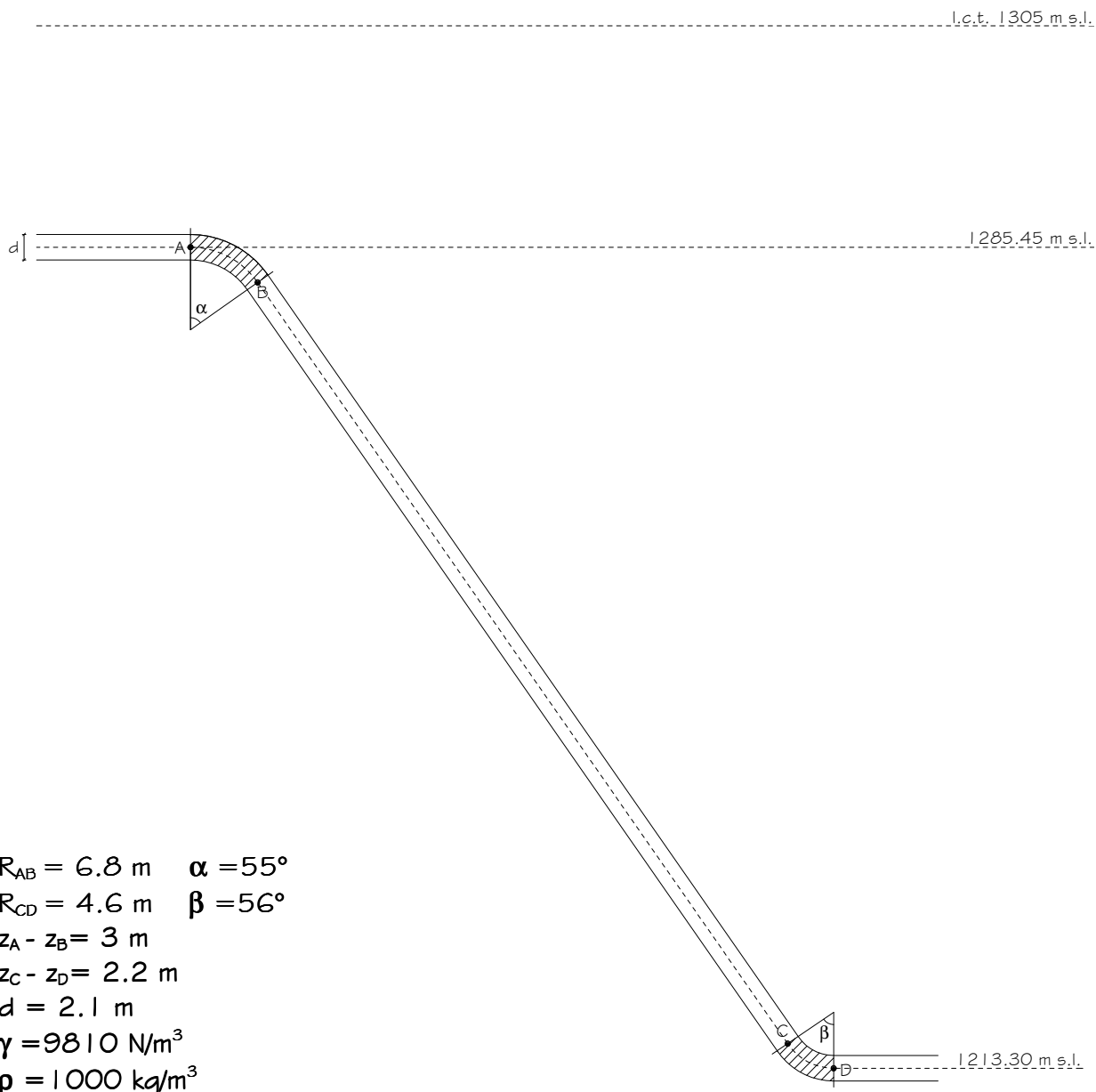
Poichè

$$Q = mLH\sqrt{2gH},$$

allora il coefficiente di contrazione m risulta

$$m = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{0.5939}{\sqrt{2}} = 0.42.$$

8. Assegnata la sezione trasversale di una condotta forzata, nota la geometria della stessa, la portata Q è uguale a $14 \text{ m}^3/\text{s}$, la quota della linea dei carichi totali è 1305 m s.l. ; nell'ipotesi di perdite trascurabili determinare la spinta nei tronchi di condotta AB e CD.



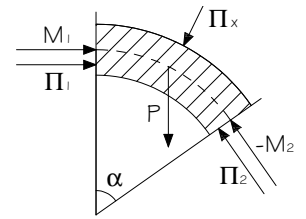
Per determinare la spinta esercitata dal fluido in movimento sui raccordi delimitati dai punti A-B e C-D sull'asse della condotta è necessario applicare l'equazione di equilibrio globale della dinamica:

$$\bar{P} + \bar{T} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 + \bar{\Pi} = 0.$$

Facendo riferimento al volume di controllo tratteggiato relativo al raccordo AB, poiché non ci sono né variazioni di densità né variazioni di velocità, allora le inerzie locali risultano nulle, quindi

$$\bar{T} = 0.$$

Per quanto riguarda la quantità di moto, questa ha lo stesso verso del vettore velocità, quindi i versi dei vettori sono quelli indicati in figura.



$\bar{\Pi}$, cioè la risultante delle spinte che tutto l'ambiente esterno esercita sul volume di controllo attraverso la superficie di contorno, può essere scomposta in tre contributi: la spinta $\bar{\Pi}_1$ attraverso la superficie di ingresso, quella $\bar{\Pi}_2$ attraverso la superficie di uscita e quella $\bar{\Pi}_x$ attraverso la superficie laterale del tubo.

Sono note le direzioni di tutte le forze tranne quella di $\bar{\Pi}_x$, che è proprio l'opposto della spinta esercitata dall'acqua sul raccordo, cioè

$$\bar{S}_{AB} = -\bar{\Pi}_x.$$

L'equazione dell'equilibrio globale della dinamica, riferita al raccordo considerato, diventa:

$$\bar{P} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_x = 0,$$

quindi

$$\bar{S}_{AB} = -\bar{\Pi}_x = \bar{P} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2.$$

Per determinare la spinta sul raccordo è allora necessario valutare innanzitutto i moduli dei vettori.

La forza peso \bar{P} ha modulo

$$P = \gamma W = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \bar{AB} = \gamma \frac{\pi d^2}{4} R_{AB} \alpha_{rad} = 221582 \text{ N}.$$

Le due quantità di moto sono uguali perché la portata e le sezioni sono le stesse:

$$M_1 = M_2 = \rho Qv = \rho \frac{Q^2}{A} = \rho \frac{4Q^2}{\pi d^2} = 56530 \text{ N}.$$

Le spinte $\bar{\Pi}$ si calcolano come prodotto delle pressioni relative al baricentro della sezione per la superficie. È nota la linea dei carichi totali, quindi basta sfruttare il teorema di Bernoulli per conoscere le pressioni:

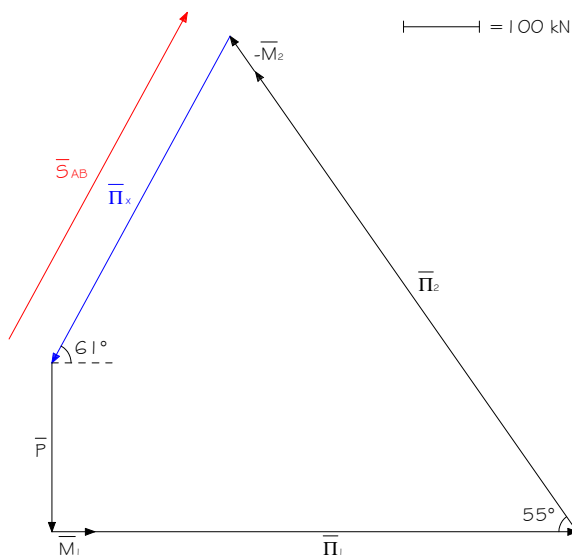
$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H \Rightarrow p_A = \gamma \left(H - z_A - \frac{v^2}{2g} \right)$$

$$H_B = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H \Rightarrow p_B = \gamma \left(H - z_B - \frac{v^2}{2g} \right)$$

Quindi le spinte risultano:

$$\Pi_1 = \gamma \left(H - z_A - \frac{v^2}{2g} \right) \frac{\pi d^2}{4} = 635355 \text{ N}$$

$$\Pi_2 = \gamma \left(H - z_B - \frac{v^2}{2g} \right) \frac{\pi d^2}{4} = 737185 \text{ N}$$



Per determinare la spinta dell'acqua sul raccordo è possibile fare una somma dei vari vettori per componenti, cioè stabilire un sistema di riferimento globale al quale riportare tutti i vettori e ricavare le risultanti delle componenti orizzontali e di quelle verticali delle forze, note le quali

$$S_{AB} = -\sqrt{S_o^2 + S_v^2},$$

oppure comporre le forze vettorialmente in scala, come nella figura a lato, dalla quale si deducono direzione, verso e modulo:

$$S_{AB} = 489574.8 \text{ N}$$

La spinta sul raccordo CD si determina in maniera analoga:

$$\bar{S}_{CD} = -\bar{\Pi}_x,$$

quindi

$$\bar{S}_{CD} = -\bar{\Pi}_x = \bar{P} + \bar{M}_1 - \bar{M}_2 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2.$$

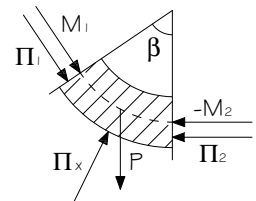
I moduli delle varie forze risultano:

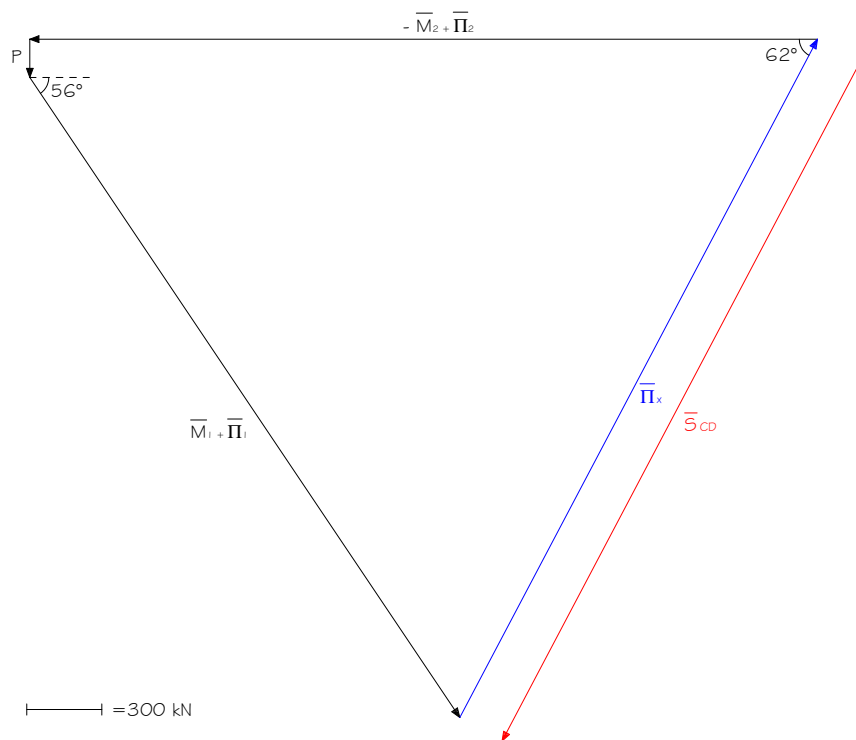
$$P = \gamma W = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \bar{CD} = \gamma \frac{\pi d^2}{4} R_{CD} \beta_{rad} = 152764 \text{ N}.$$

$$M_1 = M_2 = \rho Qv = \rho \frac{Q^2}{A} = \rho \frac{4Q^2}{\pi d^2} = 56530 \text{ N}.$$

$$\Pi_1 = \gamma \left(H - z_c - \frac{v^2}{2g} \right) \frac{\pi d^2}{4} = 3012723 \text{ N}$$

$$\Pi_2 = \gamma \left(H - z_D - \frac{v^2}{2g} \right) \frac{\pi d^2}{4} = 3087474 \text{ N}$$





La spinta dell'acqua sul raccordo ha il verso e la direzione indicati e modulo pari a:

$$S_{CD} = 3051857 \text{ N}$$

9. Una condotta in pressione alimentata ad un estremo da un serbatoio a livello costante, e terminante all'altro estremo con una luce libera, ha le seguenti caratteristiche:

$$L=2000 \text{ m} \quad D=1000 \text{ mm} \quad s=12 \text{ mm}.$$

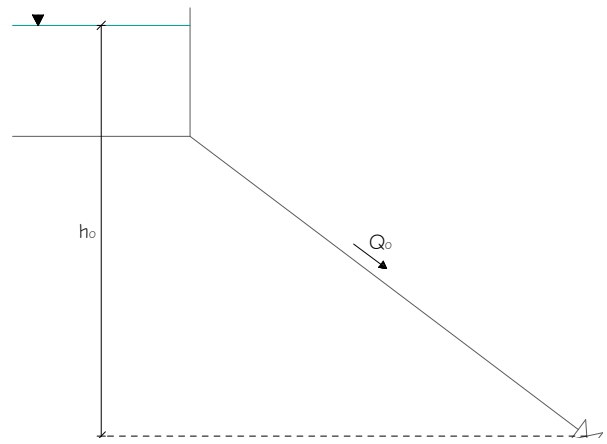
Partendo da una situazione permanente con carico riferito al piano della luce pari a h_0 e portata Q_0 si esegua una manovra di chiusura lineare completa in $\tau = 4(2L/a)$, cioè 4 fasi.

Per tutta la durata della manovra e per due fasi successive determinare il carico nella sezione di sbocco, negli istanti di fase intera e negli istanti di metà fase, raccogliendo i risultati in un diagramma.

Confrontare il valore del massimo sovraccarico con quello dato dalla formula di Michaud.

Costruire inoltre il diagramma del carico che si verifica nella sezione della condotta di ascissa $L/2$.

Per la sola sezione dell'otturatore, per gli istanti di fase intera, si valutino i sovraccarichi per sei fasi consequenti ad una chiusura parziale in quattro fasi da ω_0 a $\omega/2$ e si confrontino con quelli precedentemente ottenuti.



$$H_0 = 400 \text{ m}$$

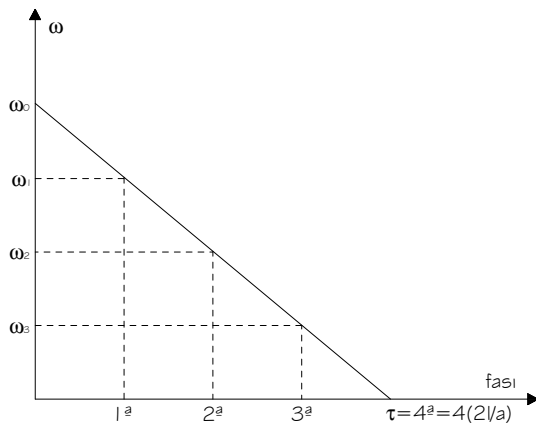
$$Q_0 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\epsilon = 2.03 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$E = 1.96 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \text{ (ghisa)}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Cominciamo con il determinare il sovraccarico dell'otturatore per le fasi intere con chiusura totale in quattro fasi. Consideriamo il presumibile diagramma dell'andamento della chiusura dell'otturatore.



L'andamento è lineare. Ad ogni fase è associata una sezione di passaggio.

Per calcolare l'andamento del sovraccarico è necessario applicare la formula di Allievi-Michaud. Quella generica è:

$$z_{k+1}^2 + z_k^2 - 2 = 2\sigma(\eta_k z_k - \eta_{k+1} z_{k+1})$$

applicata per sei fasi. Calcoliamo le costanti σ

$$\sigma = \frac{a u_0}{2gh_0}$$

e quindi a e u_0 :

$$a = \frac{\sqrt{\epsilon/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon D}{s E}}} = \frac{\sqrt{2.03 \cdot 10^9 / 1000}}{\sqrt{1 + \frac{2.03 \cdot 10^9 \cdot 1}{0.012 \cdot 1.96 \cdot 10^{11}}}} \text{ m/s} = 1043.8 \text{ m/s}$$

$$u_0 = \frac{Q_0}{\Omega} = \frac{Q_0}{\pi \cdot D^2 / 4} = 2.54 \text{ m/s},$$

avendo indicato con ϵ il modulo di elasticità a compressione cubica e con E il modulo di elasticità del materiale.

Sostituendo i valori σ risulta pari a $\sigma = 0.338$.

Applicando l'equazione di Michaud per le sei fasi abbiamo sei valori di z e η , che sono rispettivamente

$$z_k = \sqrt{\frac{h_k}{h_0}} \quad \eta_k = \frac{\omega_k}{\omega_0}.$$

z_k sono le incognite per cui dobbiamo calcolare le η_k con il diagramma di chiusura dell'otturatore

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.75 \omega_0 & \rightarrow & \eta_1 = 0.75 \\ \omega_2 &= 0.50 \omega_0 & \rightarrow & \eta_2 = 0.50 \\ \omega_3 &= 0.25 \omega_0 & \rightarrow & \eta_3 = 0.25 \\ \omega_4 &= 0 & \rightarrow & \eta_4 = 0 \\ \omega_5 &= 0 & \rightarrow & \eta_5 = 0 \\ \omega_6 &= 0 & \rightarrow & \eta_6 = 0 \end{aligned}$$

I valori nulli corrispondono alla situazione in cui l'otturatore è chiuso.

Scriviamo le sei equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2\sigma(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \\ z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2\sigma(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2) \\ z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2\sigma(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3) \\ z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2\sigma(\eta_3 z_3 - \eta_4 z_4) \\ z_5^2 + z_4^2 - 2 = 2\sigma(\eta_4 z_4 - \eta_5 z_5) \\ z_6^2 + z_5^2 - 2 = 2\sigma(\eta_5 z_5 - \eta_6 z_6) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t_1 = 2L/a \\ t_2 = 2t_1 \\ t_3 = 3t_1 \\ t_4 = 4t_1 \\ t_5 = 5t_1 \\ t_6 = 6t_1 \end{array}$$

Possiamo sostituire nel sistema i valori noti facendo notevoli semplificazioni in quanto

$$z_0 = \sqrt{\frac{h_0}{h_0}} = 1 \quad \eta_0 = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1,$$

ed inoltre $\eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^2 - 1 = 2\sigma(1 - 0.75 z_1) \\ z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2\sigma(0.75 z_1 - 0.50 z_2) \\ z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2\sigma(0.50 z_2 - 0.25 z_3) \\ z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2\sigma(0.25 z_3) \\ z_5^2 + z_4^2 - 2 = 0 \\ z_6^2 + z_5^2 - 2 = 0 \end{array} \right.$$

Le ultime due equazioni del sistema sono molto interessanti, infatti risolvendole si giunge ad importanti conclusioni. Sostituendo la definizione di z le equazioni assumono questa forma:

$$\begin{aligned} z_5^2 + z_4^2 - 2 = 0 & \Rightarrow \frac{h_5}{h_0} + \frac{h_4}{h_0} = 2 & \Rightarrow h_5 + h_4 = 2h_0 \\ z_6^2 + z_5^2 - 2 = 0 & \Rightarrow \frac{h_6}{h_0} + \frac{h_5}{h_0} = 2 & \Rightarrow h_6 + h_5 = 2h_0 \end{aligned}$$

Mettendole a sistema si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_5 + h_4 = 2h_0 \\ h_6 + h_5 = 2h_0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} h_5 - h_0 = h_0 - h_4 \\ h_6 - h_0 = h_0 - h_5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} h_5 - h_0 = -(h_4 - h_0) \\ h_6 - h_0 = -(h_4 - h_0) \end{array}$$

Questo significa che, dopo che l'otturatore è completamente chiuso, i sovraccarichi nelle fasi successive sono uguali e di segno contrario, e si susseguono regolarmente assumendo lo stesso valore di due fasi in due fasi.

A questo punto possiamo risolvere il sistema per sostituzione a partire dalla prima equazione:

$$\begin{aligned} z_1^2 - 1 &= 2\sigma(1 - 0.75 z_1) \\ &\Downarrow \\ z_1^2 - 1 &= 2\sigma - 1.50\sigma z_1 \\ &\Downarrow \\ z_1^2 + 1.50\sigma z_1 - 1 - 2\sigma &= 0 \\ &\Downarrow \\ z_1^2 + 0.507 z_1 - 1.676 &= 0 \end{aligned}$$

Poiché

$$z_1^2 = \frac{h_1}{h_0} \Rightarrow \Delta h_1 = h_1 - h_0 = h_0 (z_1^2 - 1)$$

L'unico valore accettabile come soluzione dell'equazione è quello positivo, cioè $z_1 = 1.066$.

Sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2\sigma(0.75 z_1 - 0.50 z_2) \Rightarrow z_2^2 + 0.338 - 1.41 = 0 \Rightarrow z_2 = 1.030$$

e così via:

$$z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2\sigma(0.50 z_2 - 0.25 z_3) \Rightarrow z_3^2 + 0.169 - 1.2872 = 0 \Rightarrow z_3 = 1.053$$

$$z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2\sigma(0.25 z_3) \Rightarrow z_4 = 1.034$$

$$z_5^2 + z_4^2 - 2 = 0 \Rightarrow z_5 = 0.964$$

$$z_6^2 + z_5^2 - 2 = 0 \Rightarrow z_6 = 1.034$$

Quindi z_6 risulta uguale a z_4 , come già stato messo in evidenza dalle considerazioni fatte precedentemente.

Ricaviamo i vari dislivelli rispetto a h_0 per ottenere il grafico:

$$\Delta h_k = h_0 (z_k^2 - 1)$$

$$\Delta h_1 = 400(1.066^2 - 1)m = 54.54m$$

$$t_1 = 2 \text{ L/a}$$

$$\Delta h_2 = 400(1.030^2 - 1)m = 24.36m$$

$$t_2 = 4 \text{ L/a}$$

$$\Delta h_3 = 400(1.053^2 - 1)m = 43.52m$$

$$t_3 = 6 \text{ L/a}$$

$$\Delta h_4 = 400(1.034^2 - 1)m = 27.662m$$

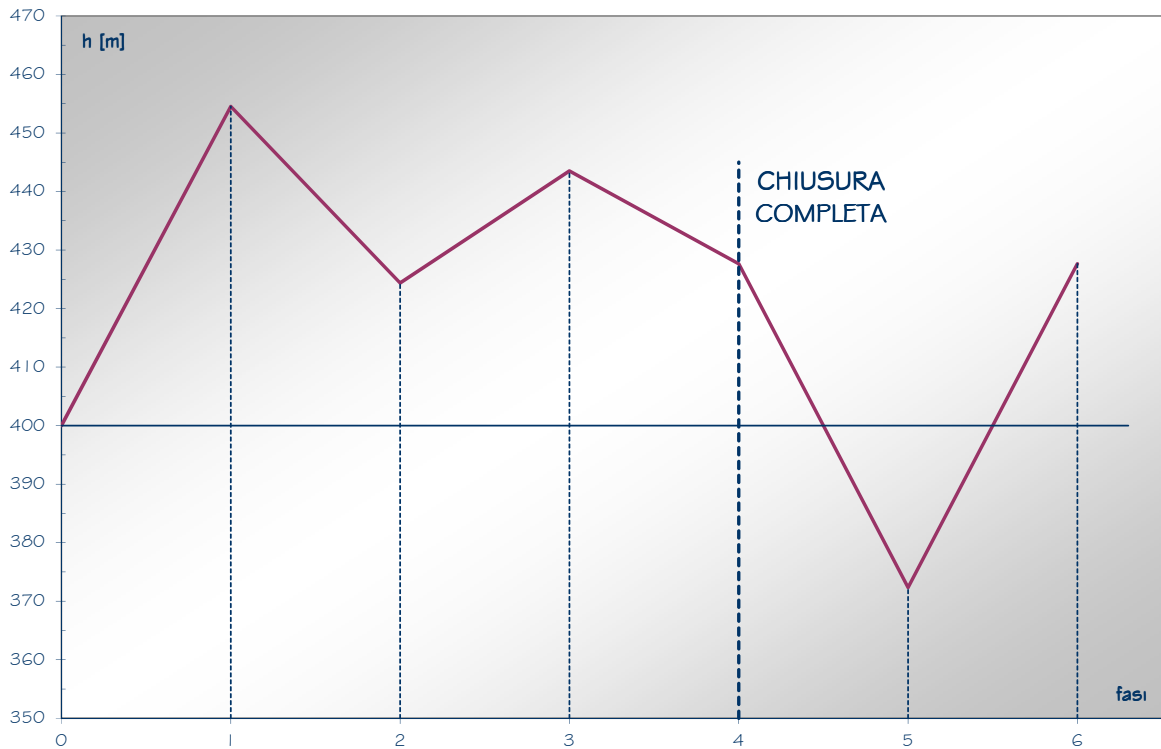
$$t_4 = 8 \text{ L/a}$$

$$\Delta h_5 = 400(0.9648^2 - 1)m = -27.662m$$

$$t_5 = 10 \text{ L/a}$$

$$\Delta h_6 = 400(1.034^2 - 1)m = 27.662m$$

$$t_6 = 12 \text{ L/a}$$



Confrontiamo il massimo sovraccarico ottenuto con la formula di Michaud. È possibile farlo perché la chiusura avviene fra le 4÷8 fasi e il massimo valore di sovraccarico si ottiene al termine della prima fase:

$$h - h_0 \leq \frac{2Lu_0}{g\tau} = 67.60 \text{ m}$$

dove

$$\tau = 4 \frac{2L}{a} = 15.32 \text{ s.}$$

Il sovraccarico Δh_1 è nettamente minore.

Andiamo a calcolare il valore del sovraccarico negli istanti di mezza fase nella sezione dell'otturatore. Dobbiamo riscrivere il sistema di sei equazioni partendo dalla prima mezza fase e avanzando poi di fase intera in fase intera:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{0.5}^2 + z_{-0.5}^2 - 2 = 2\sigma(\eta_{-0.5} z_{-0.5} - \eta_{0.5} z_{0.5}) \\ z_{1.5}^2 + z_{0.5}^2 - 2 = 2\sigma(\eta_{0.5} z_{0.5} - \eta_{1.5} z_{1.5}) \\ z_{2.5}^2 + z_{1.5}^2 - 2 = 2\sigma(\eta_{1.5} z_{1.5} - \eta_{2.5} z_{2.5}) \\ z_{3.5}^2 + z_{2.5}^2 - 2 = 2\sigma(\eta_{2.5} z_{2.5} - \eta_{3.5} z_{3.5}) \\ z_{4.5}^2 + z_{3.5}^2 - 2 = 2\sigma(\eta_{3.5} z_{3.5} - \eta_{4.5} z_{4.5}) \\ z_{5.5}^2 + z_{4.5}^2 - 2 = 2\sigma(\eta_{4.5} z_{4.5} - \eta_{5.5} z_{5.5}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t_{0.5} = L/a \\ t_{1.5} = 3t_{0.5} \\ t_{2.5} = 5t_{0.5} \\ t_{3.5} = 7t_{0.5} \\ t_{4.5} = 9t_{0.5} \\ t_{5.5} = 11t_{0.5} \end{array}$$

dove evidentemente

$$z_{-0.5} = z_0 = l \quad \eta_{0.5} = \eta_0 = 1$$

perché, così come all'istante $t=0$, la manovra di chiusura all'istante $t=-0.5$ non è ancora iniziata.

Ricaviamo i valori di η_k come fatto in precedenza dal diagramma di chiusura dell'otturatore:

$$\omega_{0.5} = 0.875 \omega_0 \rightarrow \eta_{0.5} = 0.875$$

$$\omega_{1.5} = 0.625 \omega_0 \rightarrow \eta_{1.5} = 0.625$$

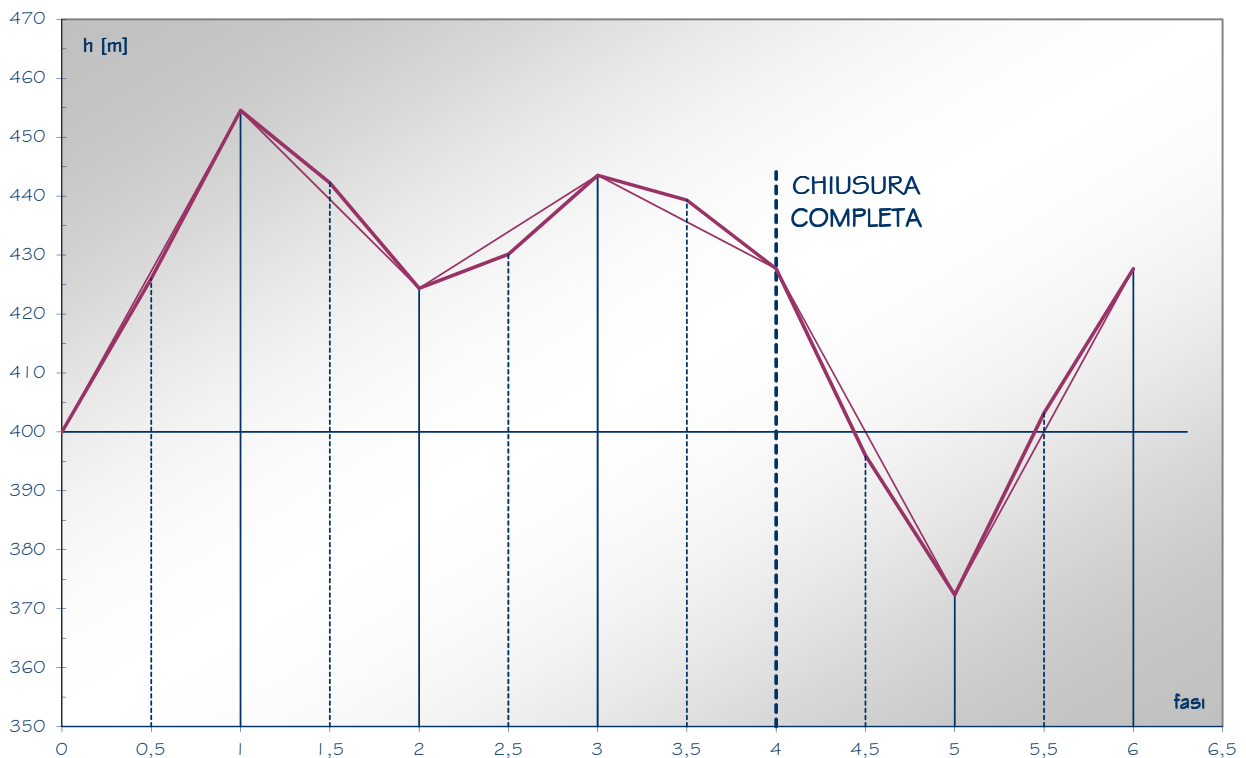
$$\begin{aligned}\omega_{2,5} &= 0.375 \omega_0 & \rightarrow & \eta_{2,5} = 0.375 \\ \omega_{3,5} &= 0.125 \omega_0 & \rightarrow & \eta_{3,5} = 0.125 \\ \omega_{4,5} &= 0 & \rightarrow & \eta_{4,5} = 0 \\ \omega_{5,5} &= 0 & \rightarrow & \eta_{5,5} = 0\end{aligned}$$

Anche in questo caso sostituendo questi valori il sistema si semplifica e valgono le stesse considerazioni fatte ragionando sugli istanti di fase intera. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}z_{0,5}^2 - 1 &= 2\sigma(1 - 0.875z_{0,5}) & z_{0,5} &= 1.032 \\ z_{1,5}^2 + z_{0,5}^2 - 2 &= 2\sigma(0.875z_{0,5} - 0.625z_{1,5}) & z_{1,5} &= 1.0515 \\ z_{2,5}^2 + z_{1,5}^2 - 2 &= 2\sigma(0.625z_{1,5} - 0.375z_{2,5}) & z_{2,5} &= 1.037 \\ z_{3,5}^2 + z_{2,5}^2 - 2 &= 2\sigma(0.375z_{2,5} - 0.125z_{3,5}) & z_{3,5} &= 1.048 \\ z_{4,5}^2 + z_{3,5}^2 - 2 &= 2\sigma(0.125z_{3,5}) & z_{4,5} &= 0.995 \\ z_{5,5}^2 + z_{4,5}^2 - 2 &= 0 & z_{5,5} &= 1.004\end{aligned}$$

Ricaviamo ora i vari dislivelli rispetto a h_0 con la formula: $\Delta h_k = h_0(z_k^2 - 1)$

$$\begin{aligned}\Delta h_{0,5} &= 400(1.032^2 - 1)m = 26.0096m & t_{0,5} &= L/a \\ \Delta h_{1,5} &= 400(1.0515^2 - 1)m = 42.26m & t_{1,5} &= L/a \\ \Delta h_{2,5} &= 400(1.037^2 - 1)m = 30.147m & t_{2,5} &= 5L/a \\ \Delta h_{3,5} &= 400(1.048^2 - 1)m = 39.321m & t_{3,5} &= 7L/a \\ \Delta h_{4,5} &= 400(0.995^2 - 1)m = -3.99m & t_{4,5} &= 9L/a \\ \Delta h_{5,5} &= 400(1.004^2 - 1)m = 3.206m & t_{5,5} &= 11L/a\end{aligned}$$



Unendo i nuovi valori a quelli ricavati per gli istanti di fase intera è stato così ottenuto un diagramma più preciso.

Calcoliamo ora il carico nella sezione di mezzeria, cioè per $x=L/2$. Sappiamo che il sovraccarico è dato da:

$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

All'otturatore abbiamo $x=0$, quindi $h - h_0 = F(t) - f(t)$.

Se il carico è costante, per $x=L$ e $h=h_0$ abbiamo:

$$F(t) = f\left(t + \frac{2L}{a}\right),$$

cioè abbiamo una relazione del tipo

$$h_{n+1} - h_0 = F_{n+1} - F_n,$$

o anche

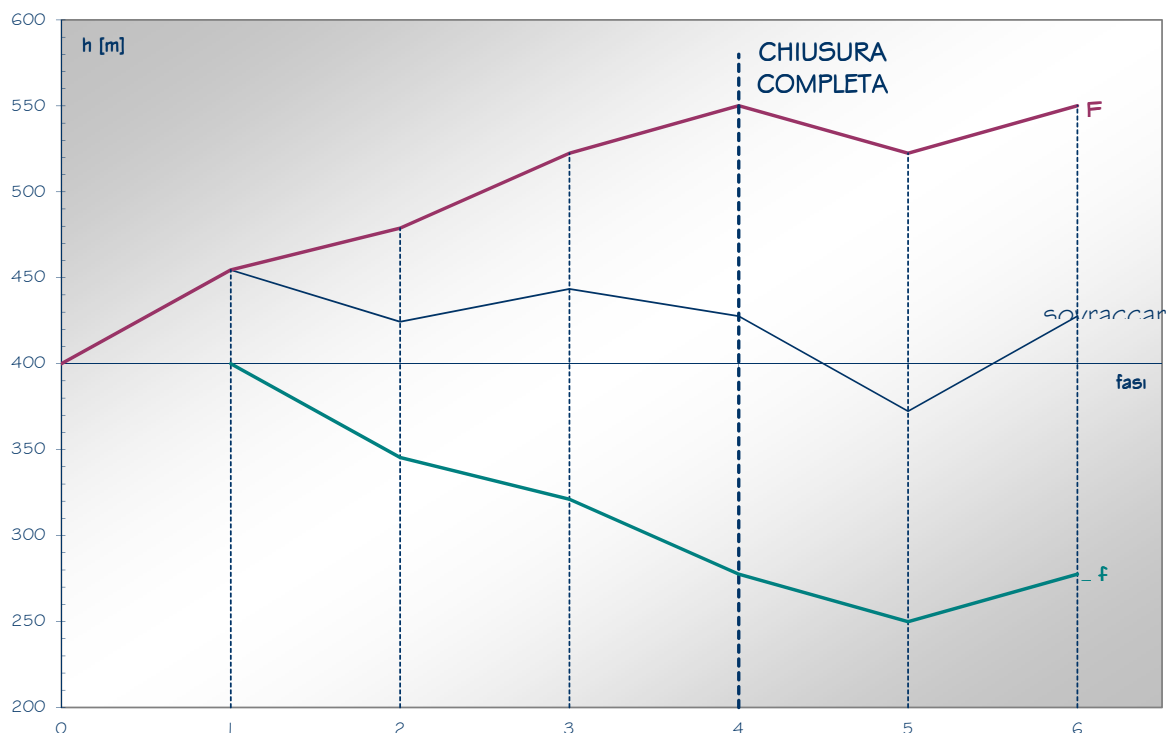
$$F_n = f_{n+1}$$

per

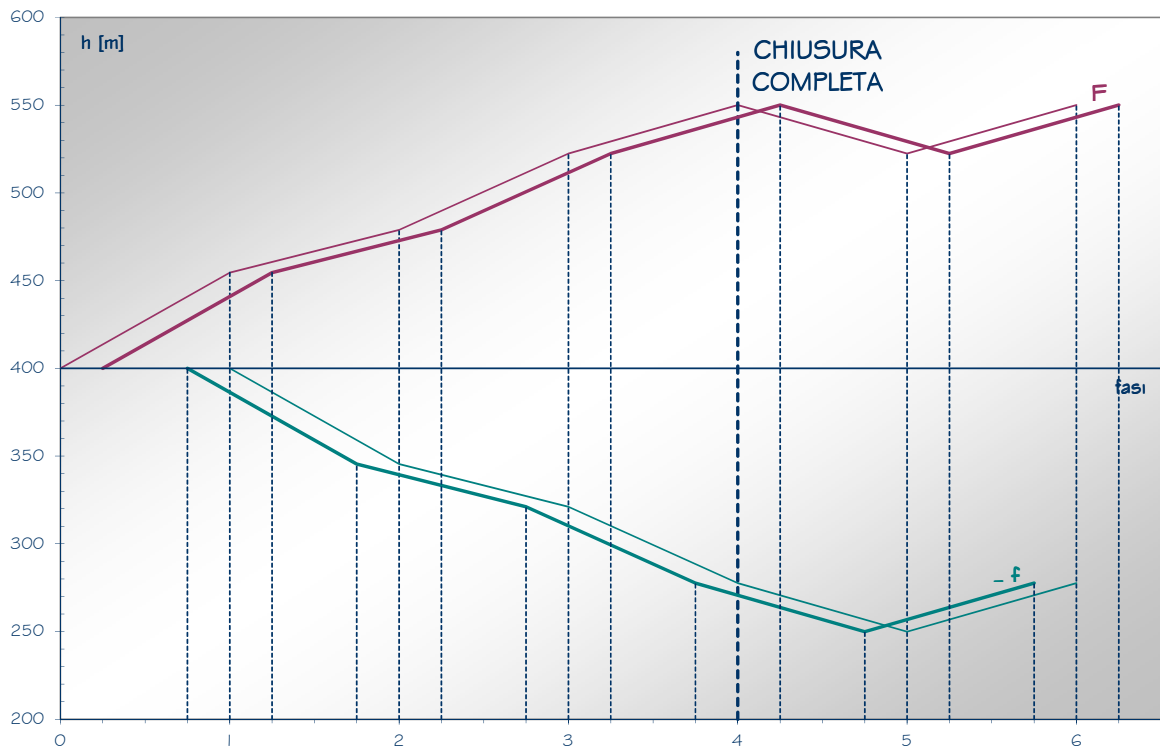
$$t_{n+1} = t_n + \frac{2L}{a}.$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} h_1 - h_0 &= F_1 & 0 \leq t_1 \leq \frac{2L}{a} \\ h_2 - h_0 &= F_2 - f_2 = F_2 - F_1 \Rightarrow F_2 = h_2 - h_0 + F_1 & t_2 = t_1 + \frac{2L}{a} \\ h_3 - h_0 &= F_3 - f_3 = F_3 - F_2 \Rightarrow F_3 = h_3 - h_0 + F_2 & t_3 = t_2 + \frac{2L}{a} \\ h_4 - h_0 &= F_4 - f_4 = F_4 - F_3 \Rightarrow F_4 = h_4 - h_0 + F_3 & t_4 = t_3 + \frac{2L}{a} \\ h_5 - h_0 &= F_5 - f_5 = F_5 - F_4 \Rightarrow F_5 = h_5 - h_0 + F_4 & t_5 = t_4 + \frac{2L}{a} \\ h_6 - h_0 &= F_6 - f_6 = F_6 - F_5 \Rightarrow F_6 = h_6 - h_0 + F_5 & t_6 = t_5 + \frac{2L}{a} \end{aligned}$$



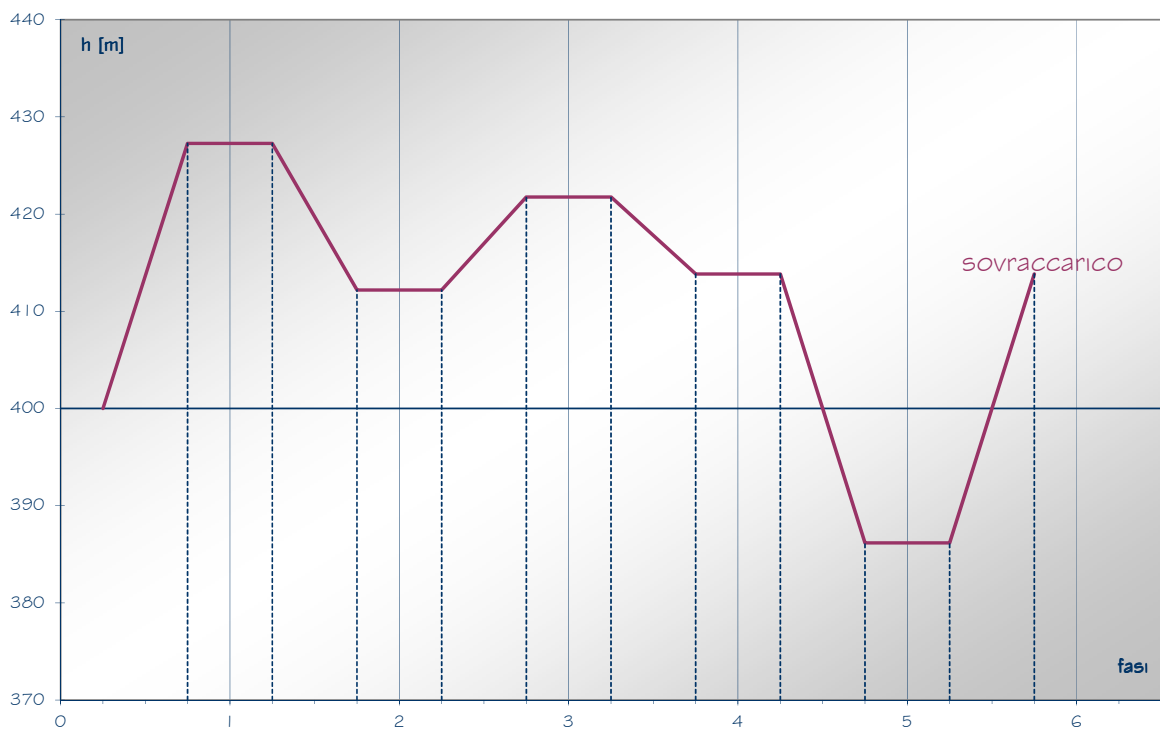
Adesso per ottenere l'andamento delle F e delle f nella sezione di mezzeria basta sfasare in ritardo di $1/4$ di fase la F e in anticipo di $1/4$ di fase la f :



Poiché per qualunque sezione

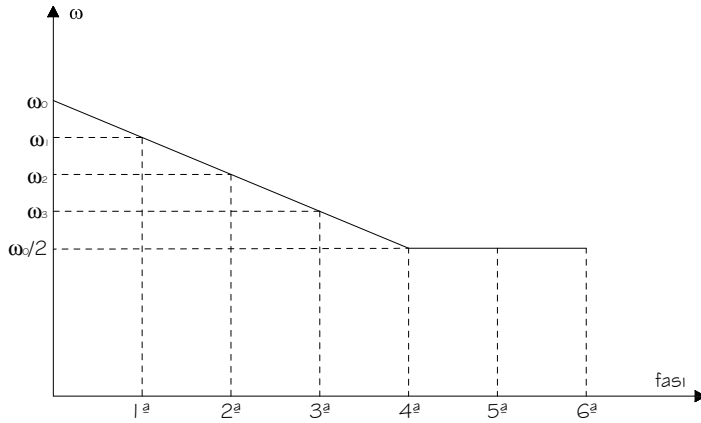
$$h - h_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right),$$

basta fare la somma di questi due grafici per ottenere il grafico dell'andamento del sovraccarico nella sezione di mezzeria:



Dal grafico si deduce che nella sezione di mezzeria il massimo sovraccarico si ha a cavallo della prima fase e presenta un valore costante pari a circa 28 m, in pratica un valore

dimezzato rispetto a quello che si ha nella sezione dell'otturatore. Si nota inoltre che la sezione di mezzeria risente del sovraccarico con 1/4 di fase di ritardo rispetto alla sezione dell'otturatore.



Calcoliamo ora i sovraccarichi nella sezione finale dell'otturatore per sei fasi in seguito ad una chiusura lineare parziale da ω_0 a $\omega_0/2$, completata per un tempo τ pari a quattro fasi.

Non ci resta che applicare le equazioni di Michaud per fasi intere:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2\sigma(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \\ z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2\sigma(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2) \\ z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2\sigma(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3) \\ z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2\sigma(\eta_3 z_3 - \eta_4 z_4) \\ z_5^2 + z_4^2 - 2 = 2\sigma(\eta_4 z_4 - \eta_5 z_5) \\ z_6^2 + z_5^2 - 2 = 2\sigma(\eta_5 z_5 - \eta_6 z_6) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t_1 = 2L/a \\ t_2 = 2t_1 \\ t_3 = 3t_1 \\ t_4 = 4t_1 \\ t_5 = 5t_1 \\ t_6 = 6t_1 \end{array}$$

dove

$$z_0 = \sqrt{\frac{h_0}{h_0}} = 1 \quad \eta_0 = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1$$

Ricaviamo i valori di η dal diagramma dell'otturatore

$$\omega_1 = 0.875 \omega_0 \rightarrow \eta_1 = 0.875$$

$$\omega_2 = 0.750 \omega_0 \rightarrow \eta_2 = 0.750$$

$$\omega_3 = 0.625 \omega_0 \rightarrow \eta_3 = 0.625$$

$$\omega_4 = 0.500 \omega_0 \rightarrow \eta_4 = 0.500$$

$$\omega_5 = 0.500 \omega_0 \rightarrow \eta_5 = 0.500$$

$$\omega_6 = 0.500 \omega_0 \rightarrow \eta_6 = 0.500$$

Sostituendo otteniamo:

$$z_1^2 - 1 = 2\sigma(1 - 0.875 z_1) \quad z_1 = 1.032$$

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2\sigma(0.875 z_1 - 0.750 z_2) \quad z_2 = 1.015$$

$$z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2\sigma(0.750 z_2 - 0.625 z_3) \quad z_3 = 1.025$$

$$z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2\sigma(0.625 z_3 - 0.500 z_4) \quad z_4 = 1.019$$

$$z_5^2 + z_4^2 - 2 = 2\sigma(0.500 z_4 - 0.500 z_5) \quad z_5 = 0.986$$

$$z_6^2 + z_5^2 - 2 = 2\sigma(0.500 z_5 - 0.500 z_6) \quad z_6 = 1.010$$

Passiamo a calcolare i dislivelli rispetto ad h_0 :

$$\Delta h_k = h_0 (z_k^2 - 1)$$

$$\Delta h_1 = 400(1.032^2 - 1)m = 26.01m$$

$$\Delta h_2 = 400(1.015^2 - 1)m = 12.09m$$

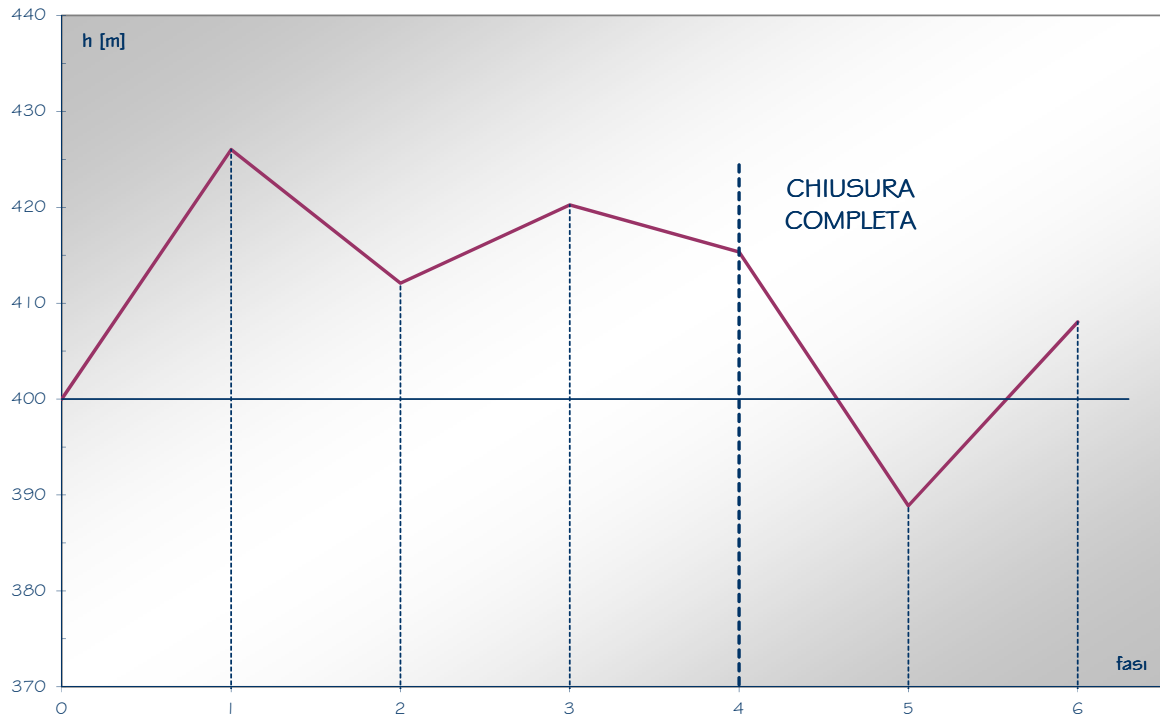
$$\Delta h_3 = 400(1.025^2 - 1)m = 20.25m$$

$$\Delta h_4 = 400(1.019^2 - 1)m = 15.334m$$

$$\Delta h_5 = 400(0.986^2 - 1)m = -11.12m$$

$$\Delta h_6 = 400(1.010^2 - 1)m = 8.04m$$

Otteniamo così il seguente grafico:



Si può notare dal grafico che dopo la chiusura le oscillazioni sono smorzate. Questo perché c'è ancora un passaggio di acqua attraverso la sezione $\omega_0/2$. Quindi il sistema tende a riportarsi a regime con la nuova sezione di passaggio.