

4. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI.

4.1. Determinare per ciascuno dei seguenti tensori simmetrici autovalori ed autovettori. Trovare la matrice di un cambiamento di coordinate che porta il tensore in forma diagonale:

~~(a)~~
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(b) \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$(c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

~~(e)~~
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(g) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

~~(h)~~
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

~~(i)~~
$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix},$$

~~(l)~~
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(m) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (n) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$(o) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (p) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.2. Trovare gli autovalori e gli autovettori del tensore:

$$T_{rs} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

C'è un riferimento ortogonale in cui il tensore ha forma diagonale?

4.3. Quali sono le componenti degli autovettori del tensore T_{rs} del Problema 2.6. nel vecchio e nel nuovo riferimento?

4.4. Sia T_{ij} il tensore di componenti

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{bmatrix}.$$

- (a) Si calcolino gli autovalori di T_{ij} .
- (b) Si discuta la possibilità che T_{ij} abbia due o tre autovalori coincidenti al variare di a, b, c (reali).
- (c) Nel caso in cui b è diverso da 0 e il tensore ha due autovalori coincidenti, si determini una terna principale.

4.5. Si calcolino autovalori ed autovettori dei tensori di componenti :

$$T_{rs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{rs} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

C'è un riferimento in cui ambidue i tensori assumono forma diagonale? In caso affermativo si scriva la tabella dei coseni del corrispondente cambiamento di coordinate.

4.6. Si verifichi che il tensore di componenti :

$$T_{rs} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

è ortogonale. Se ne calcolino gli autovalori e gli autovettori.

Si controlli che il versore di componenti $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{1}{3})$ è un autovettore e si determinino altri due versori in modo che formino, assieme col versore assegnato, una terna principale per T_{rs} .

- 4.7. Determinare gli autovalori ed i corrispondenti autovettori della parte simmetrica del tensore di componenti:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -6 & -6 \\ -3 & -18 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 4.8. Determinare gli autovalori reali ed i corrispondenti autovettori (destri e sinistri) dei seguenti tensori non simmetrici:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- 4.9. I tensori (a) e (d) dell'esercizio precedente hanno i 3 autovalori reali e corrispondenti autovettori reali.

Esiste un riferimento in cui tali tensori si riducono a forma diagonale?

10. Si calcolino gli autovalori reali e i corrispondenti autovettori del tensore emisimmetrico di vettore associato $\underline{v} = (1, 0, 1)$. Si determini un cambiamento di coordinate che porti il tensore nella forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Si dimostri che un qualunque tensore antisimmetrico ha come autovalori solo lo zero e numeri immaginari puri.
12. Si determinino gli autovettori destri e sinistri di un generico tensore antisimmetrico, corrispondenti all'autovalore 0. Si dia un'interpretazione geometrica del risultato, in termini del vettore associato al tensore antisimmetrico.
13. Si determinino gli autovalori ed i corrispondenti autovettori (destri e sinistri) di una diade generica $T_{rs} = v_r w_s$. Si dia un'interpretazione geometrica del risultato in termini dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

IMPORTANTE

4.14. Si scriva la diade $\underline{v}_r \underline{w}_s$ corrispondente ai vettori $\underline{v} = (1, 1, 0)$, $\underline{w} = (0, 2, 1)$; si determinino gli autovalori e gli autovettori (destri e sinistri).

4.15. Si calcolino gli autovalori reali ed i corrispondenti autovettori destri e sinistri dei tensori ortogonali:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.16. Quali possono essere gli autovalori di un tensore ortogonale e simmetrico?

IMPORTANT