2. *PROBLEMI*

2.1. Sia $\mathbf{x} : B_0 \to B$ l'applicazione definita da

$$
\begin{aligned}
x_1 &= kX_1 + X_2 + X_3, \\
x_2 &= X_1 + kX_2 + X_3, \qquad (2.1) \\
x_3 &= X_1 + X_2 + kX_3,
\end{aligned}
$$

dove k é una costante reale. Sotto quale condizione su k l'applicazione (2.1) é una deformazione ?

Soluzione. Lo Jacobiano J é dato da

$$
J = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2.
$$

Abbiamo $J > 0$ per $k \in (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

2.2. La descrizione lagrangiana di una deformazione é data da

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2X_1 - X_2 + X_3, \\
x_2 &= X_1 + 2X_2 - X_3, \\
x_3 &= 3X_1 - X_2 - X_3.
\end{aligned}
$$

Determinare $\mathbf{F}, J, \mathbf{F}^{-1}$ e le equazioni euleriane che descrivono questo moto.

Soluzione. Dalla (1.9),

$F^C_{11} = -3$, $F^C_{12} = -2$, $F^C_{13} = -7$

$$
\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

$F^C_{21} = -2$, $F^C_{22} = -5$, $F^C_{23} = -1$

$F^C_{ij} = (-1)^{i+j} |A^{(ij)}|$

$F^C_{31} = -1$, $F^C_{32} = 3$, $F^C_{33} = 5$

Allora $J = -11$ e

$$\mathbf{F}^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quindi, la descrizione euleriana della deformazione é

$$X_1 = \frac{1}{11}(3x_1 + 2x_2 + x_3),$$
$$X_2 = \frac{1}{11}(2x_1 + 5x_2 - 3x_3),$$
$$X_3 = \frac{1}{11}(7x_1 + x_2 - 5x_3).$$

(A) A

2.3. Il moto di un corpo continuo é descritto dalle equazioni

$$x_1 = X_1 - 3tX_2 - 3tX_3,$$
$$x_2 = 3tX_1 + X_2,$$
$$x_3 = 3tX_1 + X_3, \qquad X \in B_0, t \in [0, \infty).$$

(i) Determinare la posizione all'istante $t = 5$ della particella $\mathcal{P}$ originariamente in $(1, 2, 3)$.

(ii) Determinare la traiettoria della particella $\mathcal{P}$.

(iii) Determinare le componenti del vettore spostamento nella descrizione sia materiale che spaziale.

(iv) velocità e accelerazione

Soluzione. (i) All'istante $t = 5$ la particella $\mathcal{P}$ occupa la posizione $(-74, 17, 18)$.

(ii) La traiettoria della particella é situata sulla retta data da

$x_1 = 1 - 6t - 9t = 1 - 15t$, $x_2 = 3t + 2$, $x_3 = 3t + 3$

$$x_1 = 1 - 15t \quad , \quad x_2 = 2 + 3t, \;\; x_3 = 3 + 3t \;, t \in I.$$

$F = \begin{pmatrix} 1 & -3t & -3t \\ 3t & 1 & 0 \\ 3t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = 1 + 9t^2 + 9t^2 = 1 + 18t^2$, $F^c = \begin{pmatrix} 1 & -3t & -3t \\ 3t & (1+9t^2) & +9t^2 \\ 3t & -9t^2 & (1+9t^2) \end{pmatrix}$

(iii) Dalla (1.8),

$$u_1 = -3tX_2 - 3tX_3 \ , \ u_2 = 3tX_1 \ , \ u_3 = 3tX_1 .$$

Le equazioni euleriane che descrivono il moto sono

$\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{x} = \underline{X} = \underline{x} - \underline{u} = X_1 - 3tX_2 - 3tX_3 + 3tX_2 + 3tX_3 = X_1$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{1+18t^2}[x_1 + 3t(x_2 + x_3)], \\ X_2 &= \frac{1}{1+18t^2}[-3tx_1 + (1+9t^2)x_2 - 9t^2 x_3], \\ X_3 &= \frac{1}{1+18t^2}[-3tx_1 + 9t^2 x_2 + (1+9t^2)x_3]. \end{aligned}$$

Allora, le componenti dello spostamento possono essere espresse, nella descrizione spaziale,

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{3t}{1+18t^2}[-6tx_1 + (1+18t^2)x_2 + x_3], \\ u_2 = u_3 &= \frac{3t}{1+18t^2}[x_1 + 3t(x_2 + x_3)]. \end{aligned}$$

X (A)A ***2.4.*** Un vettore spostamento é dato da

$$\begin{aligned} u_1 &= 3t^2(1 + 2X_1X_2X_3), \\ u_2 &= tX_1^2 + 5X_2^2X_3t^3, \\ u_3 &= (2^t - 1)(X_1 + 5X_2X_3), \qquad \text{su} \quad B_0 \times I. \end{aligned}$$

(i) Determinare la nuova posizione, all'istante $t = 5$, della particella originariamente in $(0, 1, 2)$.

(ii) Determinare i gradienti di deformazione $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}^T$.

Soluzione. (i) Dalla (1.8), la descrizione lagrangiana (1.1) del moto é data da

$$\begin{aligned} x_1 &= 3t^2(1 + 2X_1X_2X_3) + X_1, \\ x_2 &= tX_1^2 + 5t^3X_2^2X_3 + X_2, \\ x_3 &= (2^t - 1)(X_1 + 5X_2X_3) + X_3. \end{aligned}$$

La nuova posizione della particella é data da $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, $x_3 = 12$.

(ii) Dalla descrizione lagrangiana del moto si ha che

$$F = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 + 6t^2 X_2 X_3 & 6t^2 X_1 X_3 & 6t^2 X_1 X_2 \\ 2tX_1 & 1 + 10t^3 X_2 X_3 & 5t^3 X_2^2 \\ 2^t - 1 & 5(2^t - 1)X_3 & 1 + 5(2^t - 1)X_2 \end{pmatrix}.$$

La soluzione per $\partial X_i / \partial x_j$ é data da

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{1}{J} \text{ cofattore } \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_i}\right).$$

2.6. La descrizione lagrangiana di una deformazione é data da

$$x_1 = X_1, \;\; x_2 = X_2 + kX_3, \;\; x_3 = kX_2 + X_3,$$

dove k é una costante tale che $k^2 \neq 1$.

(i) Determinare i tensori di deformazione.

(ii) Calcolare gli invarianti principali per ognuno di questi tensori.

Soluzione. (i) Dalla (1.9),

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

In base alla (1.14) otteniamo il tensore di deformazione di Cauchy-Green

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & 2k \\ 0 & 2k & 1+k^2 \end{pmatrix}.$$

Dalla (1.15) otteniamo il tensore di Green $\mathbf{E}$,

$$(E_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni euleriane che descrivono la deformazione precedente sono

$$X_1 = x_1 \quad , \quad X_2 = \frac{1}{1-k^2}(x_2 - kx_3) \quad , \quad X_3 = \frac{1}{1-k^2}(x_3 - kx_2).$$

Il gradiente di deformazione spaziale é dato da

$$\mathbf{F}^{-1} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-k^2} & \frac{k}{k^2-1} \\ 0 & \frac{k}{k^2-1} & \frac{1}{1-k^2} \end{pmatrix}.$$

Il tensore di deformazione di Cauchy é dato da

$$\mathbf{c} = (c_{ij}) = (\mathbf{F}^{-1})^T\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+k^2}{(1-k^2)^2} & -\frac{2k}{(1-k^2)^2} \\ 0 & -\frac{2k}{(1-k^2)^2} & \frac{k^2+1}{(1-k^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Dalla (1.15) otteniamo il tensore di deformazione di Almansi

$$\mathbf{e} = (e_{ij}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1+k^2}{(1-k^2)^2} & \frac{2k}{(1-k^2)^2} \\ 0 & \frac{2k}{(1-k^2)^2} & 1 - \frac{1+k^2}{(1-k^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(ii) In base alla (1.34),

$$I_1(C) = 3 + 2k^2 \quad , \quad I_2(C) = 3 + k^4 \quad , \quad I_3(C) = (1-k^2)^2,$$

$$I_1(E) = k^2 \quad , \quad I_2(E) = k^2(\frac{1}{4}k^2 - 1) \quad , \quad I_3(E) = 0,$$

$$I_1(c) = 1 + \frac{2(1+k^2)}{(1-k^2)^2}, \quad I_2(c) = \frac{1}{2}\left[I_1^2(c) - 1 - 2\frac{(1+k^2)^2 + 4k^2}{(1-k^2)^4}\right],$$

$$I_3(c) = \frac{1}{(1-k^2)^2} \quad , \quad I_1(e) = 1 - \frac{1+k^2}{(1-k^2)^2} \quad ,$$

$$I_2(e) = \frac{1}{4}\left\{[1 - \frac{1+k^2}{(1-k^2)^2}]^2 + \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}\right\} \; , I_3(e) = 0.$$

X CASA

2.7. Per una deformazione omogenea il tensore di deformazione di Cauchy-Green é dato da

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autovalori e le direzioni principali di $\mathbf{C}$.

Soluzione. Gli autovalori di $\mathbf{C}$ sono le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0.$$

Allora $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3$. Le direzione principali sono date da

$$C_{ij}N_j = \lambda N_i. \tag{2.11}$$

Siano $N_i^{(j)}$ le componenti del versore della direzione principale associata con l'autovalore C_j. Per $C_1 = 1$, la (2.11) dá

$$3N_1^{(1)} - N_2^{(1)} = N_1^{(1)}, \ -N_1^{(1)} + 3N_2^{(1)} = N_2^{(1)},$$

con $N_i^{(1)}N_i^{(1)} = 1$. Cosí otteniamo

$$N_1^{(1)} = N_2^{(1)} = 0 \quad , \quad N_3^{(1)} = \pm 1.$$

Per $C_2 = 2$ il sistema (1.11) implica che

$$N_1^{(2)} = N_2^{(2)} = \pm\sqrt{2}/2, \ N_3^{(2)} = 0.$$

Per $C_3 = 4$ il sistema (2.11) fornisce

$$N_1^{(3)} = -N_2^{(3)} = \mp\sqrt{2}/2, \ N_3^{(3)} = 0.$$

Gli assi principali Y_i possono essere riferiti agli assi X_i attraverso la tabella

	X_1	X_2	X_3
Y_1	0	0	± 1
Y_2	$\pm\sqrt{2}/2$	$\pm\sqrt{2}/2$	0
Y_3	$\mp\sqrt{2}/2$	$\pm\sqrt{2}/2$	0

Notiamo che i vettori

$$\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{G}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \quad , \quad \mathbf{G}^{(3)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2),$$

formano una terna trirettangola levogira di versori. La matrice di trasformazione é data da

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = (A_{ij}).$$

Chiaramente, il tensore $\mathbf{C}$ puó essere posto nella forma diagonale $\mathbf{C}^*$ tramite la legge di trasformazione $C^*_{ij} = A_{ir}A_{js}C_{rs}$,

$$\mathbf{C}^* = (C^*_{ij}) = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

51

2.8. La descrizione lagrangiana di una deformazione é data da

$$\begin{aligned} x_1 &= 3X_1 - X_2, \\ x_2 &= -X_1 + 3X_2, \\ x_3 &= X_3. \end{aligned}$$

Determinare il tensore destro di deformazione $\mathbf{U}$ e il tensore di rotazione $\mathbf{R}$.

Soluzione. Dalle (1.8) e (1.9) troviamo che

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nella decomposizione polare di $\mathbf{F}$, il tensore di deformazione $\mathbf{U}$ é dato da $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ e il tensore di rotazione é $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$. Il tensore deformazione di Cauchy-Green é dato da

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

X(θ)A

2.9. Un vettore spostamento su B_0 é dato da

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \varepsilon X_2, \\
u_2 &= \varepsilon X_3, \\
u_3 &= \varepsilon X_1,
\end{aligned}
$$

dove ε é una costante tale che $\varepsilon \neq -1$.

(i) Determinare i tensori di deformazione E_{ij} e e_{ij} usando la (1.16).

(ii) Confrontare i tensori E_{ij} e e_{ij} nel caso in cui $\varepsilon^n \approx 0 (n \geq 2)$.

Soluzione. (i) Dalla (1.16),

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad , \quad E_{12} = E_{13} = E_{23} = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

La descrizione lagrangiana della deformazione (1.1) é data da

$$x_1 = X_1 + \varepsilon X_2, \quad x_2 = X_2 + \varepsilon X_3, \quad x_3 = X_3 + \varepsilon X_1.$$

Invertendo queste equazioni otteniamo la descrizione euleriana della deformazione

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{1+\varepsilon^3}(x_1 - \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3), \\ X_2 &= \frac{1}{1+\varepsilon^3}(\varepsilon^2 x_1 + x_2 - \varepsilon x_3), \\ X_3 &= \frac{1}{1+\varepsilon^3}(-\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3). \end{aligned}$$

In questo modo le componenti del vettore spostamento, nelle coordinate spaziali, sono date da

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^3}(\varepsilon^2 x_1 + x_2 - \varepsilon x_3), \\ u_2 &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^3}(-\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3), \\ u_3 &= \frac{2}{1+\varepsilon^3}(x_1 - \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3). \end{aligned}$$

Dalla (1.16) abbiamo

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^3)}\left(2\varepsilon - \frac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{1+\varepsilon^3}\right),$$

$$e_{23} = e_{13} = e_{12} = \frac{1}{2(1+\varepsilon^3)}[\varepsilon(1-\varepsilon) - \frac{\varepsilon^3}{1+\varepsilon^3}(\varepsilon - 1 - \varepsilon^2)].$$

(ii) Se si trascura ε^2 e le potenze maggiori, troviamo che E_{ij} coincide con e_{ij},

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0,$$

$$E_{23} = E_{13} = E_{12} = e_{23} = e_{13} = e_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

51 **2.10** Un corpo continuo subisce lo spostamento

$$u_1 = kX_2^2 \quad , \quad u_2 = u_3 = 0,$$

dove k é una costante assegnata. Un parallelepipedo infinitesimale con gli spigoli definiti da vettori $d\mathbf{R}_1 = \mathbf{e}_1 dX_1$, $d\mathbf{R}_2 = \mathbf{e}_2 dX_2$, $d\mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3 dX_3$ nel punto $M(1,1,0)$ diventa dopo la deformazione un parallelepipedo con i corrispondenti spigoli $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$ e $d\mathbf{r}_3$.

(i) Determinare i vettori $d\mathbf{r}_j$.

i coefficienti di dilatazione lineare

(ii) Calcolare ~~gli stiramenti~~ nelle direzioni OM e OX_j nel punto M.

lo scorrimento

(iii) Determinare ~~il cambiamento~~ nell'angolo tra i vettori $d\mathbf{R}_1$ e $d\mathbf{R}_2$.

(iv) Mostrare che non c'é nessuna variazione volumetrica associata alla deformazione data.

Soluzione. (i) Dalla (1.9)

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \tag{2.12}$$

La descrizione lagrangiana della deformazione é data da

$$x_1 = X_1 + kX_2^2, \;\; x_2 = X_2, \;\; x_3 = X_3,$$

per cui

Una retta puó essere vista come l'intersezione di due piani. Tramite la deformazione (2.26) i piani rimangono piani come provato e quindi l'intersezione dei due piani rimane una retta.

2.15. La deformazione omogenea per la quale

$$x_1 = \lambda\ X_1 \quad , \quad x_2 = \lambda\ X_2 \quad , \quad x_3 = \lambda\ X_3 \quad , \quad \lambda > 0 \tag{2.27}$$

é chiamata *dilatazione uniforme*. Determinare i tensori di deformazione, gli ellissoidi di deformazione e gli invarianti di deformazione.

Soluzione. Dalle (1.9), (1.10), (1.12), (1.14), (1.15) e (2.27) segue che

$$C_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \quad , \quad c_{ij} = \frac{1}{\lambda^2}\delta_{ij},$$

$$2E_{ij} = (\lambda^2 - 1)\delta_{ij} \quad , \quad 2\epsilon_{ij} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\delta_{ij}.$$

Gli ellissoidi di deformazione sono sfere. Cosí la dilatazione uniforme puó essere caratterizzata come una deformazione che ha gli stiramenti principali uguali fra loro. Gli invarianti di deformazione sono

$$I_1(C) = 3\lambda^2 \quad , \quad I_2(C) = 3\lambda^4 \quad , \quad I_3(C) = \lambda^6,$$

$$I_1(E) = \frac{3}{2}(\lambda^2 - 1) \quad , \quad I_2(E) = \frac{3}{4}(\lambda^2 - 1) \quad , \quad I_3(E) = \frac{1}{8}(\lambda^2 - 1)^3.$$

Chiaramente, λ é lo stiramento in ogni direzione. Per $\lambda > 1$ abbiamo una *espansione uniforme* e per $\lambda < 1$ una *compressione uniforme*. Una dilatazione uniforme deforma una sfera in un'altra sfera.

2.16. L'*estensione semplice* parallela all'asse OX_1 é la deformazione omogenea per la quale

$$x_1 = \lambda\ X_1 \quad , \quad x_2 = X_2 \quad , \quad x_3 = X_3 \quad , \quad \lambda > 0. \tag{2.28}$$

Studiare questa deformazione.

Soluzione. Dalla (1.9)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I tensori di deformazione sono dati da

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\lambda^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per gli invarianti abbiamo

$$I_1(C) = 2 + \lambda^2 \quad , \quad I_2(C) = 1 + 2\lambda^2 \quad , \quad I_3(C) = \lambda^2,$$

$$I_1(E) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad , \quad I_2(E) = I_3(E) = 0.$$

Gli ellissoidi di deformazione sono dati da

$$\frac{1}{\lambda^2}\, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = K^2 \quad , \quad \lambda^2 Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = k^2.$$

L'estensione semplice puó essere caratterizzata come una deformazione che ha due stiramenti principali uguali all'unitá mentre il terzo é diverso da 1. La deformazione muove i piani perpendicolari all'asse OX_1 parallelamente a se stessi e nessuna deformazione avviene nelle direzioni OX_2 e OX_3.

per cui

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = 0. \tag{2.57}$$

Dalla (2.56) e (2.57) concludiamo che $\partial v_i/\partial x_j$ é un tensore antisimmetrico indipendente dalle coordinate spaziali,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = W^*_{ij}(t).$$

Se integriamo si ottiene

$$v_i = c_i(t) + W^*_{ij}(t)x_j, \quad W^*_{ij} = -W^*_{ji}.$$

Dal Problema 2.31 si conclude che il moto é rigido.

2.33. Dimostrare che il campo accelerazione puó essere scritto nella forma

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{ curl } \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{ grad } \mathbf{v}^2.$$

Soluzione. Dalla (1.51) abbiamo

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + v_s\frac{\partial v_s}{\partial x_i}.$$

In base alla (1.55),

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2W_{ij}v_j + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_s v_s).$$

Chiaramente, il vettore

$$\mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}$$

ha le componenti

$$w_i = e_{ijk} W_{kj},$$

per cui

$$2W_{rs} = e_{sri} w_i.$$

Ora possiamo scrivere

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + e_{jis} w_s v_j + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(v^2).$$

Da questa relazione si ottiene il risultato desiderato.

2.34. Il vettore spostamento é dato da

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
u_2 &= \frac{1}{2}[(X_2 + X_3)e^t + (X_2 - X_3)e^{-t} - 2X_2], \\
u_3 &= \frac{1}{2}[(X_2 + X_3)e^t - (X_2 - X_3)e^{-t} - 2X_3].
\end{aligned}$$

Determinare il tensore velocitá di deformazione e il tensore spin.

Soluzione. La descrizione lagrangiana del moto é data da

$$\begin{aligned}
x_1 &= X_1, \\
x_2 &= \frac{1}{2}[(X_2 + X_3)e^t + (X_2 - X_3)e^{-t}], \\
x_3 &= \frac{1}{2}[(X_2 + X_3)e^t - (X_2 - X_3)e^{-t}].
\end{aligned}$$

Abbiamo

$$x_2 + x_3 = (X_2 + X_3)e^t \quad , \quad x_2 - x_3 = (X_2 - X_3)e^{-t}.$$

In questo modo otteniamo la descrizione euleriana del moto nella forma

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1, \\ X_2 &= \frac{1}{2}[(x_2 + x_3)e^{-t} + (x_2 - x_3)e^t], \\ X_3 &= \frac{1}{2}[(x_2 + x_3)e^{-t} - (x_2 - x_3)e^t]. \end{aligned}$$

Le componenti della velocitá nella descrizione lagrangiana sono

$$v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = \frac{1}{2}[(X_2 + X_3)e^t - (X_2 - X_3)e^{-t}],$$
$$v_3 = \frac{1}{2}[(X_2 + X_3)e^t + (X_2 - X_3)e^{-t}].$$

Le componenti della velocitá nella descrizione euleriana sono date da

$$v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = x_3 \quad , \quad v_3 = x_2.$$

Dalla (1.54) otteniamo

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{W} = \mathbf{0}$.

2.35. Un moto nel quale la velocitá é data da

$$v_1 = kx_2 \quad , \quad v_2 = 0 \quad , \quad v_3 = 0,$$

PROBLEMI PROPOSTI X CASA

2.67. Il moto di un sistema continuo é definito da $x_1 = 3X_1$, $x_2 = e^t X_2 + e^{-t} X_3$, $x_3 = e^{-t} X_2 + e^t X_3$. Determinare i campi vettoriali della velocitá e dell'accelerazione, sia in forma lagrangiana che in forma euleriana.

2.68. Assegnate le seguenti funzioni

$$x_1 = X_1 + X_2 + X_3 \quad , \quad x_2 = KX_2 + e^{-t} X_3 \quad , \quad x_3 = e^{-t} X_3 + X_2,$$

verificare:

(i) per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ tali funzioni rappresentano un moto di un sistema continuo.

(ii) per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il determinante di $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$ risulta essere uguale ad 1.

2.69. Con riferimento alle seguenti funzioni

$$x_1 = k_1 X_1 \quad , \quad x_2 = k_1 X_2 + k_2 X_2 \quad , \quad x_3 = k_3 X_3,$$

determinare se esistono terne (k_1, k_2, k_3) tali che le funzioni assegnate descrivano un moto. In caso affermativo, determinare:

(i) il tensore C_{ij}.

(ii) l'espressione di C_{ij} in termini delle componenti dello spostamento.

2.70. In un moto di un sistema continuo la velocitá é data da

$$v_1 = (k + 1)x_2 \quad , \quad v_2 = kx_1 \quad , \quad v_3 = 0,$$

dove k é una costante positiva. Determinare:

(i) il tensore gradiente di velocitá e il tensore velocitá di deformazione.

(ii) gli autovalori e le direzioni principali del tensore velocitá di deformazione.

2.71. Sia dato il campo di velocitá

$$v_1 = 2x_1 x_2^2 \quad , \quad v_2 = 3x_1 x_2 \quad , \quad v_3 = x_1 x_2 x_3.$$

Determinare la velocitá di allungamento nella direzione del vettore $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

2.72. Il moto di un continuo é dato da

$$x_1 = X_2 + X_3 t \quad , \quad x_2 = -X_1 + X_2 t \quad , \quad x_3 = X_2 + X_3 t.$$

Determinare:

(i) le posizioni dei punti $A \equiv (0,1,1)$, $B \equiv (1,2,2)$, $C \equiv (2,3,3)$ all'istante $t = 5$.

(ii) la descrizione euleriana del campo di velocitá .

2.73. Il campo di velocitá di un continuo é dato da

$$v_1 = \frac{x_1 + 3}{1+t} \quad , \quad v_2 = \frac{2x_2 + 5}{1+t} \quad , \quad v_3 = \frac{3x_3 + 7}{1+t}.$$

Determinare:

(i) le equazioni del moto.

(ii) il gradiente di velocitá .

(iii) il tensore velocitá di deformazione.

2.74. Dato il campo di velocitá

$$v_1 = x_1^2 x_2^2 + x_2 \quad , \quad x_2 = x_1^3 + x_1 x_2 \quad , \quad v_3 = x_3.$$

Determinare :

(i) il gradiente di velocitá .

(ii) il tensore velocitá di deformazione.

(iii) il tensore vorticitá e il vettore velocitá di rotazione.

2.75. Sia dato il campo di velocitá

$$v_1 = \lambda x_1 x_2 \quad , \quad v_2 = \lambda x_1 + x_2 \quad , \quad v_3 = x_2$$

sul dominio B semplicemente connesso. Determinare il valore di λ per cui il moto risulti irrotazionale e determinare il potenziale della velocitá .

2.76. Un campo di velocitá é dato da

$$\begin{aligned} v_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 - \lambda_1 x_3, \\ v_2 &= \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_2, \\ v_3 &= (\lambda_3 - \lambda_1)x_3. \end{aligned}$$

Determinare:

(i) i valori λ_1, λ_2 e λ_3 in modo tale che il moto del corpo sia rigido.

(ii) le linee di vortice.