COMPITO DI GEOMETRIA - CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

(17 gennaio 2017)

1) Si trovi una base del seguente sottospazio
$V = \{(x, y, z, w) : x - 2y = y - z = w = 0\}$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \\ w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \text{variabile libera} \\ x = 2y \\ y = z \\ w = 0 \end{cases}$$

$V = \{(2y, y, y, 0), \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B} = ((2, 1, 1, 0))$

1

2) Calcolare il rango della seguente matrice al variare del parametro reale k:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ k+3 & 12 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \leq rk\, B \leq 3$$

- Invertiamo la 2ª riga con la 3ª:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ k+3 & 12 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Rendiamo il -1 della 1ª riga un elemento speciale (o pivot):

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ k+3 & 12 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 12R_1} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ k+3+60 & 0 & k-1+36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ k+63 & 0 & k+35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Perciò al variare del parametro k la matrice B ha sempre $rkB = 3$, poichè c'è un elemento speciale o pivot in ogni riga qualunque sia il valore assunto da k.

3) Data l'applicazione lineare $f: R^3 \to R^3$ definita da
$$f(x,y,z) = (3x, -4x - y - 8z, 3z)$$

i) Determinare una matrice diagonale D simile ad $A = M_f^{c,c}$, essendo A la matrice associata ad f rispetto le basi canoniche

ii) Determinare una matrice P che diagonalizza A.

i)

- Scriviamo la matrice A associata all'applicazione lineare.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Determiniamo una matrice diagonale D simile ad $A = M_f^{c,c}$ calcolando gli autovalori dell'appl. lineare:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left|\begin{matrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3-\lambda & 0 \\ -4 & -1-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

polinomio caratteristico

$$(3-\lambda)^2(-1-\lambda)=0$$

$\lambda_1 = 3$, $m_{\lambda_1} = 2$ $\vee$ $\lambda_2 = -1$, $m_{\lambda_2} = 1$

ii) Troviamo gli autospazi di ogni autovalore:

$\lambda = 3$: $(A-\lambda I)X=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ -4x-4y-8z=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \text{v. l.} \\ z = \text{v. l.} \\ x = -y-2z \end{cases}$$

$V_{\lambda_1} = \{(-y-2z, y, z), \text{ con } y \text{ e } z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow B_{V_{\lambda_1}} = \{(-2,0,1),(-1,1,0)\}$

$\lambda = -1$: $(A-\lambda I)X=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x=0 \\ -4x-8z=0 \\ 4z=0 \end{cases} \quad S_{\lambda_2} = \{(0,y,0), \text{ con } y \in \mathbb{R}\}$$

$B_{\lambda_2} = (0,1,0)$

- Perciò la matrice P che diagonalizza A è:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) a) Determina una forma parametrica della retta r) di equazione $2x - y + 5 = 0$ e della retta s) di equazione $y = 3$

b) Determinare i parametri direttori di r e s.

a)

r) $2x - y + 5 = 0$

IN FORMA PARAMETRICA:

r) $\begin{cases} x = t \\ 2t - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 2t + 5 \end{cases}$ r) $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \end{cases}$

s) $y = 3$

IN FORMA PARAMETRICA:

s) $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \end{cases}$

b) I parametri direttori di r) sono:

$v_r(1, 2)$

I parametri direttori di s) sono:

$v_s(1, 0)$

5) Studiare il fascio di coniche al variare del parametro reale k di equazione:

$$k^2x^2+4y^2+2xy+k-3=0$$

stabilendo per quali valori del parametro k vi sono coniche degeneri, non degeneri, ellissi, iperboli e parabole.

- Scriviamo la matrice associata al fascio di coniche:

$$A=\begin{pmatrix} k^2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo il determinante della matrice A:

$$|A|=\left|\begin{matrix} k^2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} k^2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix}=4k^2(k-3)-(k-3)=$$

$$=(k-3)(4k^2-1)$$

- Calcoliamo quando il determinante è uguale a zero per trovare eventuali coniche degeneri:

$$|A|=0 \Rightarrow (k-3)(4k^2-1)=0$$

$$k=3 \wedge k=\pm\frac{1}{2}$$

7

- Studiamo le coniche degeneri con $k=3$, $k=\frac{1}{2}$ e $k=-\frac{1}{2}$

▲ Con $k=3$:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$rk\,A = 2 \Rightarrow \mathcal{C}$ è spezzata in due rette distinte $r_1 \neq r_2$

Perciò troviamo r_1 e r_2:

$$9x^2+4y^2+2xy=0$$

$$x^2+\frac{4}{9}y^2+\frac{2}{9}xy=0$$

$$x^2+\left(\frac{2}{9}y\right)x+\frac{4}{9}y^2=0$$

$$\Delta=\left(\frac{2}{9}y\right)^2-\frac{16}{9}y^2=\frac{4}{81}y^2-\frac{16}{9}y^2=\frac{4y^2-144y^2}{81}=\frac{-140y^2}{81}<$$

$\Delta<0$

$\vdash\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\dashv$

▲ con $k=\frac{1}{2}$:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$rk\,A = 2 \Rightarrow \mathcal{C}$ è spezzata in due rette distinte $r_1 \neq r_2$

Perciò troviamo r_1 e r_2:

$$\frac{1}{4}x^2+4y^2+2xy-\frac{5}{2}=0$$

$$x^2+16y^2+8xy-10=0$$

$$x^2+(8y)x+16y^2-10=0$$

$$\Delta=\cancel{64y^2}-\cancel{64y^2}+40$$

$$x=\frac{-8y\pm\sqrt{40}}{2}$$

$r_1 \to x=\frac{-8y+\sqrt{40}}{2} \Rightarrow 2x+8y-\sqrt{40}=0 \Downarrow x+4y-\sqrt{10}=0$

$r_2 \to x=\frac{-8y-\sqrt{40}}{2} \Rightarrow 2x+8y+\sqrt{40}=0 \Downarrow x+4y+\sqrt{10}=0$

- con $k=-\frac{1}{2}$:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1} \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

$rkA=2 \Rightarrow \mathcal{C}$ è spezzata in 2 rette distinte $r_1 \neq r_2$

Perciò troviamo r_1 e r_2:

$$\frac{1}{4}x^2+4y^2+2xy-\frac{7}{2}=0$$

$$x^2+16y^2+8xy-14=0$$

$$x^2+(8y)x+16y^2-14=0$$

$$\Delta=\cancel{64y^2}-\cancel{64y^2}+56=0$$

$$x=\frac{-8y\pm\sqrt{56}}{2}$$

$r_1 \to x=\frac{-8y+\sqrt{56}}{2} \Rightarrow 2x+8y-\sqrt{56}=0 \Rightarrow x+4y-\sqrt{14}=0$

$r_2 \to x=\frac{-8y-\sqrt{56}}{2} \Rightarrow 2x+8y+\sqrt{56}=0$

~~$x+4y-\sqrt{14}=0$~~

- Con $k \neq 3$, $k \neq \frac{1}{2}$ e $k \neq -\frac{1}{2}$, allora si hanno coniche non degeneri, perciò studiamo A_{33} per vedere di che coniche si tratta:

$$A_{33} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{ellisse} \\ = 0 \Rightarrow \text{parabola} \\ < 0 \Rightarrow \text{iperbole} \end{cases}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4k^2 - 1$$

- Ellisse : $A_{33} > 0$

$$4k^2 - 1 > 0 \Rightarrow \underline{k < -\frac{1}{2} \wedge k > \frac{1}{2}}$$

Perciò con $k < -\frac{1}{2}$, $k > \frac{1}{2}$ e $k \neq 3$ $\Rightarrow$ <u>ellisse</u>

- Parabola : $A_{33} = 0$

$$4k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \wedge k = \frac{1}{2}$$

Però con $k = \frac{1}{2}$ e $k = -\frac{1}{2}$ sono coniche degeneri $\Rightarrow$ <u>$\nexists$ parabola</u>

- Iperbole : $A_{33} < 0$

$$4k^2 - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$$

Perciò con ~~k~~ $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ <u>iperbole</u>

6) Stabilire se la seguente quadrica è degenere o non degenere. Riconoscere il tipo e determinare una forma canonica:

$$4x^2+9y^2-36z^2-8x+36y+4=0$$

- Scriviamo la matrice associata alla quadrica:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -36 & 0 \\ -4 & 18 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo il determinante della matrice A per vedere se la quadrica è degenere o non degenere:

$$|A| = 4\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 9 & 0 & 18 \\ 0 & -36 & 0 \\ 18 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 18 \\ 0 & -36 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=4\cdot\left[9\cdot\begin{vmatrix} -36 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 18\cdot\begin{vmatrix} 0 & -36 \\ 18 & 0 \end{vmatrix}\right] + 4\cdot(-9)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -36 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=4\cdot\left[-1296+11.664\right]-36\cdot(144)=$$

$$=4\cdot 10.368-5.184>0$$

$$\Downarrow$$

La quadrica non è degenere

- Portiamo la quadrica in forma canonica col metodo del completamento del quadrato:

$$(4x^2-8x)+(9y^2+36y)-(36z^2)+4=0$$

$$(2x-2)^2\cancel{-4}+(3y+6)^2-36-(6z)^2\cancel{+4}=0$$

$$(2x-2)^2+(3y+6)^2-(6z)^2=36$$

$$\frac{(2x-2)^2}{36}+\frac{(3y+6)^2}{36}-\frac{(6z)^2}{36}=1$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}(x-1)^2}{\cancel{36}_9}+\frac{\overset{1}{\cancel{9}}(y+2)^2}{\cancel{36}_4}-\frac{\cancel{36}z^2}{\cancel{36}}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$$

- Applichiamo una traslazione:

$$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+2 \\ Z=z \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}-\frac{Z^2}{1}=1}$$

$$\Downarrow$$

<u>IPERBOLOIDE A UNA FALDA</u>

7) Determina una base ortonormale del sottospazio $W = \langle (1,0,-3,0),(-1,2,0,4) \rangle$.

- Essendo v_1 e v_2 linearmente indipendenti, usiamo il procedimento di GRAM-SCHMIDT per determinare una base ortonormale:

TROVIAMO e_1:

$$\underline{e_1} = \text{norm}\, v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,-3,0)}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{(1,0,-3,0)}{\sqrt{10}} = \underline{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)}$$

TROVIAMO e_2:

$$e_2 = \text{norm}\left[v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1\right] =$$

$$(v_2 \cdot e_1) = (-1,2,0,4)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1 = (-1,2,0,4) + \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) =$$

$$= (-1,2,0,4) + \left(\frac{1}{10}, 0, -\frac{3}{10}, 0\right) =$$

$$= \left(-\frac{9}{10}, 2, -\frac{3}{10}, 4\right)$$

$$\underline{e_2} = \text{norm}\left(-\frac{9}{10}, 2, \frac{3}{10}, 4\right) = \frac{\left(-\frac{9}{10}, 2, -\frac{3}{10}, 4\right)}{\sqrt{\left(+\frac{9}{10}\right)^2 + 2^2 + \left(-\frac{3}{10}\right)^2 + 4^2}} =$$

$$= \frac{\left(\mp\frac{9}{10}, 2, -\frac{3}{10}, 4\right)}{\sqrt{\frac{2090}{100}}} = \underline{\left(-\frac{9}{\sqrt{2090}}, \frac{20}{\sqrt{2090}}, -\frac{3}{\sqrt{2090}}, \frac{40}{\sqrt{2090}}\right)}$$

VERIFICA:

$$e_1 \cdot e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{9}{\sqrt{2090}}, \frac{20}{\sqrt{2090}}, -\frac{3}{\sqrt{2090}}, \frac{40}{\sqrt{2090}}\right) = -\frac{9}{\sqrt{2090}\cdot\sqrt{10}} + \frac{9}{\sqrt{2090}\cdot\sqrt{10}} =$$

$$= \underline{0}$$

c.v.d.