N°1

Determinare gli angoli formati dalle due rette:

a) $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$

$v_r = (2, -1) \qquad v_s = (3, 1)$

$$\cos\alpha = \pm \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}} = \frac{2 \cdot 3 + (-1)\,1}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}} =$$

$$= \frac{6-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45° \qquad \alpha_2 = \pi - 45° = 135°$$

b) $r: 3x + 5y - 1 = 0 \qquad s: x + y + 8 = 0$

$v_{r\perp}(3,5) \qquad v_{r/\!/}(5,-3) \qquad \|v_r\| = \sqrt{25+9} = \sqrt{36} = 6$

$v_{s\perp}(1,1) \qquad v_{s/\!/}(-1,1) \qquad \|v_s\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{(5,-3)(-1,1)}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-5+(-3)}{6\sqrt{2}} = -\frac{\cancel{8}^{4}}{{}_{3}\cancel{6}\sqrt{2}} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$\alpha_1 = \arccos \alpha = 160{,}52°$

$\alpha_2 = 180° - 160{,}52° = 19{,}48°$

N°2

Determinare un vettore perpendicolare al vettore $v(3,5)$

$v(3,5) \qquad v_\perp(5,-3)$

$v \cdot v_\perp = 0$

N°3

Determinare una retta passante per il punto di coordinate $(1,-1)$ e perpendicolare alla retta r

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \end{cases}$$

$v_\perp(2,-1)$

$v_\parallel(1;2)$

$2x - y + k = 0$

$2 + 1 + k = 0$

$k = -3$

$\boxed{2x - y - 3 = 0}$

FORMA CARTESIANA

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \end{cases}$$

FORMA PARAMETRICA

N°4

Determinare una retta passante per il punto di coordinate $(1,-1)$ e parallela alla retta r

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \end{cases}$$

$v_{\parallel r}(2,-1) \qquad v_{\perp r}(1,2)$

$x + 2y + k = 0$

$1 - 2 + k = 0$

$k = 1$

$\boxed{x + 2y + 1 = 0}$

N°5

Determinare una retta passante per il punto di coordinate $(1,-1)$ e perpendicolare alla retta r

$r: 3x+5y-1=0$

$v_{\perp r}(3,5)$ $v_{\parallel r}(-5,3)$

$-5x+3y+k=0$

$-5-3+k=0$

$k=8$

$\boxed{-5x+3y+8=0}$

N°6

Determinare una retta passante per il punto di coordinate $(1,-1)$ e parallela alla retta $r: 3x+5y-1=0$

$v_{\perp r}(3,5)$

$v_{\perp s}=(3,5)$

$3x+5y+k=0$

$3-5+k=0$

$k=2$

$\boxed{3x+5y+2=0}$

N° 7

Si trovi l'equazione della circonferenza di centro C e raggio R nei seguenti casi

1) $C(1,-1)$ $R=2$

2) $C(0,3)$ $R=3$

3) $C(-4,5)$ $R=5$

$C(\alpha,\beta)$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

1) $(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

$x^2-2x+1+y^2+2y+1-4=0$

$x^2+y^2-2x+2y-2=0$

2) $(x-0)^2+(y-3)^2=3^2$

$x^2+y^2-6y+\cancel{9}=\cancel{9}$

$x^2+y^2-6y=0$

3) $(x+4)^2+(y+5)^2=5^2$

$x^2+8x+16+y^2+10y+\cancel{25}=\cancel{25}$

$x^2+y^2+8x+10y+16=0$

N°8

Si scriva l'equazione della circonferenza di centro C e passante per P(2,0) in ciascuno dei seguenti casi:

a) $C(1,-1)$

b) $C(0,3)$

c) $C(-4,5)$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

a) $(2-1)^2+(0+1)^2=r^2$

$1+1=r^2$

$r^2=2$

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$

b) $(2-0)^2+(0-3)^2=r^2$

$4+9=r^2$

$r^2=13$

$x^2+(y-3)^2=13$

c) $(2+4)^2+(0-5)^2=r^2$

$6^2+5^2=r^2$

$36+25=r^2$

$r^2=61$

$(x+4)^2+(y-5)^2=61$

N°9

Si trovino centro e raggio delle seguenti circonferenze

a) $2x^2+2y^2-6x+3y=0$

$2x^2-6x+2y^2+3y=0$

$x^2-3x+y^2+\frac{3}{2}y=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{9}{16}=\frac{36+9}{16}=\frac{45}{16}$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{16}$

$C\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)$ $\quad r=\sqrt{\frac{45}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{5}$

b) $3x^2+3y^2+4x-2y=0$

$x^2+y^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}y=0$

$x^2+\frac{4}{3}x+y^2-\frac{2}{3}y=0$

$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}=0$

$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4+1}{9}=\frac{5}{9}$

$C\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\quad r=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

N°10

Si stabilisca per quali valori del parametro reale K l'equazione $2x^2+2y^2-6x+3y+K=0$ rappresenta una circonferenza

$$2x^2+2y^2-6x+3y+K=0$$

$$x^2+y^2-3x+\frac{3}{2}y+\frac{K}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{K}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{16}-\frac{K}{2}$$

$$r^2=\frac{45}{16}-\frac{K}{2}=\frac{45-8K}{16}$$

$$45-8K>0$$

$$45>8K$$

$$8K<45$$

$$K<\frac{45}{8}$$

N°11

Si trovi la circonferenza passante per $O(0;0)$, $A(2,0)$, $B(2,2)$

$\mathscr{C}_1$ centro punto medio di AB e raggio AM

$$M\left(\frac{4}{2};\frac{2}{2}\right)=(2;1)$$

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{(2-2)^2+(1)^2}=\sqrt{1}=1$$

$$\mathscr{C}_1 \quad (x-2)^2+(y-1)^2-1=0$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+\cancel{1}-\cancel{1}=0$$

$$x^2+y^2-4x-2y+4=0$$

$$\mathscr{C}_2 \quad (x-2)^2+(y-1)^2=0$$

Fascio $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ $\quad x^2+y^2-4x-2y+4+K\left((x-2)^2+(y-1)^2\right)=0$

(*)

N°12

Data la retta r: $y=1$ e la circonferenza $\mathcal{C}$
$\mathcal{C}$: $x^2+y^2-2x-2y=0$

a) si determini la posizione reciproca di r e $\mathcal{C}$
b) si calcolino le coordinate degli eventuali punti comuni

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2-2x-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2+1-2x-2=0 \end{cases}$$

$$x^2-2x-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=4+4=8$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{2})}{\cancel{2}}=\begin{cases}1+\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\end{cases}$$

$C(1,1)$ $\quad r=\sqrt{2}$

$d(C,r)=0<r$ $\quad r$ è secante

$A(1-\sqrt{2};1)$ $\quad B(1+\sqrt{2};1)$

(*) continuazione esercizio pag precedente

Impongo il passaggio per l'origine

$$4+k((-2)^2+(-1)^2)=0$$
$$4+k(4+1)=0$$
$$4+5k=0$$
$$k=-\frac{4}{5}$$

$$x^2+y^2-4x-2y+4-\frac{4}{5}((x-2)^2+(y-1)^2)=0$$

N°13

Data la retta $r: x+y-4=0$ e la circonferenza $\mathcal{C}: x^2+y^2-2x-2y=0$

a) si determini la posizione reciproca di r e $\mathcal{C}$

b) si calcolino le coordinate degli eventuali punti comuni

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x^2+y^2-2x-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4-y \\ (4-y)^2+y^2-2(4-y)-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4-y \\ 16-8y+y^2+y^2-8+\cancel{2y}-\cancel{2y}=0 \end{cases}$$

$$2y^2-8y+8=0$$

$$y^2-4y+4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=16-16=0$$

r tg a $\mathcal{C}$ in un punto $\Rightarrow d(r,C)=\sqrt{2}=r$

$$y=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$$

$$\begin{cases} x=4-2=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$P(2;2)$

N°14

Data la retta $r: y=5$ e la circonferenza $\mathcal{C}$
$\mathcal{C}: x^2+y^2-2x-2y=0$, si determini la posizione reciproca di r e $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} y=5 \\ x^2+y^2-2x-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=5 \\ x^2+25-2x-10=0 \end{cases}$$

$$x^2-2x+15=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 4-60<0$$

r esterna a $\mathcal{C}$ $\Rightarrow d(r,C)=4>r$