XII LEZIONE 11 Nov. 2013 LEZ. N10 TRIPODO GIOVANNI

① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (x+y-z,\ 2y+3z,\ y+z)$

a) Determinare l'applic. lineare inversa se è definita

ⓐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to |A| = -3+(2) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ a.l. invertibile

$-3+2$

$$AX = I \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = (1\ 0\ 0) \\ 2X_2 + 3X_3 = (0\ 1\ 0) \\ X_2 + X_3 = (0\ 0\ 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} '' \\ (0\ 0\ 2) - 2X_3 + 3X_3 = (0\ 1\ 0) \\ X_2 = (0\ 0\ 1) - X_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = (1\ 2\ -5) \\ X_3 = (0\ 1\ -2) \\ X_2 = (0\ -1\ 3) \end{cases}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x,y,z) = (x+2y-5z,\ -y+3z,\ y-2z)$$

b) Determinare la controimmagine del vettore $(0,5,0)$

ⓑ $$AX = Y \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z = 0 \\ 2y+3z = 5 \\ y+z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ -2z+3z = 5 \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10 \\ z = 5 \\ y = -5 \end{cases}$$

$f^{-1}(0,5,0) = (10,-5,+5) \to$ CONTROIMMAGINE

(c) $B\big((\overset{f_1}{1,2,-1}),(\overset{f_2}{2,0,3}),(\overset{f_3}{1,0,0})\big) \to$ Det. matrice ass. ad f (A') rispetto alla base B nel dominio e nel codominio

$$f(f_1) = f(1,2,-1) = (4,1,1) = af_1+bf_2+cf_3 = a(1,2,-1)+b(2,0,3)+c(1,0,0) = (a+2b+c,\ 2a,\ -a+3b)$$
$$f(f_2) = f(2,0,3) = (-1,9,3) = a'f_1+b'f_2+c'f_3 = a'(1,2,-1)+b'(2,0,3)+c'(1,0,0) = (a'+2b'+c',\ 2a',\ -a'+3b')$$
$$f(f_3) = f(1,0,0) = (1,0,0) = a''f_1+b''f_2+c''f_3 = a''(1,2,-1)+b''(2,0,3)+c''(1,0,0) = (a''+2b''+c'',\ 2a'',\ -a''+3b'')$$

$$\begin{cases} a+2b+c=4 \\ 2a=1 \\ -a+3b=1 \end{cases} \begin{cases} c=\frac{5}{2} \\ a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} a'+2b'+c'=-1 \\ 2a'=9 \\ -a'+3b'=3 \end{cases} \begin{cases} c'=-\frac{21}{2} \\ a'=\frac{9}{2} \\ b'=\frac{5}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} a''+2b''+c''=1 \\ 2a''=0 \\ -a''+3b''=0 \end{cases} \begin{cases} c''=1 \\ a''=0 \\ b''=0 \end{cases} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{21}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d) Det. la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla base B

(d) $E\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big) \to B\big((1,2,-1),(2,0,3),(1,0,0)\big)$

$$(1,2,-1) = 1(1,0,0)+2(0,1,0)-1(0,0,1)$$
$$(2,0,3) = 2(1,0,0)+0(0,1,0)+3(0,0,1) \Rightarrow P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(1,0,0) = 1(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)$$

MATRICE DI PASSAGGIO DALLA BASE E ALLA BASE B

(e) Det. la matrice di passaggio dalla base B alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$P\cdot X = I$ dove $X = P^{-1}$ = matrice di passaggio dalla base B alla base canonica E di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = (1\ 0\ 0) \\ 2x_1 = (0\ 1\ 0) \\ -x_1+3x_2 = (0\ 0\ 1) \end{cases} \begin{cases} x_3 = (1\ -\frac{5}{6}\ \cancel{0}\ \frac{2}{3}) \\ x_1 = (0,\frac{1}{2},0) \\ x_2 = (0\ \frac{1}{6}\ \cancel{0}\ \frac{1}{3}) \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \cancel{0}\ \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{6} & \cancel{0}\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Det. la composizione delle applicazioni $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definite da

(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (3x-y,\ x+y)$ $\quad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $g(x,y) = (x,x)$

stabilire se l'applicazione f composta g è iniettiva, suriettiva ed isomorfismo

$$f\circ g = (2x,2x) \to A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 = R_1 \Rightarrow rkA = 1$$

$rkA \neq \overset{2}{n}$ (numero di incognite e di righe) $\Rightarrow f\circ g$ non è iniettiva
$rkA \neq \underset{2}{m}$ (numero di colonne) $\Rightarrow f\circ g$ non è suriettiva

$\Rightarrow f\circ g$ non è isomorfismo

Data l'applicazione lineare

(3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (x+5y+z,\ 3y+z,\ -8z)$

Determinare la controimmagine del vettore $(1,2,3)$

(b) $AX = Y \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+5y+z = 1 \\ 3y+z = 2 \\ -8z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{31}{12} \\ y = \frac{19}{24} \\ z = -\frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(1,2,3) = \left(-\frac{31}{12}, \frac{19}{24}, -\frac{3}{8}\right) \to \text{CONTROIMMAGINE}$$

Det. la matrice associata ad F rispetto alla base

(c) $B\left((1,2,-1),(2,0,3),(1,0,0)\right)$ with $f_1 = (1,2,-1)$, $f_2 = (2,0,3)$, $f_3 = (1,0,0)$ $\to$ Det. matrice ass. ad f (A') rispetto alla base B nel dominio e nel codominio.

$f(f_1) = f(1,2,-1) = (10,5,8) = af_1 + bf_2 + cf_3 = a(1,2,-1) + b(2,0,3) + c(1,0,0) = (a+2b+c,\ 2a,\ -a+3b)$

$f(f_2) = f(2,0,3) = (5,3,-24) = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 = a'(1,2,-1) + b'(2,0,3) + c'(1,0,0) = (a'+2b'+c',\ 2a',\ -a'+3b')$

$f(f_3) = f(1,0,0) = (1,0,0) = a''f_1 + b''f_2 + c''f_3 = a''(1,2,-1) + b''(2,0,3) + c''(1,0,0) = (a''+2b''+c'',\ 2a'',\ -a''+3b'')$

$$\begin{cases} a+2b+c = 10 \\ 2a = 5 \\ -a+3b = 8 \end{cases} \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases} ; \begin{cases} a'+2b'+c' = 5 \\ 2a' = 3 \\ -a'+3b' = -24 \end{cases} \begin{cases} c' = \frac{37}{2} \\ a' = \frac{3}{2} \\ b' = -\frac{15}{2} \end{cases} ; \begin{cases} a''+2b''+c'' = 1 \\ 2a'' = 0 \\ -a''+3b'' = 0 \end{cases} \begin{cases} c'' = 1 \\ a'' = 0 \\ b'' = 0 \end{cases} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{15}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{37}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Det. la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla base B

(d) $E\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right) \to B\left((1,2,-1),(2,0,3),(1,0,0)\right)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ MATRICE DI PASSAGGIO DALLA BASE E ALLA BASE B

(e) det. la matrice di passaggio dalla base B alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$PX = I$ dove $X = P^{-1}$ = matrice di passaggio dalla base B alla base canonica E di $\mathbb{R}^3$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$