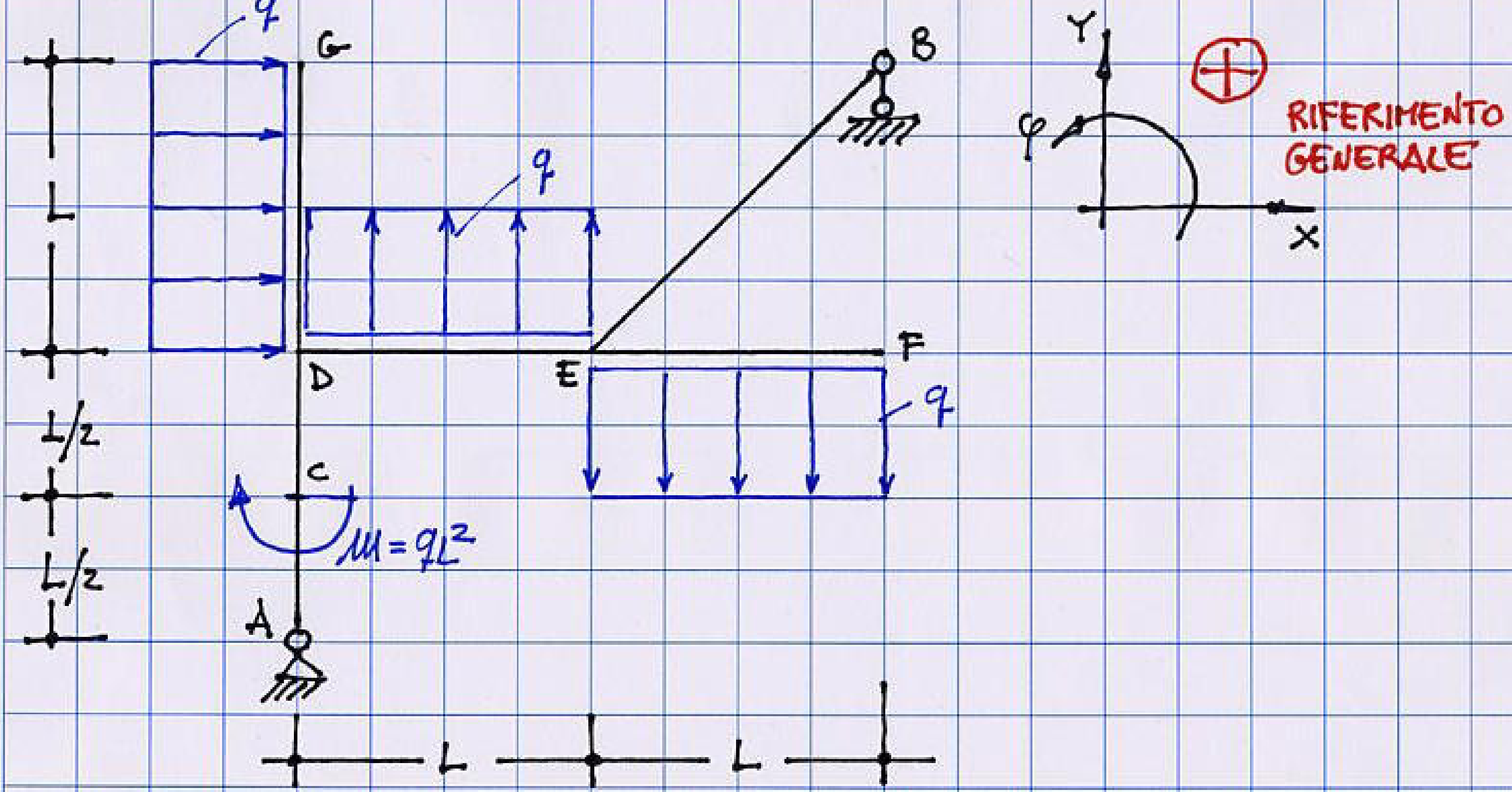
Corso di Laurea in
STORIA E CONSERVAZIONE DEI BENI ARCHITETTONICI E AMBIENTALI
Laboratorio di Statica e Stabilità, 2° anno (8 CFU), s.s.d. ICAR/08
STATICA e MECCANICA DELLE STRUTTURE
Docenti: P. FUSCHI, A.A. PISANO, A. SOFI

ESERCIZIO #2

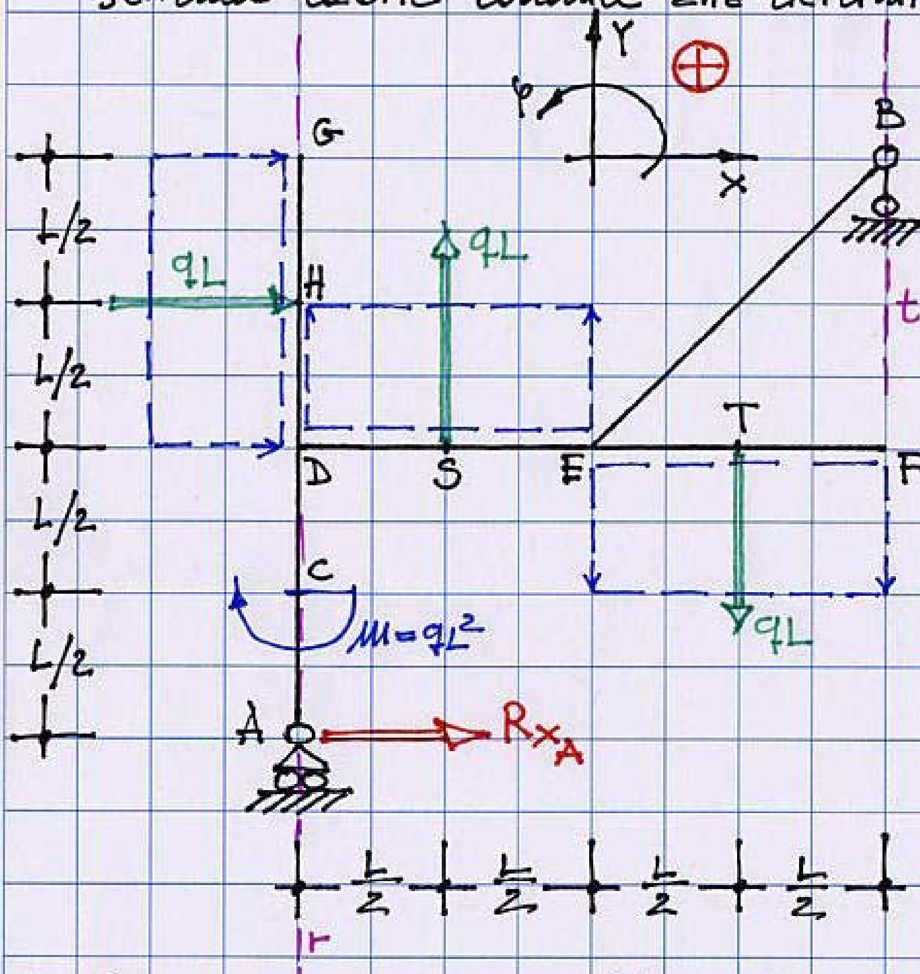
DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI DEL SISTEMA ISOSTATICO SEGUENTE TRAMITE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEI CINEMATISMI.



- CALCOLO DI R_{x_A}

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera A ($\mu = 2$) con un carrello a piano di scorrimento orizzontale ($\mu = 1$) e applicando in A la componente di reazione incognita R_{x_A} che si vuole valutare.

2. La reazione incognita R_{x_A} del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{x_A}.



grado di labilità
$$l = 3 - (1+1) = 1$$
Centro Assoluto di rotazione
CARRELLO A ⇝ C.A. $\in r$
PENDOLO B ⇝ C.A. $\in t$

$$C.A. \equiv R_\infty$$

3. Le equazioni di equilibrio dei cinematismi hanno la forma generale $\underline{\underline{C}}^T \underline{F} = \underline{0}$ con $\underline{\underline{C}}^T$:= matrice di equilibrio, $\underline{F}$:= vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una catena cinematica ($l=1$), il sistema $\underline{\underline{C}}^T \underline{F} = \underline{0}$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ (la matrice di equilibrio è costituita da una sola riga ovvero $\underline{C}$, matrice di compatibilità, è costituita da una sola colonna).

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

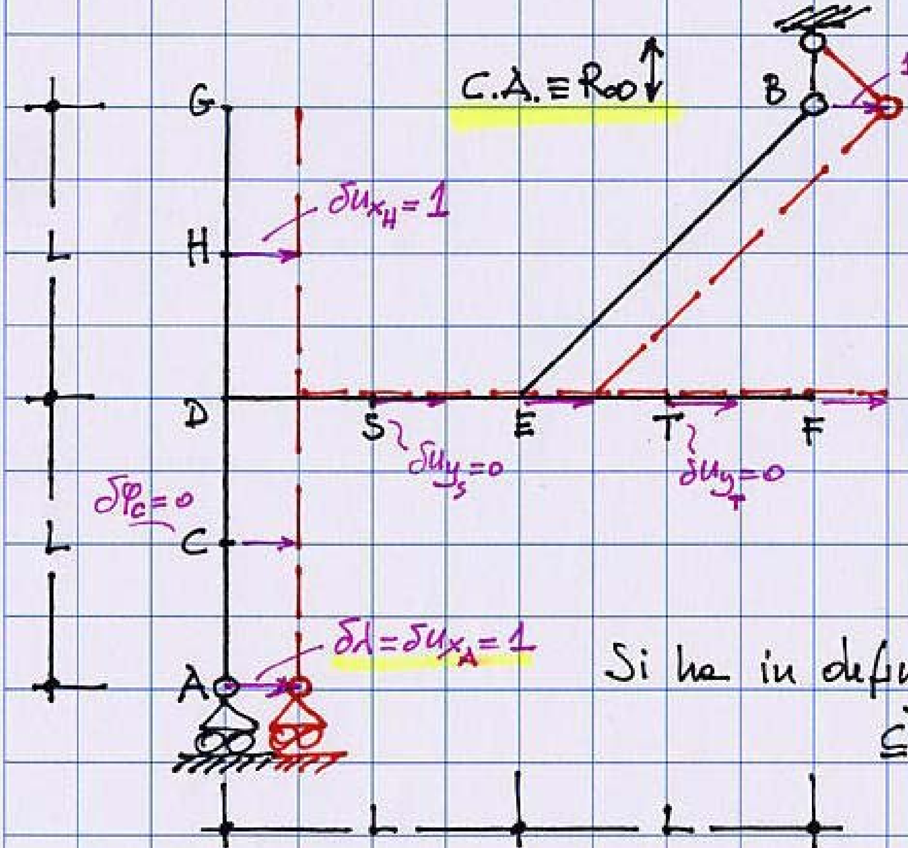
$$\delta\lambda = \delta u_{x_A} \; ; \quad \delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_A} \\ \delta\varphi_c \\ \delta u_{x_H} \\ \delta u_{y_S} \\ \delta u_{y_T} \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} R_{x_A} \\ -\mathcal{M} \\ qL \\ qL \\ -qL \end{bmatrix}$$

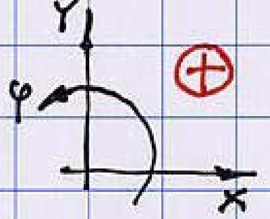
PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI DIPENDENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOST. NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta\underline{u}_D$)

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta u_{x_A} = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta\underline{u}_D\big|_{\delta\lambda=1}$.





$$\delta\underline{u}_D\big|_{\delta\lambda=1} = \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{x_A} \\ -\mathcal{M} \\ qL \\ qL \\ -qL \end{bmatrix} = 0$$

$$R_{x_A} + qL = 0$$

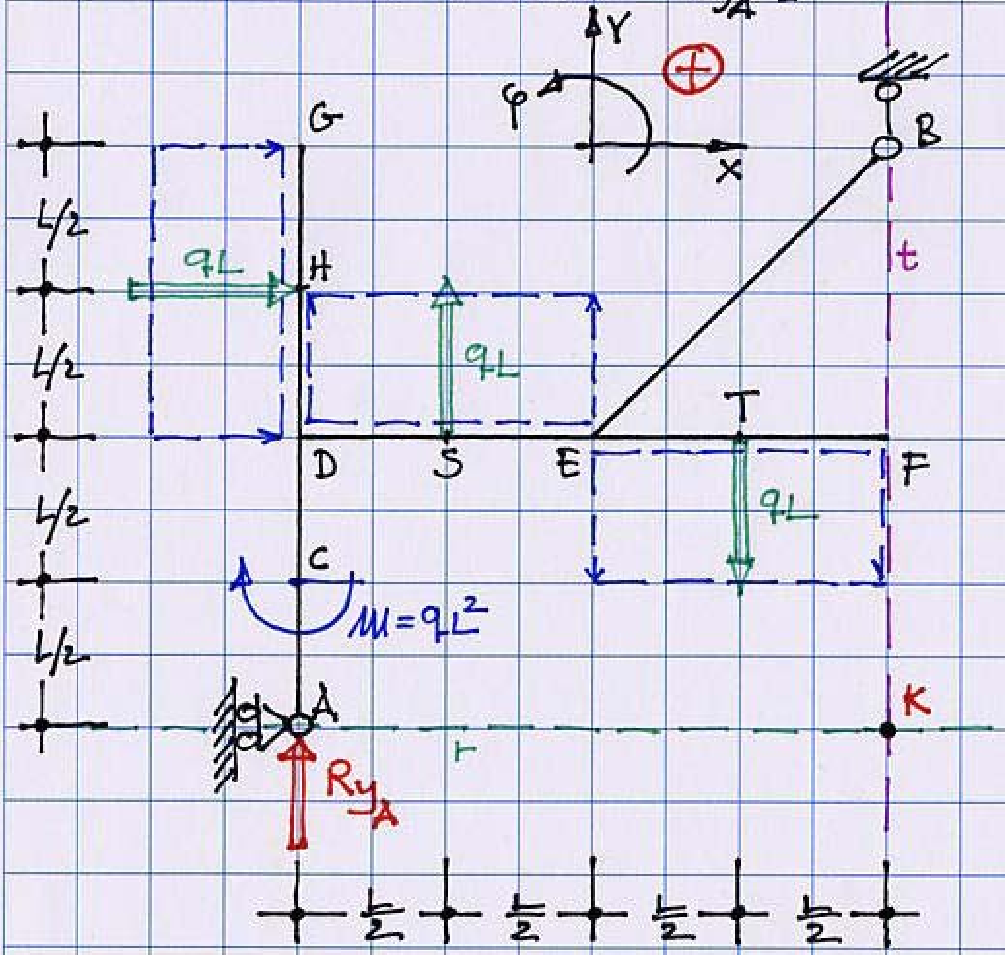
$$\boxed{R_{x_A} = -qL} \; (*)$$

(*) Il verso effettivo di R_{x_A} è opposto a quello ipotizzato !!

FUSCHI
PISANO
SOFI

- CALCOLO DI Ry_A

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera A ($\mu=2$) con un carrello a piano di scorrimento verticale ($\mu=1$) e applicando in A la componente di reazione incognita Ry_A che si vuole valutare.
2. La reazione incognita Ry_A del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di Ry_A.



grado di labilità
$$\ell = 3-(1+1) = 1$$

Centro Assoluto (C.A.) di rotazione

CARRELLO A $\rightsquigarrow$ C.A. $\in r$

PENDOLO B $\rightsquigarrow$ C.A. $\in t$

$$C.A. \equiv K$$

3. Vale l'osservazione di cui al punto 3. del calcolo di Rx_A.

SCBAA LABSTA
campus
FUSCHI
PISANO
SOFI

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

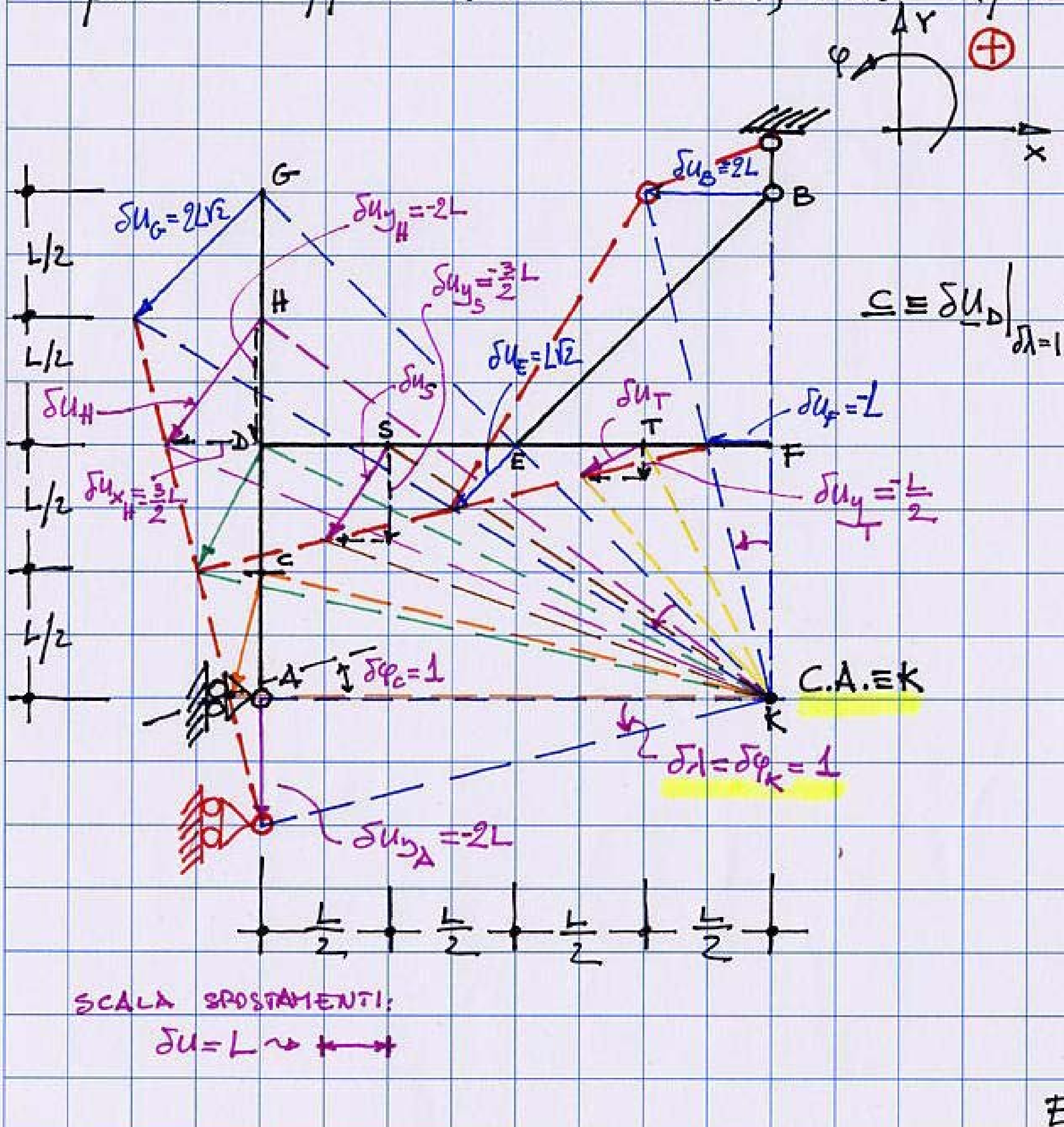
$$\delta\lambda = \delta\varphi_K \quad ; \quad \delta\underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{y_A} \\ \delta\varphi_C \\ \delta u_{x_H} \\ \delta u_{y_S} \\ \delta u_{y_T} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} R_{y_A} \\ -\mathcal{M} \\ qL \\ qL \\ -qL \end{bmatrix} ;$$

PARAMETRO LAGRANGIANO (ROTAZIONE RIGIDA DEL SISTEMA ATTORNO A C.A.≡K).

VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI DIPENDENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOST. NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME δy_D)

l'individuazione di $\underline{c}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta\varphi_K = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{c} \equiv \delta\underline{u}_D\big|_{\delta\lambda=1}$.



$$\underline{c} \equiv \delta\underline{u}_D\Big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} -2L \\ 1 \\ -\frac{3}{2}L \\ -\frac{3}{2}L \\ -\frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

SCBAA LABSTA
campus one
FUSCHI
PISANO
SOFI

Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2L & 1 & -\frac{3}{2}L & -\frac{3}{2}L & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ry_A \\ -\mathcal{M} \\ qL \\ qL \\ -qL \end{bmatrix} = 0$$

$$-2L\,Ry_A - \overbrace{\mathcal{M}}^{=qL^2} - \frac{3}{2}qL^2 - \frac{3}{2}qL^2 + \frac{qL^2}{2} = 0$$

$$-2L\,Ry_A - \frac{7}{2}qL^2 = 0 \rightsquigarrow \boxed{Ry_A = -\frac{7}{4}qL}\ (*)$$

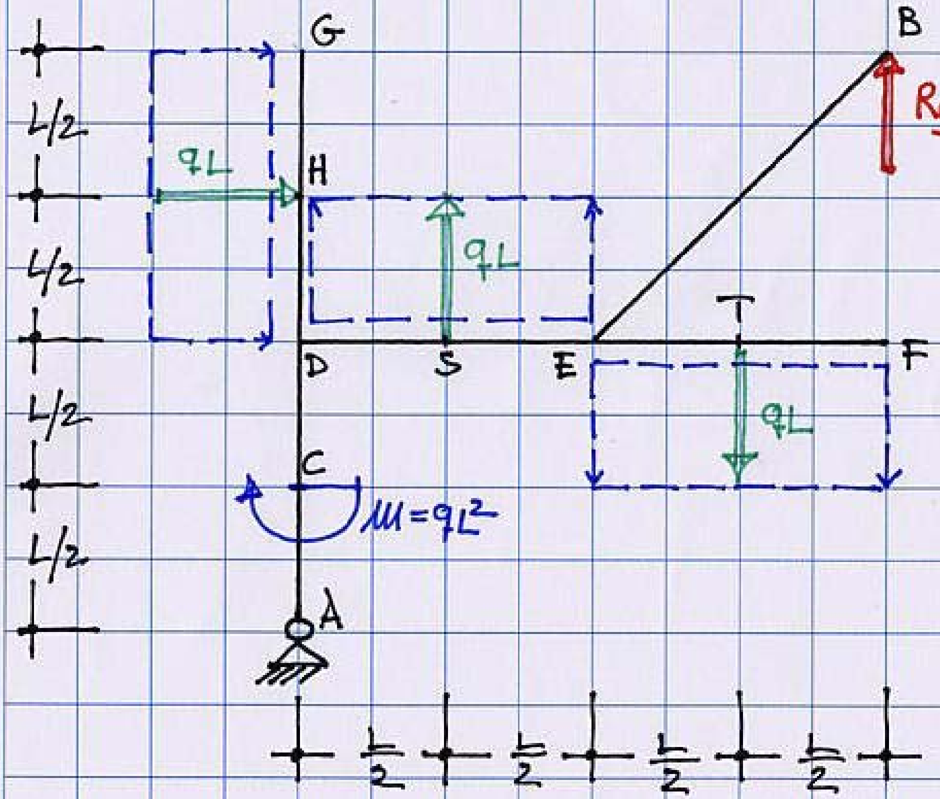
(*) Il verso effettivo di Ry_A è opposto a quello ipotizzato!

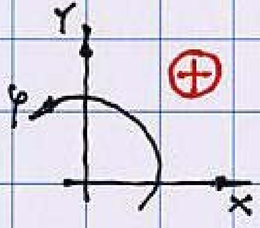
- <u>CALCOLO DI Ry_B</u>

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sopprimendo il pendolo B e sostituendo ad esso la componente di reazione incognita Ry_B che è potenzialmente in grado di esplicare.

2. La reazione incognita Ry_B del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di Ry_B.

FUSCHI
PISANO
SOFI





grado di labilità

$l = 3 - 2 = 1$

Centro Assoluto (C.A.) di rotazione

CERNIERA A $\rightsquigarrow$ C.A. ≡ A

3. Valgono le osservazioni di cui ai punti 3. dei precedenti calcoli!

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

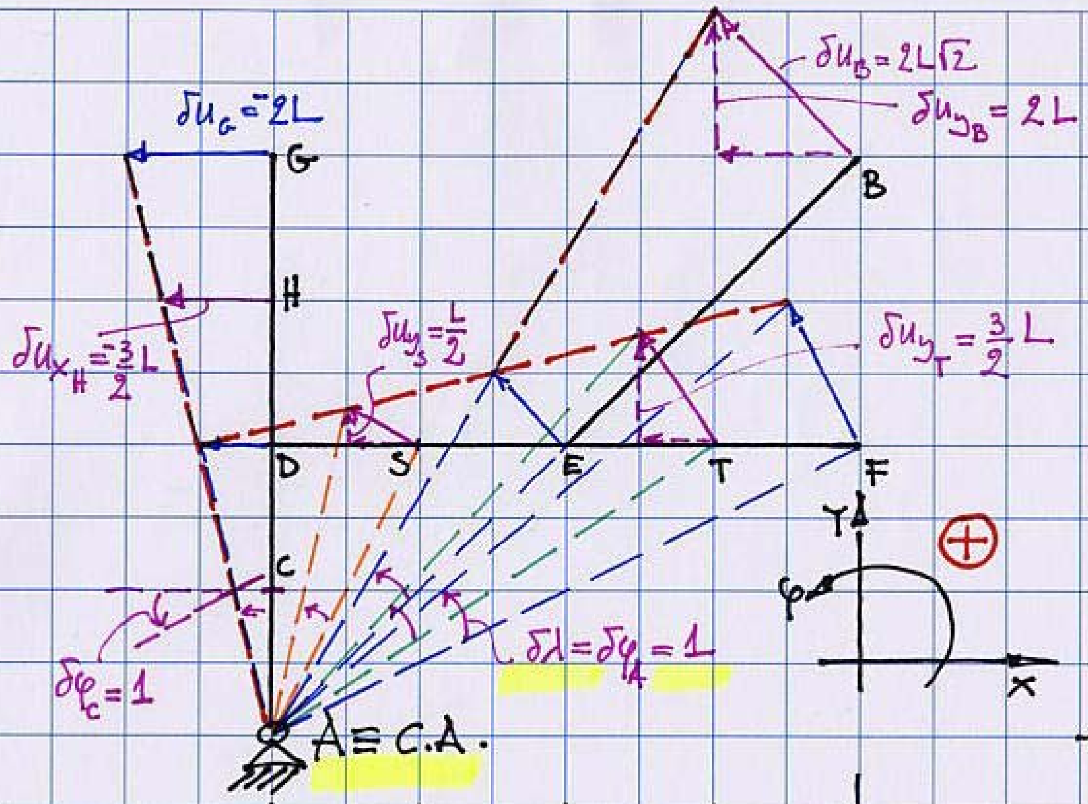
$$\delta\lambda = \delta\varphi_A \;;\quad \delta\underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta\varphi_C \\ \delta u_{x_H} \\ \delta u_{y_S} \\ \delta u_{y_T} \\ \delta u_{y_B} \end{bmatrix} \;;\quad \underline{F} = \begin{bmatrix} -\mathcal{M} \\ qL \\ qL \\ -qL \\ R_{y_B} \end{bmatrix}$$

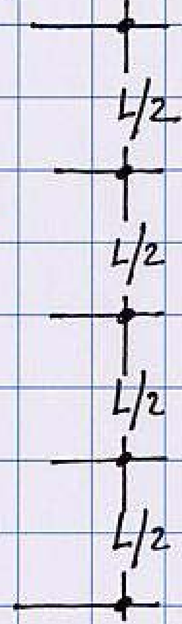
PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI DIPENDENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMP. DI SPOST. NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta\underline{u}_D$)

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta\varphi_A = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta\underline{u}_D\Big|_{\delta\lambda = 1}$.





$$\delta \underline{u}_D \Big|_{\delta\lambda=1} = \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2}L \\ \frac{L}{2} \\ \frac{3}{2}L \\ 2L \end{bmatrix}$$

Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2}L & \frac{L}{2} & \frac{3}{2}L & 2L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{M} \\ qL \\ qL \\ -qL \\ R_{y_B} \end{bmatrix} = 0$$

$$\underbrace{-\mathcal{M}}_{(\mathcal{M}=qL^2)} - \frac{3}{2}qL^2 + \frac{qL^2}{2} - \frac{3}{2}qL^2 + R_{y_B}2L = 0 \rightarrow \boxed{R_{y_B} = \frac{7}{4}qL}$$

- REAZIONI VINCOLARI DEL SISTEMA ISOSTATICO