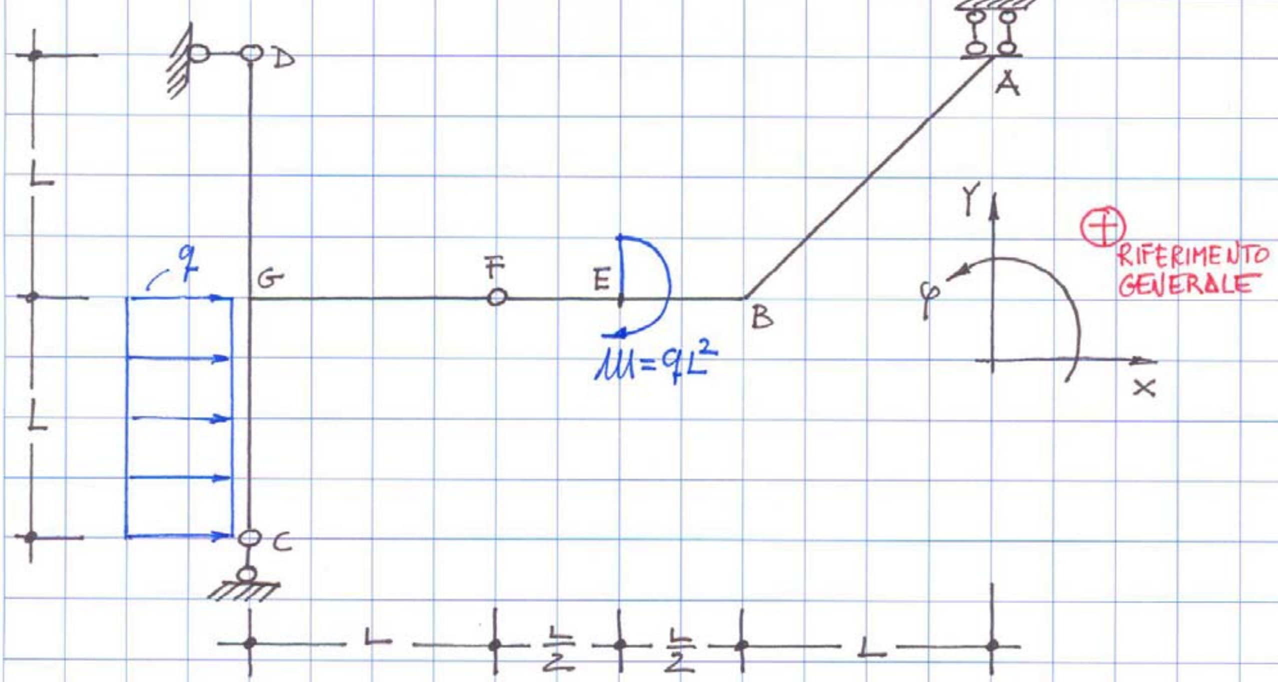
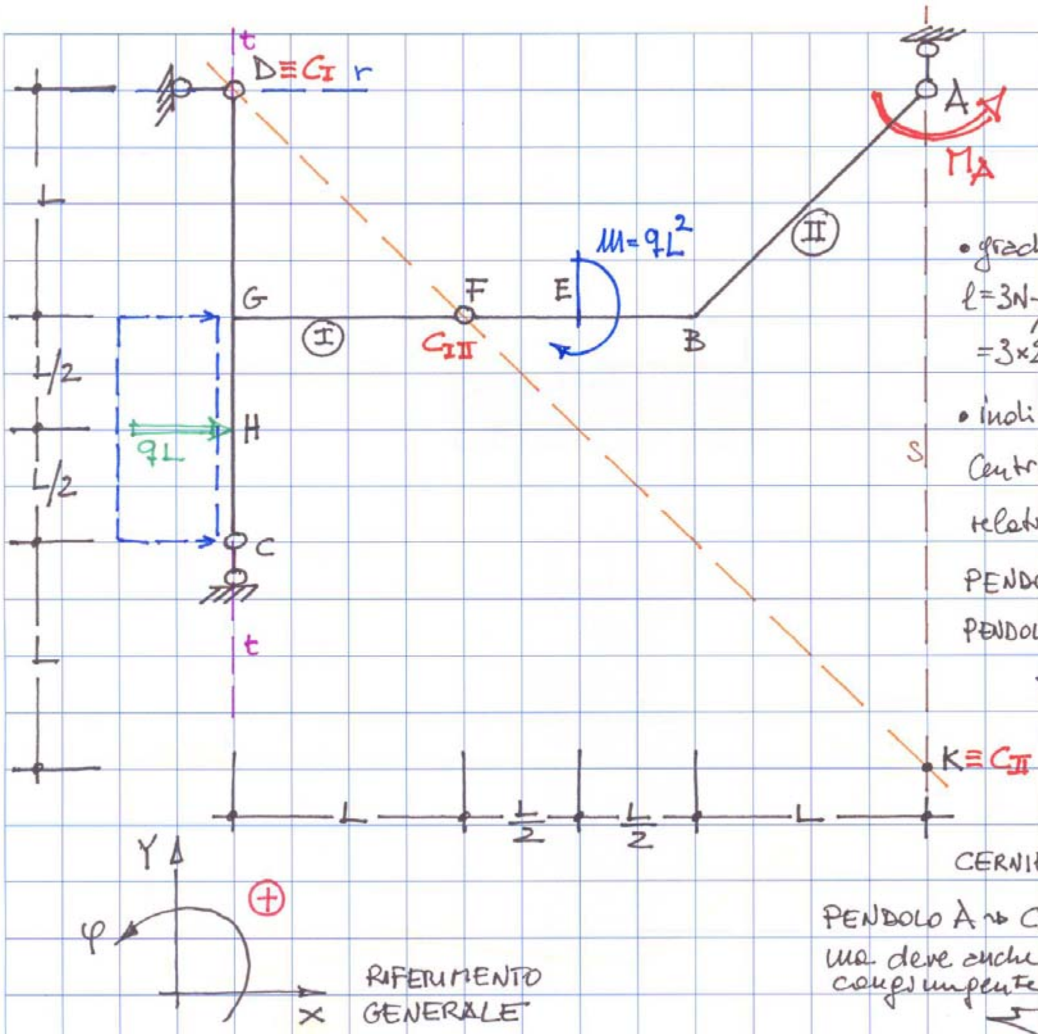
ESERCIZIO #4

DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI DEL SISTEMA ISOSTATICO SEGUENTE TRAMITE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEI CINEMATISMI.



- **CALCOLO DI M_A**

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo il doppio pendolo A ($\mu=2$) con un pendolo semplice ad asse verticale ($\mu=1$) e applicando in A la componente di reazione incognita M_A che si vuole valutare.
2. La reazione incognita M_A del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di M_A.



- grado di labilità
  $\ell = 3N - \mu_t =$
  $= 3 \times 2 - (1+1+2+1) = 1$
- individuazione Centri Assoluti e relativo:

PENDOLO C ⇝ $C_I \in t$

PENDOLO D ⇝ $C_I \in r$

⇓

$C_I \equiv D$

CERNIERA F ⇝ $C_{I\,II} \equiv F$

PENDOLO A ⇝ $C_{II} \in S$
ma deve anche $\in$ alla congiungente C_I, $C_{I\,II}$

⇓

$C_{II} \equiv K$

3. Le equazioni di equilibrio dei cinematismi hanno la forma generale $\underline{\underline{C}}^T \underline{F} = \underline{0}$ con $\underline{\underline{C}}^T$:= matrice di equilibrio, $\underline{F}$:= vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una catena cinematica ($\ell = 1$), il sistema $\underline{\underline{C}}^T \underline{F} = \underline{0}$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ (la matrice di equilibrio è costituita da una sola riga ovvero $\underline{C}$, matrice di compatibilità, è costituita da una sola colonna).

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

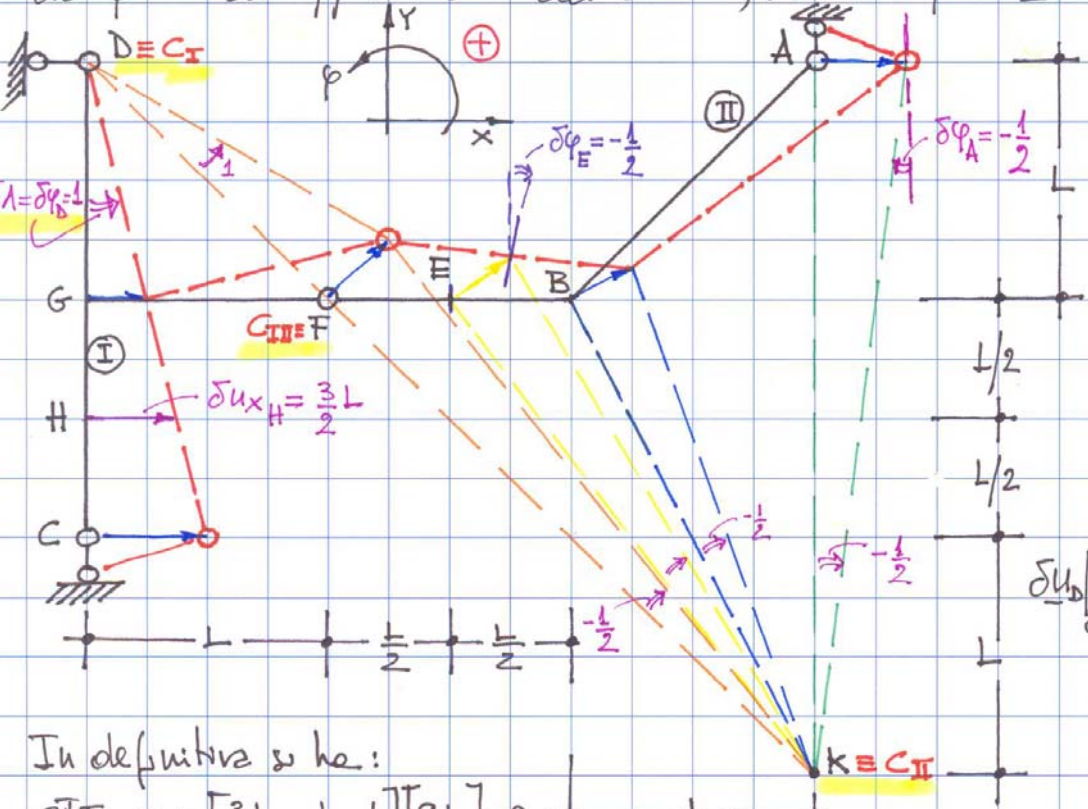
$$\delta\lambda = \delta\varphi_D \equiv \delta\varphi_I \; ; \quad \delta\underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \delta\varphi_E \\ \delta\varphi_A \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -\mathcal{M} \\ M_A \end{bmatrix} ;$$

PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI DEI PUNTI OVE SONO APPLICATI I CARICHI (COMPONENTI DI SPOST. NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta\underline{u}_D$)

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta\varphi_D = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta\underline{u}_D\big|_{\delta\lambda=1}$.



$$\delta\underline{u}_D\big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

In definitiva si ha:

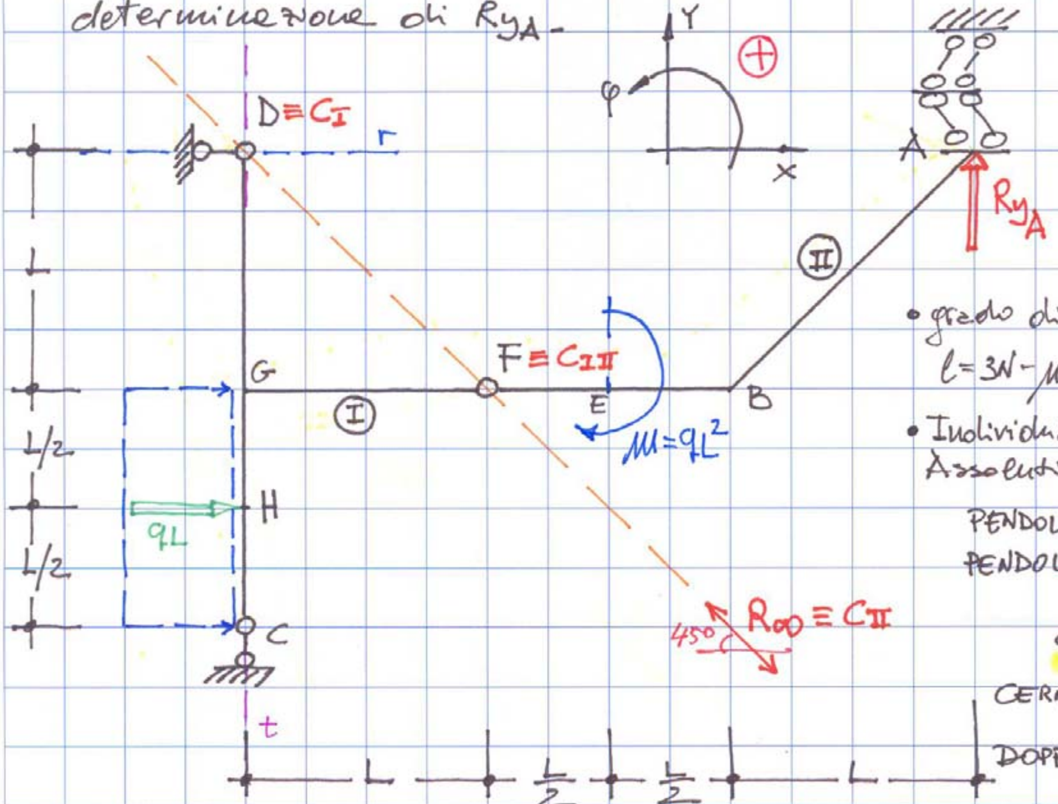
$$\underline{C}^T\underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -\mathcal{M} \\ M_A \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}qL^2 + \frac{\overset{=qL^2}{\mathcal{M}}}{2} - \frac{M_A}{2} = 0 \rightarrow \boxed{M_A = 4qL^2}$$

SCBAA LABSTA
campus one
FUSCHI
PISANO
SOFI

- **CALCOLO DI R_{yA}**

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo il doppio pendolo A ($\mu=2$) con un doppio bipendolo ($\mu=1$) e applicando in A la componente di reazione incognita R_{yA} che si vuole valutare.
2. La reazione incognita R_{yA} del sistema originario è infatti interpretabile come un carico esterno incognito agente sulla catena cinematica prima individuata. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{yA}.



- grado di labilità
$l = 3N - \mu_t = 3\times 2 - (1+1+2+1) = 1$
- Individuazione Centri Assoluti e Relativi

PENDOLO C → $C_I \in t$
PENDOLO D → $C_I \in r$
⇓
$C_I \equiv D$

CERNIERA F → $C_{I\,II} \equiv F$

DOPPIO BIPENDOLO A
⇓
$C_{II} \in r_\infty$
⇓
$C_{II} \in r_\infty$ e deve essere allineato con C_I, $C_{I\,II}$ quindi
$C_{II} \equiv R_\infty$ 45°

3. Vale l'osservazione 3. di cui al calcolo di M_A.

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

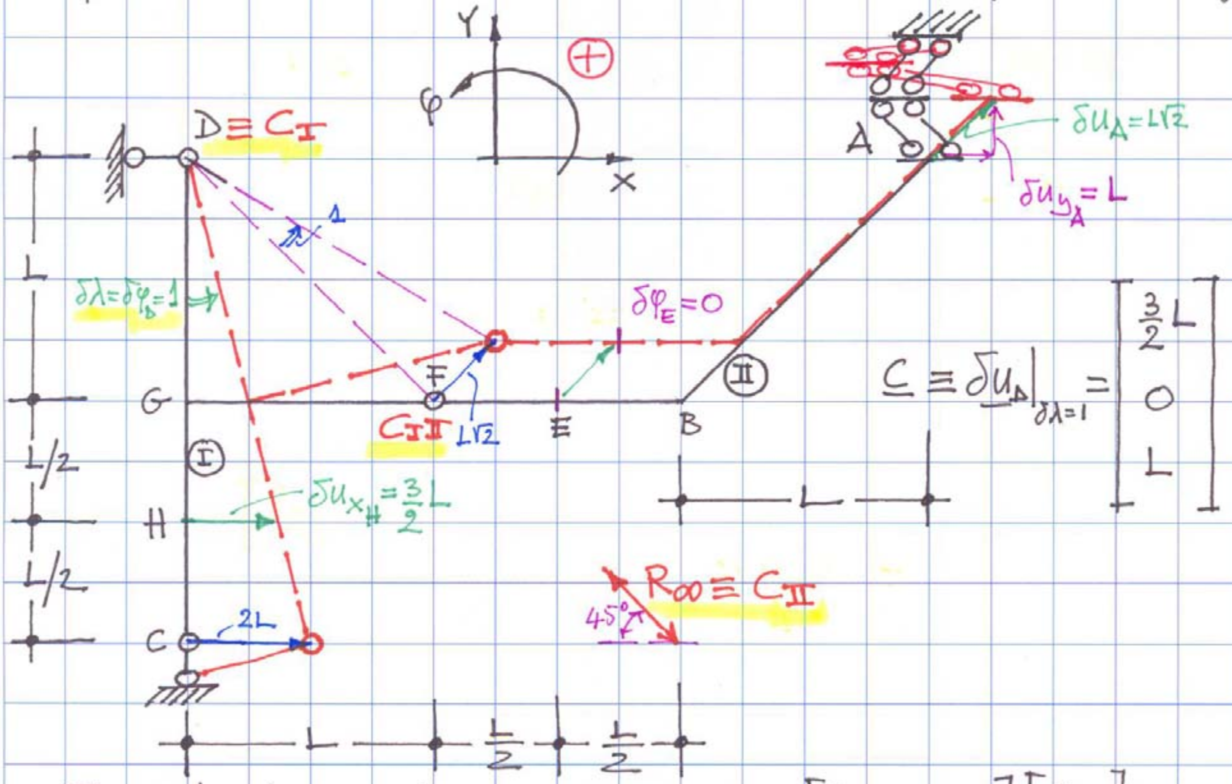
$$\delta\lambda = \delta\varphi_D \; ; \quad \delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \delta\varphi_E \\ \delta u_{y_A} \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -\mathcal{M} \\ R_{y_A} \end{bmatrix} ;$$

PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI DEI PUNTI OVE SONO APPLICATI I CARICHI (COMPONENTI DI SPOST. NELLA DIREZIONE DEI CARICHI).

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta \underline{u}_D$)

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta\varphi_D = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta\underline{u}_D|_{\delta\lambda=1}$.



$$\underline{C} \equiv \delta\underline{u}_D|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

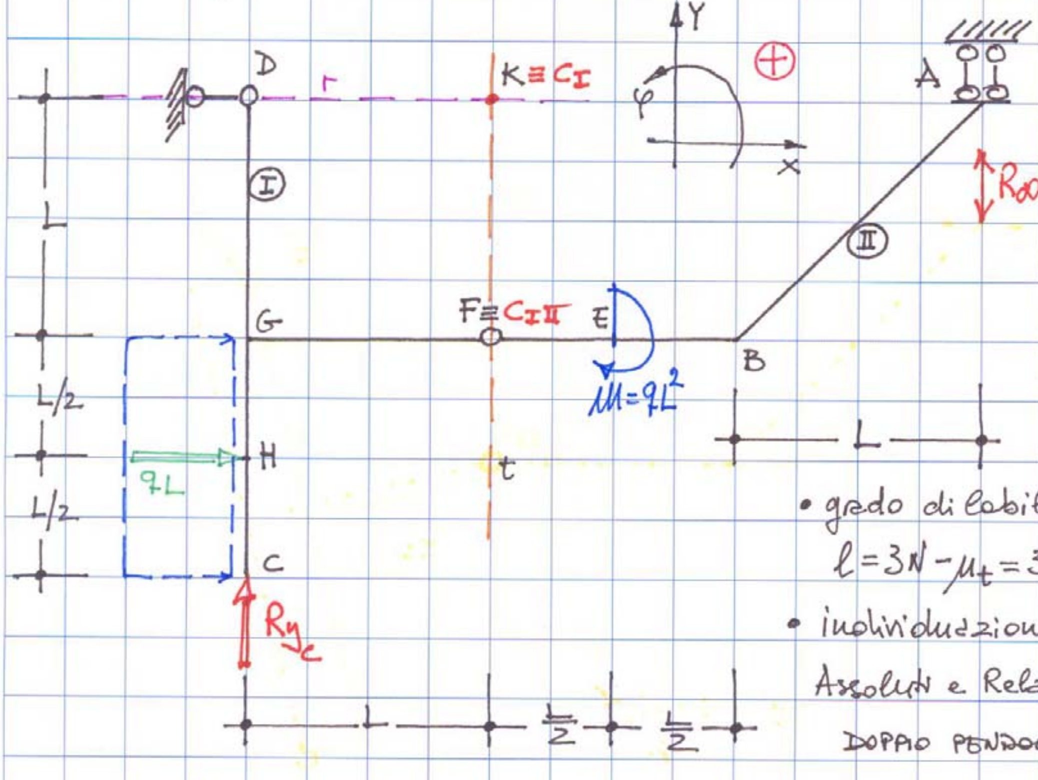
In definitiva si ha: $\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -\mathcal{M} \\ R_{y_A} \end{bmatrix} = 0$

$$\frac{3}{2} qL^2 + R_{y_A} L = 0 \rightarrow \boxed{R_{y_A} = -\frac{3}{2} qL}^{(*)}$$

(*) Il verso effettivo è opposto a quello ipotizzato!

• CALCOLO DI Ry_C

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario eliminando il pendolo C e sostituendo la componente di reazione incognita Ry_C che esso è potenzialmente in grado di esplicare.
2. La reazione incognita Ry_C del sistema originario è infatti interpretabile come un carico esterno incognito agente sulla catena cinematica così individuata. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di Ry_C.



• grado di labilità

$l = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (1+2+2) = 1$

• individuazione Centri Assoluti e Relativo

DOPPIO PENDOLO A → $C_{II} \equiv R_\infty$

CERNIERA F → $C_{I,II} \equiv F$

PENDOLO D → $C_I \in r$

C_I deve inoltre essere allineato con $C_{I,II}$ e C_{II} (retta t) quindi

$C_I \equiv K$

3. Vale l'osservazione 3. dei calcoli svolti in precedenza.

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

SCBAA LABSTA campus FUSCHI PISANO SOFI

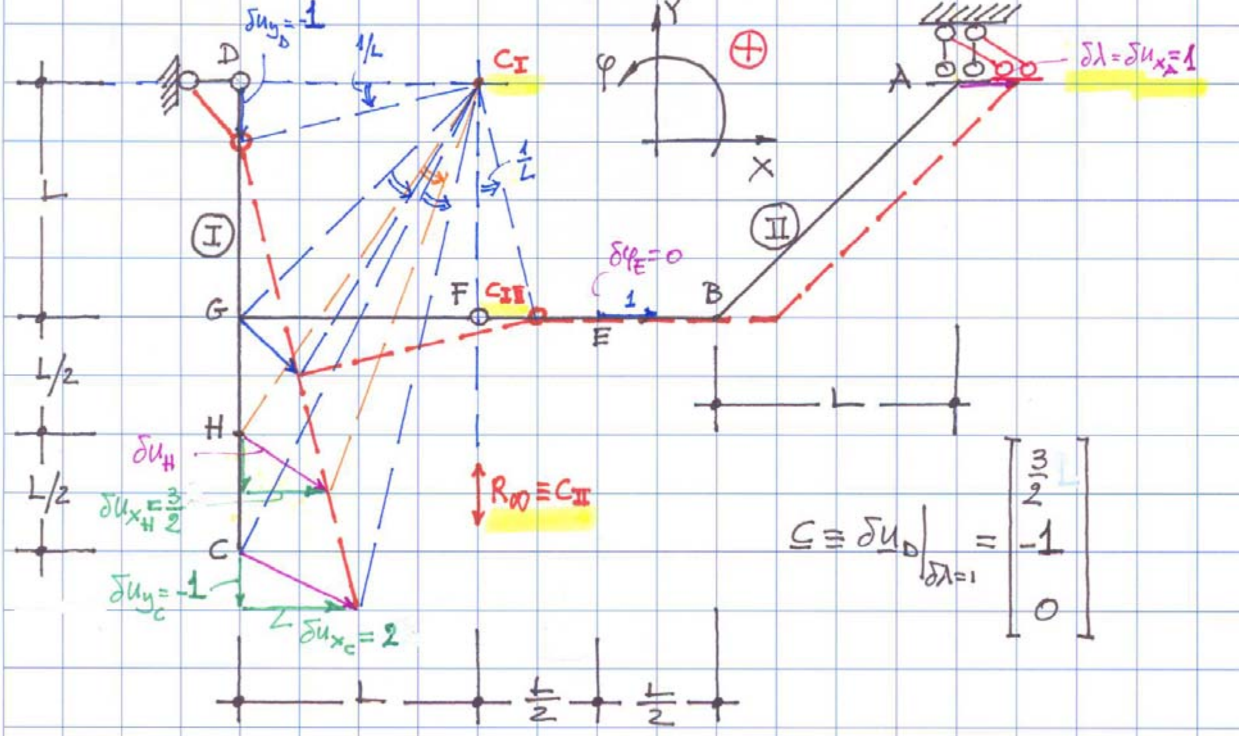
$$\delta\lambda = \delta u_{x_A} \,; \qquad \delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \delta u_{y_C} \\ \delta \varphi_E \end{bmatrix} ; \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ R_{y_C} \\ -M \end{bmatrix} ;$$

PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta \underline{u}_D$)

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta u_{x_A} = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D |_{\delta\lambda = 1}$.



$$\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D \big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In definitiva si ha:

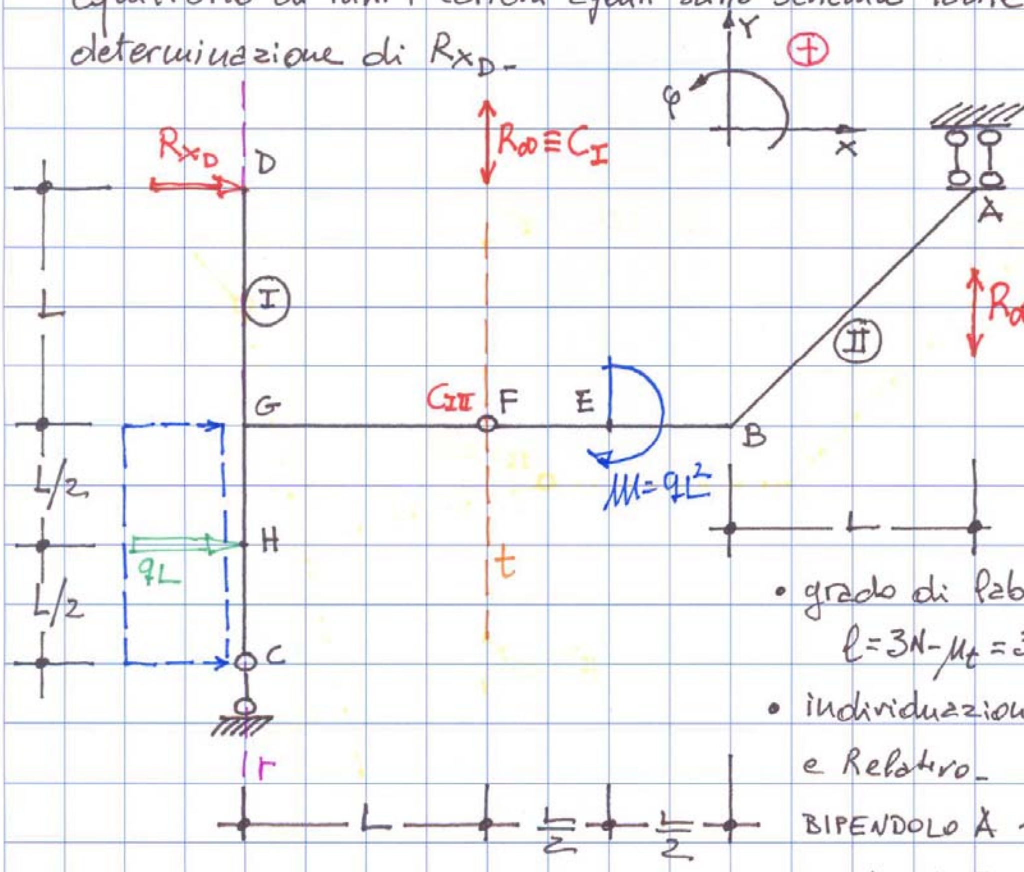
$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ R_{y_C} \\ -M \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} q L^2 - R_{y_C} L = 0$$

$$\boxed{R_{y_C} = \frac{3}{2} q L}$$

- <u>CALCOLO DI R_{x_D}</u>

FUSCHI
PISANO
SOFI

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario eliminando il pendolo D e sostituendo la componente di reazione incognita che esso è potenzialmente in grado di esplicare, R_{x_D}.
2. La reazione incognita R_{x_D} del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{x_D}.



- grado di labilità

$$\ell = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (1+2+2) = 1$$

- individuazione Centri Assoluti e Relativo.

BIPENDOLO A $\rightsquigarrow$ $C_{II} \equiv R_{\infty}$ ↕

CERNIERA F $\rightsquigarrow$ $C_{I\,II} \equiv F$

PENDOLO C $\rightsquigarrow$ $C_I \in r$

C_I deve inoltre essere allineato con $C_{I\,II}$, C_{II} (retta t) quindi $C_I \equiv R_{\infty}$ ↕

3. Vale l'osservazione 3 di cui ai calcoli precedenti!

SCBAA LABSTA
campus
FUSCHI
PISANO
SOFI

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

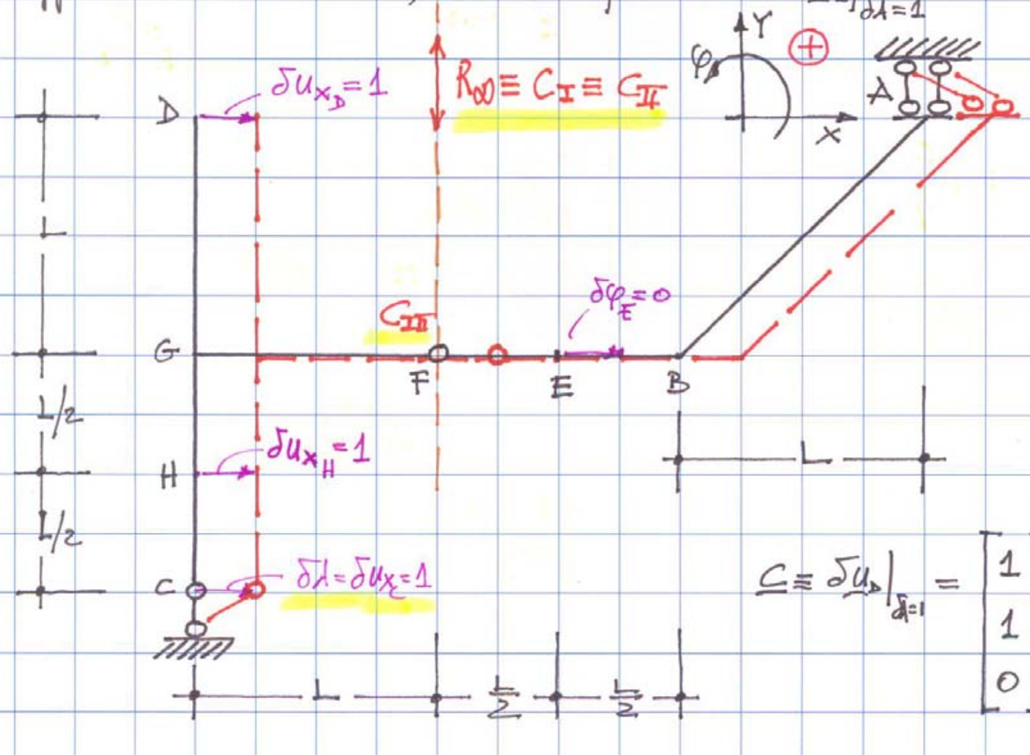
$$\delta\lambda = \delta u_{x_C} \; ; \quad \delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_D} \\ \delta u_{x_H} \\ \delta\varphi_E \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} R_{x_D} \\ qL \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix} \; ;$$

PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta\underline{u}_D$)

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta u_{x_C} = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D \big|_{\delta\lambda=1}$.



$$\underline{C} \equiv \delta\underline{u}_D \big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In definitiva si ha:

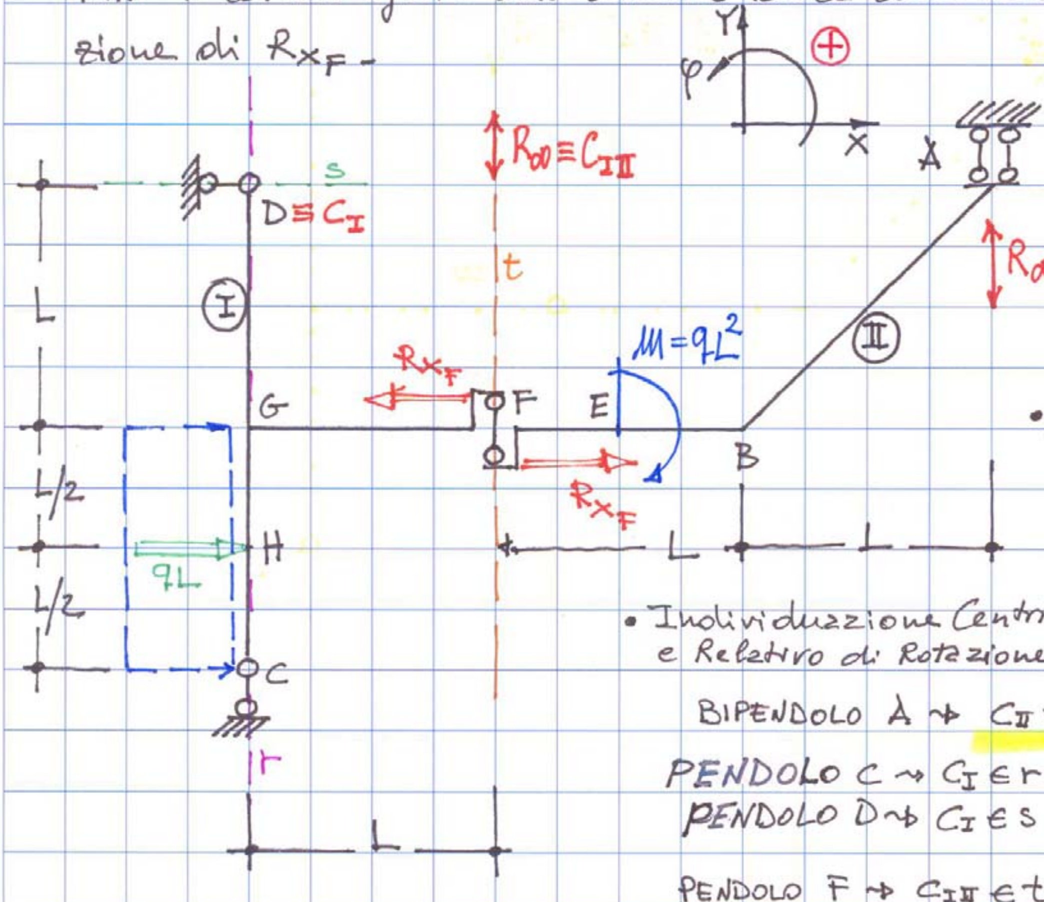
$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow [1 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} R_{x_D} \\ qL \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow R_{x_D} + qL = 0 \rightarrow \boxed{R_{x_D} = -qL}^{(*)}$$

(*) Il verso effettivo è opposto a quello ipotizzato!

• CALCOLO DI R_{x_F}

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera interna F ($\mu=2$) con un pendolo interno ad asse verticale ($\mu=1$) e applicando in F la reazione interna mutua R_{x_F} che si vuole valutare. Quest'ultima è assunta arbitrariamente ma di uguale modulo e verso opposto sui due tratti.

2. La reazione mutua incognita R_{x_F} agente sui due corpi del sistema isostatico originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno autoequilibrato incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{x_F}.



• grado di labilità:

$\ell = 3N - \mu_t =$
$= 3\times2 - (1+1+1+2) = 1$

• Individuazione Centri Assoluti e Relativo di Rotazione:

BIPENDOLO A → $C_{II} \equiv R_\infty$

PENDOLO C → $C_I \in r$
PENDOLO D → $C_I \in s$
} $C_I \equiv D$

PENDOLO F → $C_{I\,II} \in t$

$C_{I\,II} \in t$ e deve essere allineato con C_I e C_{II} quindi $C_{I\,II} \equiv R_\infty$

3. Vale l'osservazione 3. dei calcoli svolti in precedenza!

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$$\delta\lambda = \delta u_{x_A} \; ; \quad \delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \delta u^{(I)}_{x_F} \\ \delta u^{(II)}_{x_F} \\ \delta\varphi_E \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -R_{x_F} \\ R_{x_F} \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix}$$

PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)

SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA SEZ. F APPARTENENTE AL CORPO I

SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA SEZ. F APPARTENENTE AL CORPO II

R_{x_F} AGENTE SUL CORPO I

R_{x_F} AGENTE SUL CORPO II

VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\delta \underline{u}_D$)

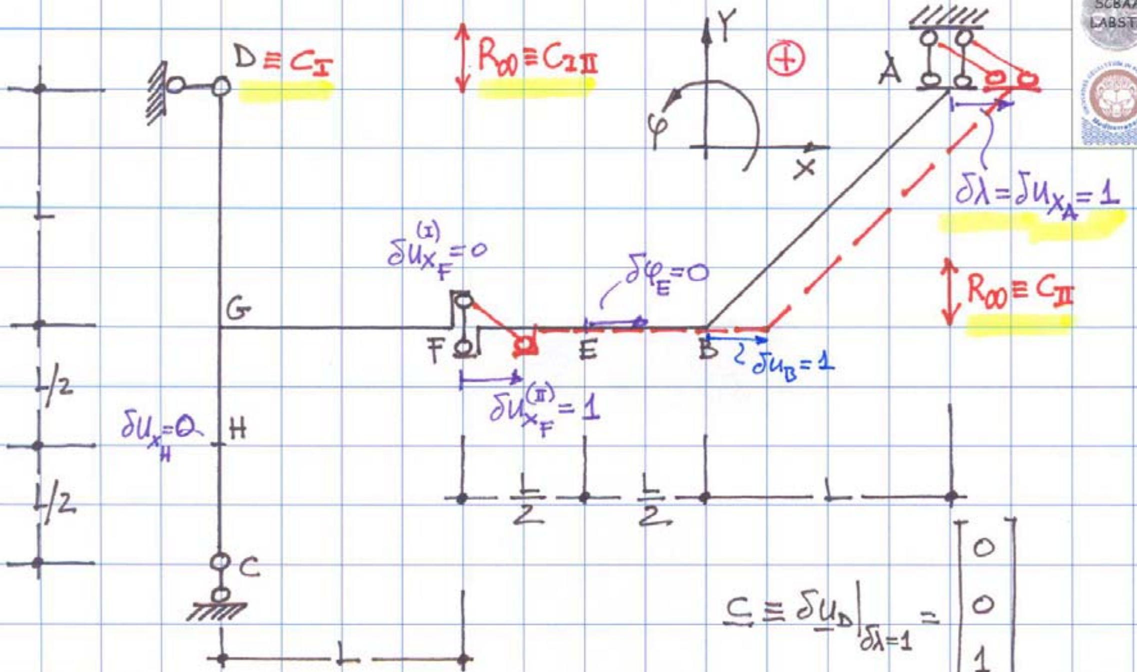
l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta u_{x_A} = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D|_{\delta\lambda = 1}$ -

REMARKS

#1 Il corpo I non si sposta !! infatti:

- una rotazione di I attorno a C_I produrrebbe una rotazione relativa tra le sezioni di estremità F dei due corpi, essendo $C_{II} \equiv R_{\infty}\updownarrow$ - Tale rotazione relativa non è consentita essendo $C_{I\,II} \equiv R_{\infty}\updownarrow$ -
- una rotazione di I attorno a C_I produrrebbe uno spostamento verticale relativo tra le sezioni di estremità F dei due corpi, essendo $C_{II} \equiv R_{\infty}\updownarrow$ (II può solo traslare orizzontalmente) - Tale spostamento verticale relativo non è consentito dal pendolo interno ad asse verticale!

#2 Per quanto osservato in #1 non è possibile assumere $\delta\lambda = \delta\varphi_D \equiv \delta\varphi_{I}$ -



$$\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D\Big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

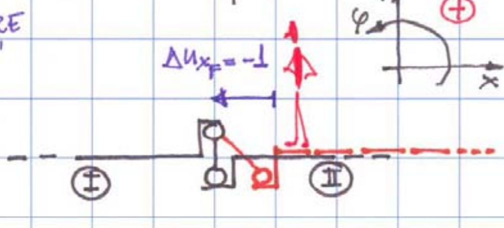
Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -R_{x_F} \\ R_{x_F} \\ -M \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{R_{x_F} = 0}$$

5. Allo stesso risultato si perviene se nella sezione F si considera lo spostamento relativo tra i due corpi, Δu_{x_F}, valutato per esempio da un osservatore solidale al corpo II. In questo caso assumendo:

$$\delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \Delta u_{x_F} \\ \delta \varphi_E \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -R_{x_F} \\ -M \end{bmatrix}$$

L'OSSERVATORE IN II "VEDE" SOLO R_{x_F} AGENTE SUL CORPO I

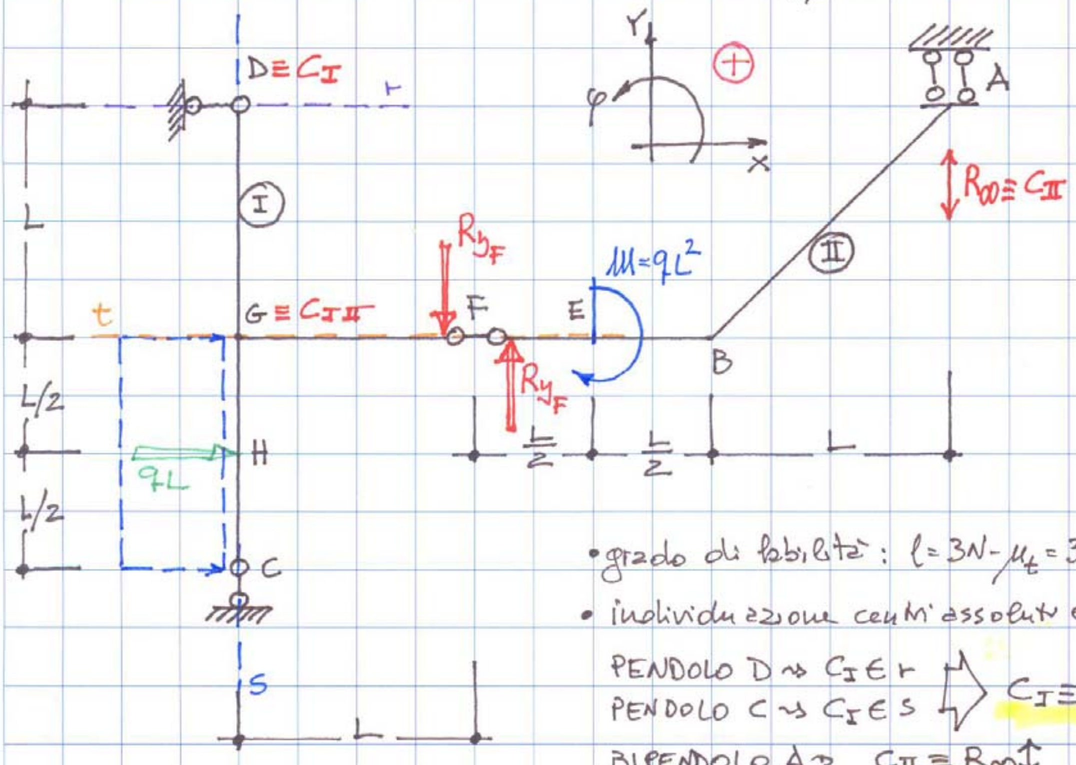


con riferimento alla spostata prima individuata di cui si riporta solo la porzione di interesse, per $\delta\lambda = 1$ si ha:

$$\underline{C} = \delta \underline{u}_D\Big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \text{ e quindi } \underline{C}^T \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -R_{x_F} \\ -M \end{bmatrix} = 0 \rightarrow R_{x_F} = 0.$$

- **CALCOLO DI Ry_F**

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera interna F ($\mu=2$) con un pendolo interno ad asse orizzontale ($\mu=1$) e applicando in F la reazione interna mutua Ry_F che si vuole valutare. Quest'ultima è assunta arbitrariamente ma di uguale modulo e verso opposto sui due corpi.
2. La reazione mutua incognita Ry_F agente sui due corpi del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno autoequilibrato incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di Ry_F.



- grado di labilità: $l = 3N - \mu_t = 3\times 2 - (1+1+1+2) = 1$
- individuazione centri assoluti e relativi:

PENDOLO D → $C_I \in r$
PENDOLO C → $C_I \in s$ ⇒ $C_I \equiv D$

BIPENDOLO A → $C_{II} \equiv R_\infty$ ↕

PENDOLO F → $C_{I,II} \in t$
$C_{I,II}$ deve anche essere allineato con C_I e C_{II} ⇒ $C_{I,II} \equiv G$

3. Vale quanto osservato ai punti 3 dei calcoli svolti in precedenza!

SCBAA LABSTA — campus one — FUSCHI PISANO SOFI

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$$\delta\lambda = \delta\varphi_D = \delta\varphi_{(I)} \; ; \quad \underline{\delta u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \delta u^{(I)}_{y_F} \\ \delta u^{(II)}_{y_F} \\ \delta\varphi_E \end{bmatrix} ; \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -R_{y_F} \\ R_{y_F} \\ -M \end{bmatrix} ;$$

PARAMETRO LAGRANGIANO

VETTORE SPOSTAMENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMP. DI SPOST. NELLA DIREZ. DEI CARICHI)

SPOSTAMENTO VERTICALE SEZ. F APPARTENENTE AL CORPO I

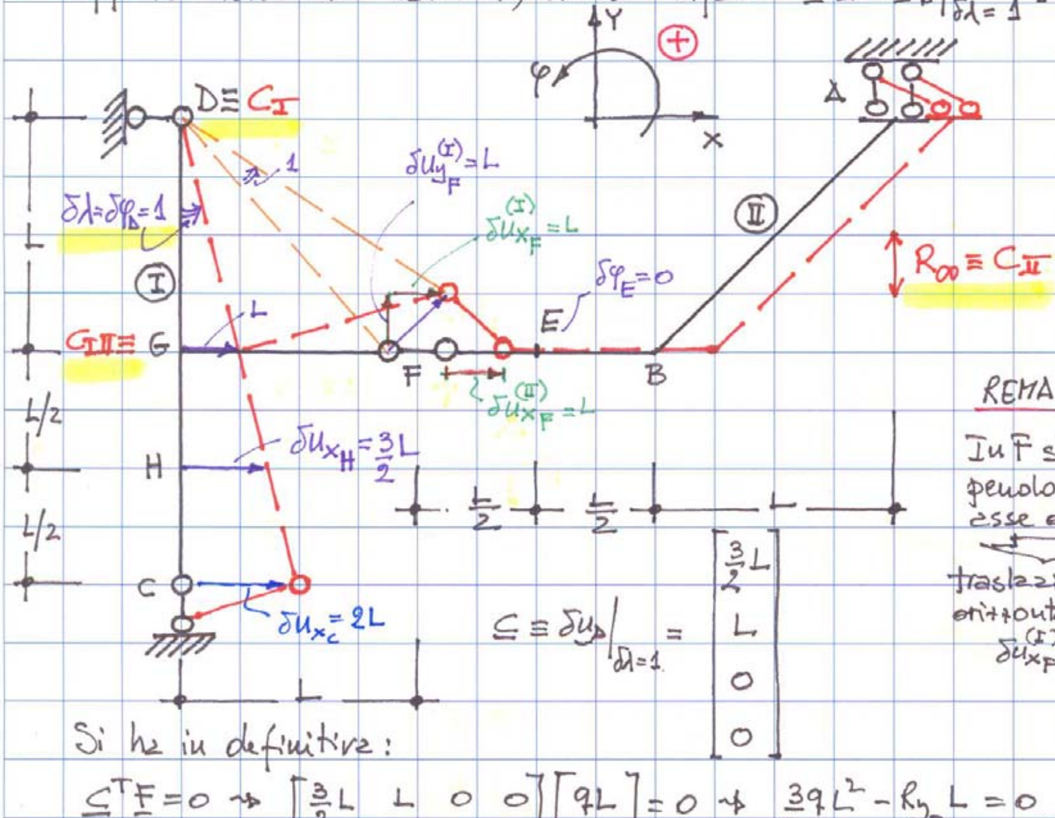
SPOSTAMENTO VERTICALE SEZ. F APPARTENENTE AL CORPO II

R_{y_F} AGENTE SUL CORPO (I)

R_{y_F} AGENTE SUL CORPO (II)

VETTORE DEI CARICHI

l'individuazione di $\underline{C}$ (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta\lambda = \delta\varphi_D = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \underline{\delta u}_D\big|_{\delta\lambda=1}$ -



$$\underline{C} \equiv \underline{\delta u}_D\big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L \\ L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

REMARK

In F si ha un pendolo ad asse orizzontale!

traslazione relativa orizzontale impedita $\delta u^{(I)}_{x_F} = \delta u^{(II)}_{x_F}$

Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L & L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -R_{y_F} \\ R_{y_F} \\ -M \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \frac{3}{2}qL^2 - R_{y_F}L = 0$$

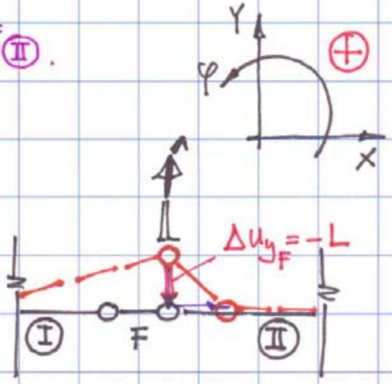
$$\boxed{R_{y_F} = \frac{3}{2}qL}$$

FUSCHI
PISANO
SOFI

5. Allo stesso risultato si perviene se nella sezione F si considera lo spostamento relativo tra i due corpi, Δu_{y_F}, valutato per esempio da un osservatore solidale al corpo (I). In questo caso assumendo:

$$\delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_H} \\ \Delta u_{y_F} \\ \delta \varphi_E \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ R_{y_F} \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix}$$

L'OSSERVATORE IN (I) "VEDE" SOLO R_{y_F} AGENTE SU (II).



Con riferimento alla spostata prima individuata di cui si riporta solo la porzione di interesse, per $\delta\lambda = 1$ si ha:

$$\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D \Big|_{\delta\lambda=1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}L \\ -L \\ 0 \end{bmatrix}$$

In definitiva si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}L & -L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ R_{y_F} \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \frac{3}{2}qL^2 - R_{y_F}L = 0 \rightarrow \boxed{R_{y_F} = \frac{3}{2}qL}$$

Risultato già ottenuto!

- REAZIONI VINCOLARI DEL SISTEMA ISOSTATICO